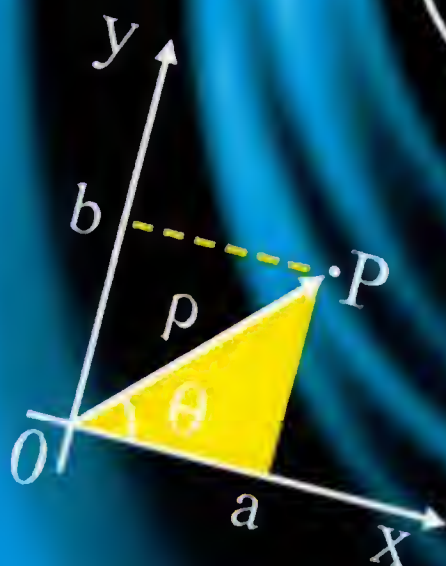
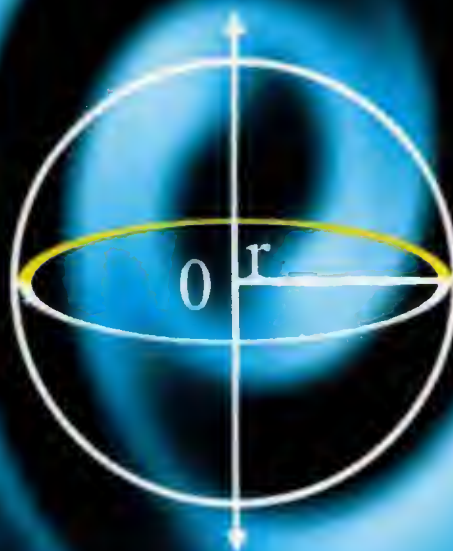
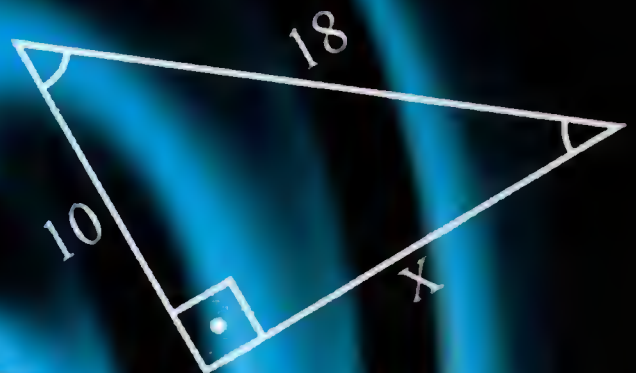
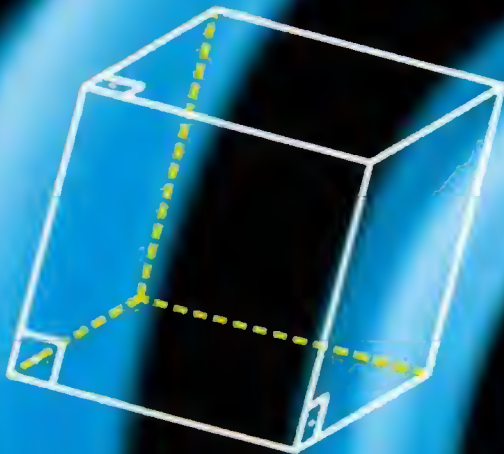


# MINIMANUAL COMPACTO DE **MATEMÁTICA** TEORIA E PRÁTICA ENSINO MÉDIO



$$z_1 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right)$$



EDITORIA  
RIDEEL



**O MINIMANUAL COMPACTO DE MATEMÁTICA  
TEORIA E PRÁTICA (ENSINO MÉDIO) APRESENTA:**

- **Toda a matéria do ensino médio explicada detalhadamente e ilustrada com vários exemplos;**
- **exercícios resolvidos de toda a matéria para o leitor compreender melhor cada item, sem deixar dúvidas;**
- **um capítulo complementar sobre Matemática Financeira para aqueles que queiram compreender melhor nossa política de preços e saber quando uma aplicação ou prestação está valendo a pena;**
- **exercícios dos principais vestibulares do país e seus respectivos gabaritos para avaliar seu aprendizado.**

**TUDO ISSO E MUITO MAIS NO  
MINIMANUAL COMPACTO DE MATEMÁTICA  
TEORIA E PRÁTICA (ENSINO MÉDIO)**



**EDITORA  
RIDEEL**



MINIMANUAL COMPACTO DE  
**MATEMÁTICA**  
TEORIA E PRÁTICA  
ENSINO MÉDIO

**AUTORIA:**

Tânia Cristina Neto G. Viveiro  
Marlene Lima Pires Corrêa



# PREFÁCIO

Em qualquer área de atuação que você se encontre, não há como escapar dela: a matemática.

Seus conceitos são tão básicos, que até mesmo a música pode ser convertida em expressões matemáticas. É uma ciência tão universal, que todas as mensagens das sondas espaciais lançadas até hoje, são enviadas em linguagem matemática.

Em vista disso, o aprendizado da matemática é imprescindível, portanto, levamos até você o *Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática (Ensino Médio)* e ilustrado com inúmeros exemplos para tornar o seu aprendizado muito mais fácil e agradável.

Este livro contém toda a matéria do ensino médio, explicada pormenorizadamente, em uma linguagem acessível, desde a teoria dos conjuntos, passando pelas funções, até a geometria e a trigonometria. Além disso, o *Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática (Ensino Médio)* traz um capítulo complementar de *Matemática Financeira* em que o leitor poderá tirar suas principais dúvidas sobre as transações comerciais e financeiras do mercado, e até mesmo compreender um pouco melhor nossa política econômica.

Para os que passarem a gostar de matemática, o último capítulo – *Ampliando seu Conhecimento* – é uma pequena introdução a estudos mais avançados e, para que você, leitor, possa testar e avaliar seus conhecimentos, cada capítulo traz exercícios resolvidos e testes dos melhores vestibulares do país.

E assim, caro leitor, nos despedimos, esperando que esta obra não só lhe seja útil no aprendizado da matemática, como também o faça gostar mais desta incrível ciência.

OS EDITORES



---

# ÍNDICE

---

I – TEORIA DOS CONJUNTOS.....	1
II – RELAÇÕES E FUNÇÕES .....	16
III – FUNÇÃO DO 1º GRAU .....	33
IV – FUNÇÃO DO 2º GRAU .....	57
V – FUNÇÃO MODULAR.....	86
VI – FUNÇÃO EXPONENCIAL .....	100
VII – FUNÇÃO LOGARÍTMICA .....	120
VIII – FUNÇÕES CIRCULARES DE TRIGONOMETRIA .....	144
IX – SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES .....	209
X – MATRIZES E DETERMINANTES .....	233
XI – SISTEMAS LINEARES .....	260
XII – ANÁLISE COMBINATÓRIA E BINÔMIO DE NEWTON .....	274
XIII – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA .....	310
XIV – GEOMETRIA ESPACIAL .....	330
XV – MATEMÁTICA FINANCEIRA .....	400
XVI – NÚMEROS COMPLEXOS .....	427
XVII – POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS .....	450
XVIII – GEOMETRIA ANALÍTICA .....	479
XIX – AMPLIANDO SEU CONHECIMENTO.....	536
GABARITO .....	565







# Capítulo I

## TEORIA DOS CONJUNTOS

**1. Introdução** O avanço tecnológico deste século deve-se, em muito, ao desenvolvimento da informática.

A teoria da computação, entretanto, faz uso constante da Lógica, ciência que tem sua pedra fundamental na teoria dos conjuntos, formulada no final do século XIX, quando seus conceitos tomaram uma forma na simbologia específica desenvolvida pelo matemático russo Georg Cantor (1845-1918).

### **2. Idéia de conjunto. Pertinência. Igualdade**

Qualquer agrupamento pode ser chamado *conjunto*.

A cada unidade deste conjunto, damos o nome de *elemento*.

Uma das formas de simbolizar o conjunto e seus elementos é representar o conjunto por uma letra maiúscula e seus elementos separados por vírgulas e entre chaves.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  (lê-se: A é conjunto formado pelos números 2, 4, 6, 8, 10)

$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  (lê-se: B é o conjunto formado pelas letras a, b, c, d, e, f, g)

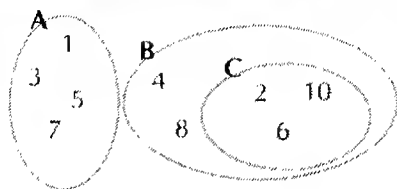
Observe que 2 é um elemento de A. Esta afirmação é representada por:  $2 \in A$  (lê-se: 2 pertence a A)

Porém a letra z não é elemento de B. Escrevemos, então:  $z \notin B$  (lê-se: z não pertence a B)

Diremos que dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos:  $M = \{\square, \triangle, \bigcirc, \square\}$  e  $N = \{\square, \triangle, \bigcirc, \square\}$ , temos então  $M = N$ .

### 3. Diagrama de Venn. Subconjuntos. Conjunto universo.

**Conjunto vazio** Outra forma de representar um conjunto e seus elementos é através do diagrama de Venn:



Esta forma de representação permite-nos visualizar com clareza os conjuntos e determinar suas relações.

Assim, no exemplo acima temos: C como parte de B, por isso dizemos que C é um *subconjunto* de B e representamos esta relação como  $C \subset B$  (lê-se: C *está contido em* B) ou  $B \supset C$  (lê-se: B *contém* C).

Porém, o conjunto A não mantém qualquer ligação com B ou C, por isso dizemos que:  $A \not\subset B$  (lê-se: A *não está contido em* B) e  $B \not\supset A$  (lê-se: B *não contém* A)

A partir de um conjunto, podemos determinar outros:  $P = \{x \in B \mid x > 4\} = \{\text{elementos de B maiores que 4}\}$ , então  $P = \{6, 8, 10\}$ .

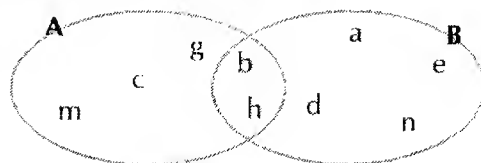
O conjunto P foi formado a partir de elementos de B, neste caso B é o *conjunto universo*.

Quando um conjunto não possui elementos, dizemos que é um *conjunto vazio* e simbolizamos por  $\{ \}$  ou  $\emptyset$ .

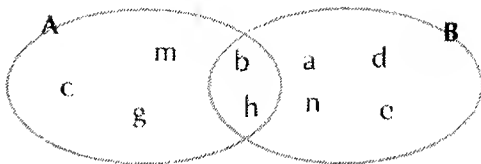
O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

**4. Operações com conjuntos. Símbolos lógicos** Considere os conjuntos:  $A = \{b, c, g, h, m\}$  e  $B = \{a, b, d, e, h, n\}$

a) *Intersecção*: é o conjunto formado pelos elementos comuns aos dois conjuntos e representa-se:  $A \cap B = \{b, h\}$  (lê-se: A *intersecção* B), como mostra o diagrama de Venn ao lado.



b) *União*: é o conjunto formado por todos os elementos de A e B, comuns e não comuns:  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, g, h, m, n\}$  (lê-se: A *união* B). Veja o diagrama de Venn ao lado.



c) *Diferença ou complementar*

Definição:  $C_A^B$  (lê-se: *complementar de B em A*) =  $A - B$  (lê-se A *menos* B) =  $A - (A \cap B)$

Na diferença de dois conjuntos  $A - B$ , fixamos o primeiro conjunto (A) e retiramos dele os elementos da intersecção com B:

$A = \{b, c, g, h, m\}$ ;  $(A \cap B) = \{b, h\}$ ;  $C_A^B = A - B = A - (A \cap B) = \{b, c, g, h, m\} - \{b, h\} = \{c, g, m\}$  portanto,  $A - B = \{c, g, m\}$

### Símbolos lógicos

Temos aqui um resumo dos principais símbolos lógicos que aparecem com frequência no estudo da matemática. Procuraremos sempre “traduzi-los” para que o aluno possa compreender o significado das expressões que lhe forem propostas.

$\Leftrightarrow$	se, e somente se...	$\Rightarrow$	implica (...concluimos que...)
$\forall$	qualquer que seja...	$\therefore$	portanto
$\exists$	existe	$\nexists$	não existe
$ $	tal que...	$\neq$	diferente
$>$	maior que	$<$	menor que
$\geq$	maior ou igual a	$\leq$	menor ou igual a

### Exercícios resolvidos:

1. Considere os conjuntos  $A = \{3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 4, 5\}$  e  $C = \{2, 5, 6\}$ , obtenha  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B \cap C$  e  $B - C$ .

Resolução:  $A \cap B = \{4, 5\}$ ;  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $A \cap B \cap C = \{5\}$ ;  
 $B - C = B - (B \cap C) = \{1, 2, 4, 5\} - \{2, 5\} = \{1, 4\}$

2. O questionário de uma pesquisa de mercado perguntava:

a) eventualmente você toma a bebida A?

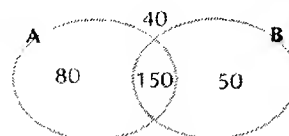
b) eventualmente você toma a bebida B?

O resumo das respostas dos pesquisados a ambas as perguntas foi:

Bebida	A	B	Ambas	Nenhuma
Número de Consumidores	230	200	150	40

Qual foi o número de pesquisados?

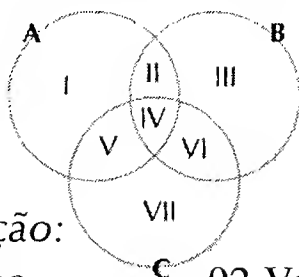
Resolução: O problema torna-se simples se fizermos um diagrama, começando sempre pelo número de elementos da intersecção:



Se 230 bebem A, e existem 150 na intersecção, então  $230 - 150 = 80$  bebem *somente* A. Da mesma forma,  $200 - 150 = 50$  bebem *somente* B. Os 40 que não bebem A e não bebem B estão fora dos conjuntos. Somando, teremos:  $80 + 150 + 50 + 40 = 320$

320 é o total de pessoas da pesquisa.

3. (UFSC) Considere o diagrama abaixo e determine a soma dos números associados às afirmativas verdadeiras:



01.  $A \cap B \cap C = \text{II} \cup \text{IV}$

02.  $A - B = \text{I} \cup \text{V}$

04.  $(A \cup B) \cap C = \text{IV} \cup \text{V} \cup \text{VI}$

08.  $(A \cap B) - A = \text{III} \cup \text{V}$

16.  $(A \cup B) \supset (B \cap C)$

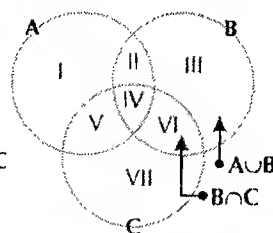
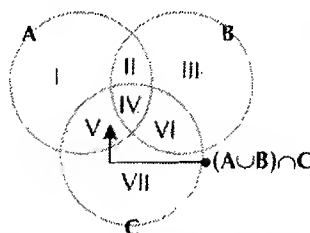
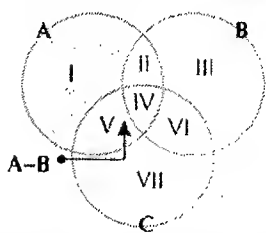
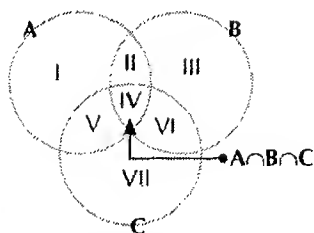
Resolução:

01. Falsa

02. Verdadeira

04. Verdadeira

16. Verdadeira



08. Falsa, pois  $(A \cap B) - A = \{ \}$

A soma dos números associados às afirmações é  $2 + 4 + 16 = 22$

### Exercícios propostos:

1. (Mack-SP) A e B são dois conjuntos não vazios de modo que  $A \subset B$  e  $A \neq B$ , então: a) sempre existe  $x$ ,  $x \in A$  tal que  $x \notin B$ ; b) sempre existe  $x$ ,  $x \in B$  tal que  $x \notin A$ ; c) se  $x \in B$  então  $x \in A$ ; d) se  $x \notin B$  então  $x \in A$ ; e) A e B não têm elementos comuns.

2. Se  $A \cap B = \{6, 8, 10\}$ ,  $A = \{4, x, 8, 10\}$  e  $B = \{2, x, y, 10, 12\}$  obtenha  $x$  e  $y$ .

3. (FAAP-SP) Uma prova era constituída de dois problemas. 300 alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, 100 acertaram os dois e 210 erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova?

4. Escrever, na forma explícita, os conjuntos:

a)  $A$  = conjunto dos divisores de 6; b)  $B$  = conjunto dos múltiplos de 3; c)  $C$  = conjunto dos divisores de 15.

5. Considere  $A = \{3, 4\}$ . Sabe-se que  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$ . Determine  $B$ .

6. Considere os conjuntos:  $M = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $N = \{0, 1, 2, 5, 6\}$  e  $P = \{3, 4\}$ . Determine: a)  $(M \cup N) \cap P$ ; b)  $(M \cap N) \cup P$ ; c)  $M \cup (N \cap P)$ ; d)  $M - N$ ; e)  $N - P$

7. (UFBA) Na figura abaixo, a parte sombreada representa as operações:



I.  $[(A \cup B \cup C) - C] \cup (A \cap C)$

II.  $(A \cup B) - C$

IV.  $(B - C) \cup (A - C) \cup (A \cap C)$

III.  $A \cup (B - C)$

V.  $(A - C) \cup B$



**5. Conjuntos numéricos** A partir do século VIII, os árabes introduziram na Europa o sistema de numeração com dez símbolos criado pelos hindus. Esse sistema possuía inúmeras vantagens sobre os que eram normalmente utilizados, principalmente por facilitar a escrita e os cálculos. Ficou conhecido como sistema de numeração indo-arábico. Sofreu várias modificações e somente no século XIV os símbolos adquiriram o formato que utilizamos hoje.

**6. Conjunto dos números naturais** Os números naturais são aqueles utilizados para se efetuar contagens, como o número de páginas de um livro ou a quantidade de habitantes de uma cidade.

Representa-se o conjunto dos números naturais pela letra  $\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Observe que o conjunto dos naturais é infinito.

**Subconjuntos de  $\mathbb{N}$**

Simboliza-se por  $\mathbb{N}^*$  o conjunto dos naturais com exceção do zero.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Podemos definir um subconjunto de  $\mathbb{N}$  segundo uma propriedade. Por exemplo: o conjunto dos números naturais menores que 10. Em linguagem simbólica temos:

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\} \therefore P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

**conjunto dos números naturais tal que  $x$  é menor que 10**

$P$  é um conjunto finito e não inclui o 10 por causa do sinal  $<$ . Se, por outro lado, usássemos  $\leq$ , o 10 estaria incluído.

**7. Conjunto dos números inteiros** Para cada número natural ou número *positivo*, temos um correspondente *negativo*. Dizemos que são *números opostos*, isto é: o oposto de 5 é  $-5$ ; o oposto de 7 é  $-7$ .

Chamamos de *Conjunto de Números Inteiros* ao conjunto de todos os números positivos, seus opostos e o zero. Simboliza-se por  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Os números inteiros estão presentes na linguagem popular, por exemplo quando ouvimos as afirmações:

“a conta do sr. Silva está R\$ 70,00 negativa”

“a temperatura na cidade de São Joaquim atingiu  $3^\circ\text{C}$  abaixo de zero”

Entendemos que a temperatura é de  $-3^\circ\text{C}$  e que o sr. Silva deve R\$ 70,00, ou seja, ele tem  $-70,00$ ;

## Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Simbolizamos por  $\mathbb{Z}^*$  o conjunto dos inteiros com exceção do zero.

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

$\mathbb{Z}_+$  é o conjunto dos inteiros não-negativos.

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

$\mathbb{Z}_-$  é o conjunto dos inteiros não-positivos.

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

Temos ainda:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

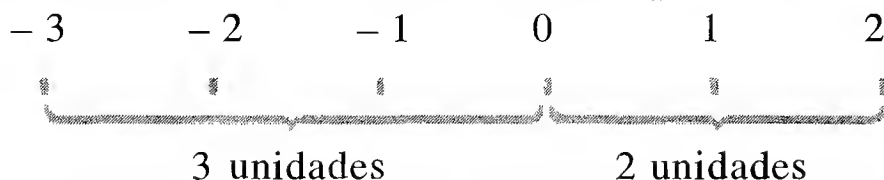
$$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$\mathbb{Z}_+^*$  é o conjunto dos inteiros positivos, com exceção do zero.

$\mathbb{Z}_-^*$  é o conjunto dos inteiros negativos, com exceção do zero.

**O zero não é considerado positivo nem negativo.**

**8. Módulo e operações com os números inteiros** O *módulo* ou *valor absoluto* de um número inteiro é a distância deste número até o zero. Indica-se o módulo de um número por  $| |$ .



temos então:  $|-3| = 3$  (lê-se: o *módulo* de  $-3$  é 3)  
 $|2| = 2$  e  $|-5| = 5$

**Regra da soma:** “na soma de números inteiros, se os sinais são iguais somamos os módulos dos números e conservamos o sinal, se os sinais forem diferentes subtraímos os módulos e prevalece o sinal do maior número (em módulo)”.

Exemplos:  $-3 - 2 = -5$ ,  $-3 + 2 = -1$ ,  $+3 + 2 = +5$ ,  $+3 - 2 = +1$

**Regra do produto:** “multiplicamos (ou dividimos) os módulos dos números; o resultado será positivo se os números tiverem sinais iguais, ou negativo se os sinais forem diferentes”.

Exemplos:  $(+3) \cdot (+2) = +6$      $(+3) \cdot (-2) = -6$   
 $(-3) \cdot (-2) = +6$

### Exercício resolvido:

Em vários jogos a contagem dos pontos é uma soma de números inteiros. Isso ocorre, por exemplo, no jogo de cartas conhecido como “buraco”. Considere a tabela a seguir obtida no final de um jogo com duas duplas.

Calcule a soma dos pontos das duplas e descubra a vantagem da vencedora sobre a outra.

<b>Dupla A</b>	- 150	- 100	200	310	170
<b>Dupla B</b>	300	140	- 100	- 400	50

Resolução: dupla A =  $- 150 - 100 + 200 + 310 + 170 =$   
 $= - 250 + 680 = 430$

dupla B =  $300 + 140 - 100 - 400 + 50 = 490 - 500 = - 10$

A vantagem da dupla A sobre a B é: pontos da dupla A - pontos da dupla B =  $430 - (- 10) = 430 + 10 = 440$

Portanto, a dupla vencedora é a A (430 pontos) com 440 pontos de vantagem.

## 9. Números primos, múltiplos e divisores comuns

**Números primos:** Dizemos que um número é primo se tiver somente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. São números primos:  $\{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots\}$ . Observe que 2 é o único número par e primo, e que o número 1 não é considerado primo.

**Mínimo múltiplo comum (m.m.c.):** É o menor elemento comum não nulo ( $\neq 0$ ) entre os elementos dos conjuntos dos múltiplos de dois ou mais números.

Ex.: João recebe visitas periódicas de três amigos. O primeiro o visita a cada 20 dias, o segundo a cada 5 dias e o terceiro a cada 8 dias. No seu aniversário, em 2 de junho, os três foram visitá-lo. Depois dessa data, quando coincidirá a visita dos amigos?

Para resolver o problema, vamos analisar os conjuntos dos múltiplos de 5, 8 e 20.

$$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, \dots\}$$

$$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, \dots\}$$

$$M_{20} = \{0, 20, 40, 60, \dots\}$$

Observe que o menor múltiplo comum aos três conjuntos, com exceção do zero, é 40, portanto os amigos se reencontrarão após 40 dias, em 12 de julho. Na resolução desse tipo de problema calculamos o *mínimo múltiplo comum* dos números.

Para facilitar, utilizamos o método da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|c}
 5, & 8, & 20, & 2 \\
 5, & 4, & 10, & 2 \\
 5, & 2, & 5, & 2 \\
 5, & 1, & 5, & 5 \\
 1, & 1, & 1, & \text{m.m.c. } (5, 8, 20) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40
 \end{array}$$

**Máximo divisor comum (m.d.c.):** É o maior elemento comum entre os elementos dos conjuntos dos divisores de dois ou mais números.

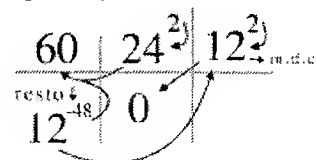
Ex.: Para desenvolver uma determinada atividade com seus alunos, Ana dispõe de 60 cartolinas verdes e 24 azuis. Deseja separá-las em pilhas de tal forma que cada uma contenha o mesmo número de cartolinas e sempre da mesma cor. Qual é o maior número de cartolinas que cada pilha pode ter?

Vamos formar os conjuntos dos divisores de 60 e 24:

$$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$D_{60} \cap D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$



Queremos que cada pilha tenha o maior número possível de cartolinas, devemos então considerar o *maior divisor dos dois conjuntos*: 12. Teremos então 5 pilhas ( $60 \div 12$ ) de cartolinas verdes e 2 ( $24 \div 12$ ) de azuis, cada pilha com 12 cartolinas. Notação:  $\text{m.d.c.}(60, 24) = 12$

### Exercícios resolvidos:

1. Determine os conjuntos:

a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$

**Resolução:** A é o conjunto dos números naturais menores e igual a 8, então:  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b)  $B = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y < 10\}$

**Resolução:** B é o conjunto dos números naturais, com exceção do zero, menores que 10:  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$

**Resolução:** C é o conjunto dos números inteiros maiores que -3:  $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

d)  $D = \{y \in \mathbb{Z}_- \mid y < 3\}$

**Resolução:** D é o conjunto dos números inteiros não positivos menores que 3:  $D = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

e)  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$

**Resolução:** E é o conjunto dos números naturais múltiplos de 3:  $E = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \dots\}$



f)  $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ é divisor de } 12\}$

**Resolução:** F é o conjunto dos números inteiros divisores de 12:  
 $F = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

### ⇒ Exercícios propostos:

8. Determine os conjuntos:

- a)  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$       d)  $T = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 4\}$   
 b)  $Q = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \geq -3\}$       e)  $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 32\}$   
 c)  $R = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x > -9\}$

9. Numa escola, existem duas 7ª séries: A, com 30 alunos, e B, com 18 alunos. Deseja-se formar grupos (tanto na A como na B) com o mesmo número de alunos. Qual é o maior número de alunos possível em cada grupo?

10. Um determinado cometa “passa” pela Terra de 12 em 12 anos, outro “passa” de 32 em 32 anos. Em 1910 os dois foram vistos perto da Terra. Em que ano os dois passarão juntos novamente?

**10. Conjunto dos números racionais** Número racional é aquele que pode ser escrito sob a forma de fração  $\frac{p}{q}$ , onde  $p$  e  $q$  devem ser

números inteiros e  $q \neq 0$ . Exemplos:  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{6}$

Observe que todo número inteiro é também racional:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} \qquad -3 = \frac{-3}{1} = \frac{-9}{3}$$

Utiliza-se a letra Q para simbolizar o conjunto dos números racionais:

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

conjunto das frações  $\frac{p}{q}$  tal que  $p$  é inteiro,  
 $q$  é inteiro e  $q$  é diferente de zero.

**Adição e subtração de racionais:** Para somar duas frações de denominadores diferentes, devemos calcular o menor múltiplo comum (m.m.c.), reduzindo-as a um mesmo denominador. Por exemplo:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10 - 3}{15} = \frac{7}{15} \qquad -\frac{3}{4} + \frac{7}{2} = \frac{-3 + 14}{4} = \frac{11}{4}$$

**Multiplicação e divisão de racionais:** Na multiplicação basta multiplicar os numeradores e, depois, os denominadores. Sempre que possível devemos simplificar as frações antes de efetuar o produto.

$$\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{(-3) \cdot (-2)}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35} \qquad \frac{3^1}{4^2} \cdot \frac{2^1}{9^3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Na divisão, conserva-se a primeira fração, inverte-se a segunda e multiplicam-se as duas.

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{5}$$

**Decimais e dízimas periódicas:** Os números decimais também podem ser escritos sob a forma de frações, nas quais os denominadores são múltiplos de 10. Veja os exemplos:

$$2,5 = \frac{25}{10} \qquad 3,12 = \frac{312}{100} \qquad 54,715 = \frac{54\,715}{1000}$$

Toda dízima periódica pode igualmente ser representada por uma fração, chamada de *fração geratriz*. Para se determinar a fração geratriz de uma dízima, observe os exemplos a seguir:

a) Seja  $x = 1,3333\dots$

Multiplicando  $x$  por 10, temos que  $10x = 13,333\dots$

Observe a subtração  $10x - x$ :  $10x = 13,333\dots$

$$\begin{array}{r} 10x = 13,333\dots \\ - x = 1,333\dots \\ \hline 9x = 12,000 \end{array}$$

$$x = \frac{12}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\text{Temos então que } \frac{4}{3} = 1,333\dots$$

b) Seja  $x = 25,2121\dots$

Multiplicamos  $x$  por 100, portanto  $100x = 2521,2121\dots$

Subtraímos  $x$  de  $100x$ :  $100x = 2521,2121\dots$

$$\begin{array}{r} 100x = 2521,2121\dots \\ - x = 25,2121\dots \\ \hline 99x = 2496,000\dots \end{array}$$

$$x = \frac{2496}{99} = \frac{832}{33} \therefore 25,2121\dots = \frac{832}{33}$$

Assim, devemos procurar um múltiplo de 10 de tal forma que, ao efetuarmos o produto, e, a seguir, a diferença (conforme os exemplos), tenhamos um número inteiro. No caso do número  $4,58123123123\dots$ , note que o período da dízima aparece a partir da segunda casa decimal. Neste caso, multiplicamos, inicialmente, por 100 para isolar o período:  $100x = 458,123123123\dots$

Procedemos como nos exemplos anteriores, como o período contém três algarismos multiplicamos 458,123123... por 1000:

$$1\ 000\ (100x) = 1\ 000\ (458,123123123...)$$

$$100\ 000x = 458123,123123...$$

Efetuamos a diferença:  $100\ 000x - 100x$ :

$$\begin{array}{r} -\ 100\ 000x =\ 458123,123123... \\ \quad\ 100x =\ \quad\ 458,123123... \\ \hline 99\ 900x =\ 457\ 665,000... \end{array}$$

$$x = \frac{457665}{99900} \quad \text{Simplificando (por 15):} \quad x = \frac{30511}{6660}$$

### Exercícios propostos:

11. Efetue:

a)  $-2 - \frac{8}{15}$

b)  $\frac{5}{12} - \frac{13}{18}$

c)  $-\frac{5}{36} \cdot \frac{9}{10}$

d)  $\frac{11}{28} \cdot \left(-\frac{56}{11}\right)$

e)  $-5 \div \frac{17}{2}$

f)  $\frac{32}{27} \div \left(-\frac{4}{3}\right)$

12. Determine a fração geratriz de:

a) 0,4444...; b) 0,333...; c) 1,343434...; d) 0,211211211...

**11. Conjunto dos Números Reais. A reta real. Intervalos** Observe os números abaixo:

$$0,101100111000111100...$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562...$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508...$$

$$\pi = 3,1415926535...$$

Eles não possuem um período, portanto não podem ser expressos sob forma de fração. Esses números são chamados de *irracionais* e são elementos do conjunto dos Números Reais.

O conjunto dos Números Reais contém os números racionais, irracionais, inteiros e naturais:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Os reais  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e  $\pi$  estão dispostos na reta real da seguinte maneira:



**Subconjuntos de R:** Além de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  são também subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_-$ ,  $\mathbb{R}_+^*$  e  $\mathbb{R}_-^*$ , que podem facilmente ser determinados.

Outros subconjuntos de  $\mathbb{R}$  podem ser definidos de acordo com uma propriedade:

$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \}$   
conjunto dos números reais tal que  
 $x$  é menor que 3

$\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$   
conjunto dos números reais tal que  
 $x$  está entre 0 e 7

**Intervalos:** O intervalo é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , que pode substituir a notação utilizada anteriormente, ou seja, dados dois números reais  $a$  e  $b$ , onde  $a < b$ , o conjunto de números reais que está entre  $a$  e  $b$  é:

$[a; b]$  – intervalo fechado (os extremos  $a$  e  $b$  estão incluídos, pode ser substituído por  $a \leq x \leq b$ );

Na reta real:  ou

$]a; b[$  – intervalo aberto (os extremos  $a$  e  $b$  não estão incluídos, pode ser substituído por  $a < x < b$ );

Na reta real:  ou

$[a; b[$  – intervalo fechado em  $a$  e aberto em  $b$  (o extremo  $a$  está incluído e  $b$  não está, ou  $a \leq x < b$ );

Na reta real:  ou

$]a; b]$  – intervalo aberto em  $a$  e fechado em  $b$  (o extremo  $a$  não está incluído e  $b$  está, ou  $a < x \leq b$ ).

Na reta real: 

Exemplos:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\} = [-2; 3]$$

(lê-se:  $x$  pertence ao intervalo fechado entre  $-2$  e  $3$ )

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} = ]-2; 3[$$

(lê-se:  $x$  pertence ao intervalo aberto entre  $-2$  e  $3$ )

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\} = [-2; 3[$$

(lê-se:  $x$  pertence ao intervalo fechado em  $-2$  e aberto em  $3$ )

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\} = ]-2; 3]$$

(lê-se:  $x$  pertence ao intervalo aberto em  $-2$  e fechado em  $3$ )

Observe que o intervalo é fechado quando aparece o sinal de igualdade, caso contrário é aberto. Podemos ter ainda:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} = ]2; +\infty[ \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} = ]-\infty; -1]$$

$+\infty$  simboliza o infinito à direita e  $-\infty$  o infinito à esquerda





O símbolo de intervalo é sempre aberto no infinito.

**União e intersecção de intervalos:** Consideremos os conjuntos  $A = [-3; 1[$  e  $B = ]-2; 3]$ . Obteremos  $A \cap B$  e  $A \cup B$ .

A é o conjunto de números reais que estão entre  $-3$  e  $1$ . Perceba que o intervalo é fechado em  $-3$ , neste caso representaremos o  $-3$  com uma bolinha preta, e aberto em  $1$ , que será representado com uma bolinha branca. Isto significa que o  $-3$  pertence ao intervalo, enquanto que o  $1$  não pertence.

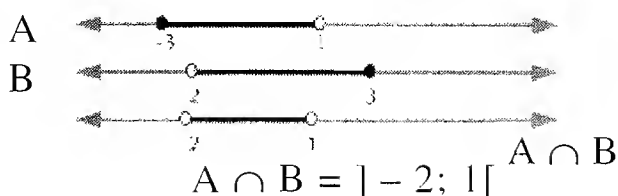
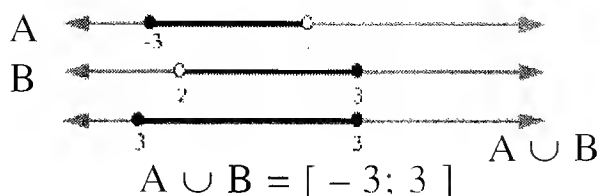


A parte hachurada indica os números reais que pertencem ao intervalo.

Do mesmo modo: B 

$$A \cup B = [-3; 3]$$

$$A \cap B = ]-2; 1[$$



Observe que em  $A \cup B$  temos todos os reais que estão em A ou em B.  $A \cap B$  são apenas os reais comuns a A e B, simultaneamente, e, por esse motivo, os extremos, simbolizados pelas bolinhas brancas, não estão na intersecção. Podemos concluir a seguinte regra:

bolinha branca  $\cup$  bolinha preta = bolinha preta

bolinha branca  $\cap$  bolinha preta = bolinha branca

### ⇒ Exercício proposto:

**13.** Determine  $A \cup B$  e  $A \cap B$  nos seguintes casos:

a)  $A = ]-5; 0]$  e  $B = [-1; 2]$

d)  $A = [-\pi; 3]$  e  $B = ]-3; \pi]$

b)  $A = [0; 7]$  e  $B = ]1; 3[$

e)  $A = ]-10; 1; 2; 5]$  e  $B =$

c)  $A = ]-5; -3[$  e  $B = ]-5; 3[$

$] -0, 25; 7, 4]$

### ⇒ Exercícios complementares:

**14.** (UFAM) Sobre os conjuntos A, B, C e D afirma-se:

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = \emptyset$$

Então pode-se concluir que:

a) O conjunto  $A \cup B$  é vazio.

b) Os conjuntos B e D são vazios.

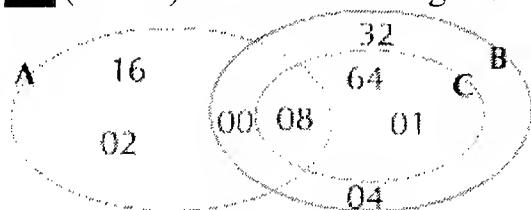
c) Os conjuntos  $A \cap B$  e  $C \cap D$  são vazios.

d) Os conjuntos A e C são vazios.

**15.** (UFPI) Se  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A \cap B = \{2, 4\}$  e  $A - B = \{1, 5, 6\}$ , então podemos dizer que o conjunto B é igual a:

a)  $\{2, 4\}$ ; b)  $\emptyset$ ; c)  $\{1, 2, 4, 6\}$ ; d)  $\{1, 2, 3\}$ ; e)  $\{0, 2, 3, 4\}$

**16.** (UFSC) Considere o diagrama:



A soma dos conjuntos  $(B \cap C) - A$  é:

**17.** (UFPB) Das afirmações abaixo, a respeito dos conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$ , a única falsa é:

- a)  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$
- b)  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
- c)  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$
- d)  $\mathbb{Q} - \mathbb{R} \subset \mathbb{N}$
- e)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

**18.** (UFMS) Dos 100 alunos de uma turma, 40 gostam de Álgebra, 30 gostam de Geometria, 15 gostam de Álgebra e Geometria, e há os que não gostam nem de Álgebra nem de Geometria. Um aluno é escolhido ao acaso. De quanto por cento é a probabilidade de que ele não goste nem de Álgebra nem de Geometria?

**19.** (UFSC) Na comunidade universitária são lidos dois jornais, A e B. Verificou-se que exatamente 75 % dos alunos lêem o jornal A e 60% o jornal B. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, determine quanto por cento dos alunos que lêem ambos.

**20.** (UFMG) Todas as afirmativas sobre números inteiros estão corretas, exceto:

- a) Nem todo número primo é ímpar.
- b) Todo inteiro par pode ser descrito na forma  $n^2 + 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- c) A soma de dois inteiros ímpares é sempre um inteiro par.

d) Todo inteiro ímpar pode ser descrito na forma  $2n - 9$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

e) Se  $n$  é um inteiro ímpar, então,  $n^2$  também é ímpar.

**21.** (UFPB) Colocando-se os números:  $a = \frac{3}{5}$ ,  $b = \frac{4}{7}$ ,  $c = \frac{2}{3}$

Em ordem crescente, obtém-se:

- a)  $b < a < c$
- b)  $a < b < c$
- c)  $b < c < a$
- d)  $c < b < a$
- e)  $c < a < b$

**22.** (UFPE) Na relação de números abaixo, indique o maior deles:

- a)  $\frac{7}{16}$
- b) 0,45
- c) 0,5
- d)  $\frac{3}{8}$
- e)  $\frac{\sqrt{2}}{5}$

**23.** (UFAL) Somando-se as frações geratrizes das dízimas periódicas 0,060606... e 0,8888... obtém-se:

- a)  $\frac{94}{99}$
- b)  $\frac{92}{99}$
- c)  $\frac{89}{99}$
- d)  $\frac{86}{99}$
- e)  $\frac{83}{99}$

**24.** (UFRN) O valor de  $\frac{2}{0,666...}$  é:

- a) 0,333...
- b) 1,333...
- c) 3,333...
- d) 3
- e) 12

**25.** (UFPI) A expressão

$\frac{1,101010... + 0,1111...}{0,09696...}$  é igual a:

- a) 12,5
- b) 10
- c) 8,75
- d) 5
- e) 2,5

**26.** (UFES) Sobre o número

$\frac{0,303030...}{0,272727...}$  pode-se afirmar que:

- a) é irracional.
- b) pode ser representado como decimal finito.
- c) é menor do que 1.
- d) é igual a  $\frac{0,30}{0,27}$
- e) é um número inteiro.

**27.** (UFPE) Um ônibus chega a um terminal rodoviário a cada 4 dias. Um segundo ônibus chega ao terminal a cada 6 dias e um terceiro, a cada 7 dias. Numa ocasião, os três ônibus chegaram ao terminal no mesmo dia. A próxima vez em que chegarão juntos novamente ao terminal ocorrerá depois de:

- a) 60 dias b) 35 dias c) 124 dias  
d) 84 dias e) 168 dias

**28.** (UFAL) Sabe-se que o número  $A = 2^3 \cdot 3^x$  tem 20 divisores naturais. Nestas condições,  $x$  é um número:

- a) primo.  
b) divisível por 3.  
c) múltiplo de 5.  
d) quadrado perfeito.  
e) cubo perfeito.

**29.** (UFMG) Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  números primos distintos, em que  $a > b$ . O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de  $m = a^2 \cdot b \cdot c^2$  e  $n = ab^2$  são, respectivamente, 21 e 1764.

Pode-se afirmar que  $a + b + c$  é:

- a) 9 b) 10 c) 12 d) 42 e) 62

**30.** (Fuvest) O número  $x$  não pertence ao intervalo aberto de extremos  $-1$  e  $2$ . Sabe-se que  $x < 0$  ou  $x > 3$ . Pode-se concluir então que:

- a)  $x \leq -1$  ou  $x > 3$   
b)  $x \geq 2$  ou  $x < 0$   
c)  $x \geq 2$  ou  $x \leq -1$   
d)  $x > 3$   
e) n.d.a.

**31.** (FGV – SP) Sejam os intervalos  $A = ]-\infty, 1]$ ,  $B = ]0, 2]$  e  $C = [-1, 1]$ . O intervalo  $C \cup (A \cap B)$  é:

- a)  $] -1, 1]$  b)  $[-1, 1]$  c)  $[0, 1]$   
d)  $]0, 1]$  e)  $] -\infty, -1]$

**32.** (UFAL) Um certo número de pessoas subiu em um ônibus no ponto inicial. Na primeira parada, desceram 25% daquele número e, em seguida, subiram 3 pessoas. Na segunda parada não subiu ninguém, mas desceram 25% do número de pessoas presentes, restando então 18 pessoas. Nestas condições, o número de pessoas que subiu no ponto inicial é:

- a) 28 b) 25 c) 16 d) 14 e) 11

**33.** (U.F. Piauí)

Se  $x = (10\%)^2 - 1/100$ , então:

- a)  $x = 0$  b)  $x = 1\%$  c)  $x = 9\%$   
d)  $x = 81\%$  e)  $x = 99\%$

**34.** (Fuvest) Os números  $x$  e  $y$  são tais que  $5 \leq x \leq 10$  e  $20 \leq y \leq 30$ . O maior valor possível de  $\frac{x}{y}$  é:

- a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{4}$  c)  $\frac{1}{3}$  d)  $\frac{1}{2}$  e) 1

**35.** (UFSC) Seja  $B = \frac{2ab + b^2}{-4bc - \frac{a}{2}}$

O valor de  $B$  para  $a = -10$ ,  $b = -5$  e  $c = 0$  é:

**36.** (Fuvest) Calcule:  $\frac{0,2 \cdot 0,3}{3,2 - 2}$

**37.** (Fuvest) Dividir um número por 0,0125 equivale a multiplicá-lo por:

- a)  $\frac{1}{125}$  b)  $\frac{1}{8}$  c) 8 d) 12,5 e) 80

# Capítulo II

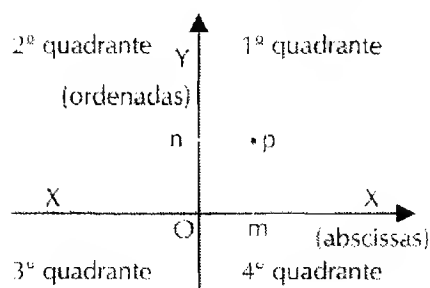
## RELAÇÕES E FUNÇÕES

**1. Introdução** Em jornais e revistas é crescente a utilização de gráficos, devido à facilidade de visualização e compreensão de dados, sendo que muitos desses gráficos expressam funções matemáticas aplicadas a diversas áreas.

Apesar do conceito já existir há muito, foi o matemático suíço Jean Bernonilli (1667-1748) o primeiro a denominar *função* as relações entre conjuntos de grandezas diferentes.

**2. Produto cartesiano** Chamamos *par ordenado*, por exemplo, as coordenadas de ataque de uma partida de “batalha naval”, as coordenadas geográficas de latitude e longitude, ou mesmo as peças de dominó.

Geometricamente, o par ordenado representa um ponto do sistema de *eixos cartesianos*. Este sistema é composto por um par de retas perpendiculares. A reta horizontal é chamada de eixo x, eixo das abscissas ou Ox. A reta vertical é o eixo y, eixo das ordenadas ou Oy. A origem do sistema cartesiano é o ponto O, que tem abscissa e ordenada zero. Os eixos x e y dividem o plano em quadrantes numerados conforme mostra a figura:



No exemplo, o ponto P é representado pelo par ordenado  $(m,n)$ , portanto as *coordenadas* de P são  $(m,n)$ , ou ainda, a abscissa de P é m e sua ordenada é n. Da mesma forma, qualquer ponto do plano cartesiano está associado a um único par ordenado.

$P(m, n)$   
abscissa ———— ordenada



Dizemos que dois pares ordenados são iguais se possuírem abscissas e ordenadas iguais:  $(a, b) = (r, s) \Rightarrow a = r \text{ e } b = s$

Consideremos os conjuntos:  $A = \{0, 3, 5\}$ ,  $B = \{1, 7\}$

Chama-se produto cartesiano de A por B ( $A \times B$ ) ao conjunto de pares ordenados onde as abscissas são pontos de A e as ordenadas são pontos de B:  $A \times B = \{(0, 1), (0, 7), (3, 1), (3, 7), (5, 1), (5, 7)\}$

Analogamente, podemos obter  $B \times A$ :  $B \times A = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (7, 0), (7, 3), (7, 5)\}$

$$A \times B \neq B \times A$$

Observe que A tem 3 elementos, B tem 2 elementos, e  $A \times B$  e  $B \times A$  têm 6 elementos. De forma geral, para dois conjuntos quaisquer vale:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

onde  $n(A \times B)$  é o número de elementos de  $A \times B$ ,  $n(A)$  é o número de elementos de A e  $n(B)$  é o número de elementos de B.

### Exercícios resolvidos

1. Localizar no plano cartesiano os pontos  $(1, 0)$ ,

$(-2, 4)$ ,  $(-3, 1)$ ,  $(3, -1)$  e  $(0, -2)$ . *Resolução:*

2) Sendo  $A = \{-2, 0, 1\}$  e  $B = \{1, 3, 4\}$  determine  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A \times A$  e  $B \times B$ .

*Resolução:*  $A \times B = \{(-2, 1), (-2, 3), (-2, 4), (0, 1), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (1, 4)\}$

$B \times A = \{(1, -2), (1, 0), (1, 1), (3, -2), (3, 0), (3, 1), (4, -2), (4, 0), (4, 1)\}$

$A \times A = \{(-2, -2), (-2, 0), (-2, 1), (0, -2), (0, 0), (0, 1), (1, -2), (1, 0), (1, 1)\}$

$B \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$

3. O conjunto  $A \times B$  tem 21 elementos, A tem 3 elementos. Quantos elementos possui B?

*Resolução:*  $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) \Rightarrow 21 = 3 \cdot n(B) \Rightarrow n(B) = 7$

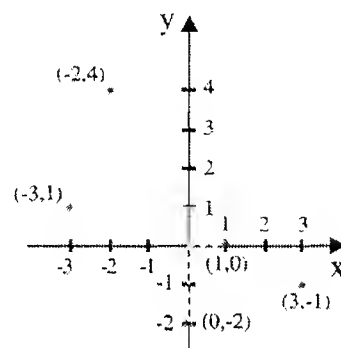
O conjunto B tem 7 elementos.

4. Determine a e b para que:  $(a + 1, 2b + 3) = (0, 12)$

*Resolução:* Como os pares ordenados são iguais temos que:

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$2b + 3 = 12 \Rightarrow 2b = 12 - 3 \Rightarrow 2b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{2}$$



### Exercícios propostos:

1. Localizar no plano cartesiano os pontos A  $(3, 4)$ , B  $(-1, 5)$ , C  $(0, 4)$ , D  $(-3, 0)$ , E  $(1, 3)$  e F  $(-2, -1)$ .

**2.** Determine  $x$  e  $y$  para que:

a)  $(x + 1, 3) = (4, 2y - 1)$       b)  $(3x, 2y + 5) = (12, 15)$

**3.** (Cesgranrio-RJ) Seja  $F = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $G = \{3, 4, 7\}$ . Determine o número de elementos de  $F \times G$ .

**4.** (Cesgranrio-RJ) Sendo  $A = \{1, 3\}$  e  $B = \{2, 4\}$ , obter  $A \times B$ .

**3. Relação** Consideramos *relação* de  $A$  em  $B$  todo subconjunto de  $A \times B$  que obedece a uma lei de formação.

Exemplo: considere os conjuntos  $A = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{0, 1, 2\}$ , então:  $A \times B = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$

Vamos determinar o conjunto  $R \subset A \times B$  tal que  $x < y$ , onde  $x$  é abscissa e  $y$  é ordenada:  $R = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2)\}$

**4. Noção intuitiva de função** Em nosso dia-a-dia há diversas relações entre grandezas diferentes, por exemplo: a conta de luz a pagar está relacionada com a quantidade de energia elétrica consumida; o mesmo acontece com a água, o telefone, o gás etc. Observemos os exemplos a seguir:

a) Numa avícola a dúzia de ovos grandes é vendida a R\$ 2,00. A partir deste dado, façamos uma tabela:

Dúzias	1	2	3	4	5	6
Total a pagar	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00

Seja  $x$  o número de dúzias e  $y$  o total a pagar. Podemos extrair a seguinte fórmula:  $y = 2x$

Neste caso dizemos que  $y$  é uma função de  $x$ , pois para cada valor atribuído a  $x$  teremos um único correspondente  $y$ , e existe uma fórmula que expressa a relação entre  $x$  e  $y$ .

Tempo (horas)	Número de Bactérias ( $\text{mm}^3$ )
0	500
1	1.000
2	1.800
3	2.100
4	2.500
5	2.800
6	3.000
7	3.000
8	3.000

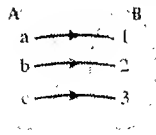
b) Num laboratório, observou-se o desenvolvimento de uma determinada bactéria durante 8 horas. Os resultados foram tabelados, conforme mostra a figura.

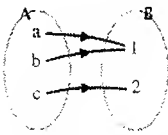
Observe que, a partir da 6ª hora, o desenvolvimento da bactéria permanece constante. Se fixarmos a quantidade de 3.000 bactérias, temos

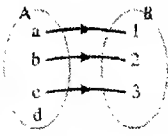
6, 7, e 8 horas associadas a este número, então *o tempo não é uma função da quantidade de bactérias*. Porém, se encontrarmos uma lei de formação, poderemos dizer que *o número de bactérias é uma função do tempo*.

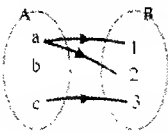
Dessas observações concluímos que função matemática é a relação de A em B em que, para *todo*  $x$  em A temos *um único*  $y$  em B, onde  $x$  e  $y$  obedecem a uma lei de formação.

Nos diagramas a seguir, identificamos algumas funções:

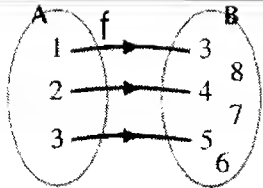
 a) *é função*, pois cada elemento de A está associado a um único em B e não sobram elementos em A.

 c) *é função*, pois todos os elementos de A estão associados a algum elemento de B.

 b) *não é função*, pois  $d \in A$  não está associado a nenhum elemento em B.

 d) *não é função*, pois  $a \in A$  está associado a dois elementos distintos em B.

## 5. Domínio. Contradomínio. Imagem de uma função

a)  *Domínio* da função é o conjunto de valores que podem ser atribuídos a  $x$ . No diagrama, o domínio é o conjunto A e representa-se:  $D = A = \{1, 2, 3\}$

b) *Contradomínio* é o conjunto onde estão os valores correspondentes a  $x$  quando aplicamos a fórmula definida pela função  $f$ . No exemplo:  $CD = B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Sendo  $f$  uma função de domínio A e contradomínio B, representamos esta relação como:  **$f: A \rightarrow B$ , lê-se  $f$  de A em B**

$f(x) = x + 2$ , lê-se  $f$  de  $x$  é igual a  $x$  mais 2

c) *Imagem* é o conjunto de valores obtidos da aplicação da fórmula da função  $f$ . Assim, em  $f: A \rightarrow B$ ,  $Im = \{3, 4, 5\}$

Os elementos do conjunto imagem podem ser representados por  $y$  ou  $f(x)$ . Dizemos, por exemplo, que o *valor numérico* da função quando  $x = 1$  é 3, ou que a imagem de 1 é 3, ou se  $x = 1$  então  $y = 3$ .

**6. Determinação do domínio de uma função** Para determinar o domínio, no estudo de funções, é necessário saber em que conjunto procurar a *variável*  $x$ . Por exemplo: em  $f(x) = 2x + 3$ , os valores que podem ser atribuídos a  $x$  são infinitos. Assim,  $D = \mathbb{R}$ .

✓ Em  $f(x) = x^2 - 4$ , novamente  $x$  pode assumir qualquer valor numérico, portanto:  $D = \mathbb{R}$

✓ Mas, em  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ , devemos reparar que  $x - 3$  é denominador de uma fração, cuja condição de existência exige que o denominador seja diferente de zero. Assim,

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \therefore D = \mathbb{R} - \{3\}$$

✓  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ . O denominador deve ser diferente de zero:

$$x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3 \quad D = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

✓  $f(x) = \sqrt{x - 5}$ . Para determinar o domínio desta função, vamos considerar alguns exemplos numéricos:

$$\sqrt{4} = 2 \quad \text{índice } 2 \quad \text{radicando } 4$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \text{índice } 3 \quad \text{radicando } -27$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \quad \text{índice } 4 \quad \text{radicando } 16$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{índice } 3 \quad \text{radicando } 8$$

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{-2^5} = -2 \quad \text{índice } 5 \quad \text{radicando } -32$$

Lembre-se que extraímos a raiz de números negativos se o índice for um número ímpar. Quando o índice é um número par então o radicando deve ser positivo ou zero.

Na função  $f(x) = \sqrt{x - 5}$ , o índice é 2, para ser possível o radicando deve ser positivo ou zero:

$$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$$

✓  $f(x) = \sqrt{2x + 8}$

$$2x + 8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -8 \Rightarrow x \geq -4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$$

✓  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 10}}$ . Neste exemplo, a raiz está no denominador, então o radicando deve ser estritamente positivo, ou seja, não deve ser zero:

$$2x - 10 > 0 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

✓  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ . Devemos ter, simultaneamente:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \text{ e } x \neq 0 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \neq 0\}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dada a função  $f(x) = x^2 + 1$ , determine:  $A = f(0) + f(1) - 3f(2)$ .

Resolução:  $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ ,  $f(1) = 1^2 + 1 = 2$  e  $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$$A = 1 + 2 - 3 \cdot 5 = 3 - 15 \Rightarrow A = -12$$

2. Dada a função  $f(x) = \frac{3x}{x+5}$ , determine:

a) o domínio de  $f$ ; b)  $f(0)$ ; c) o valor de  $x$  quando a imagem de  $x$  for 1.

*Resolução:* a)  $x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$

$$b) f(0) = \frac{3(0)}{0+5} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$c) \text{ queremos } x \mid f(x) = 1$$

$$\frac{3x}{x+5} = 1 \Rightarrow 3x = x+5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

3. Determine o domínio de  $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{2x-1}$

*Resolução:*  $1+x \geq 0$  e  $2x-1 \geq 0$

$$x \geq -1 \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Na reta real podemos determinar a intersecção dos conjuntos encontrados:



### ⇒ Exercícios propostos:

5. Determine o domínio das funções:

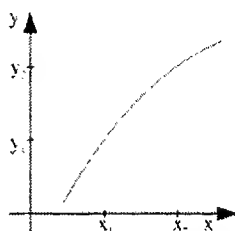
a)  $f(x) = \frac{x+1}{2x-6}$  b)  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  c)  $f(x) = \frac{x}{x-9}$

d)  $f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$  e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

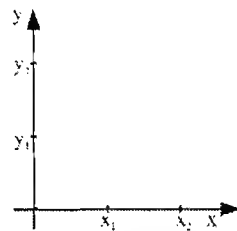
6. Seja  $f(x) = x^2 - 3x$ . Determine  $A = f(3) - 2 \cdot f(1) + f(2)$

**7. Gráficos** Analisando gráficos, é possível identificar funções.

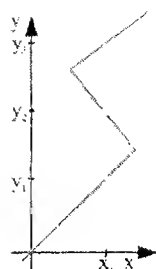
Veja os exemplos:



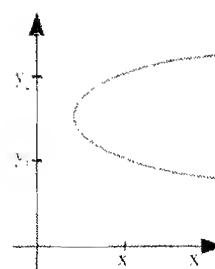
é função, pois para cada valor  $x$  temos um único  $y$  associado:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$



é função, pois para cada valor  $x$  temos um único  $y$  associado:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$



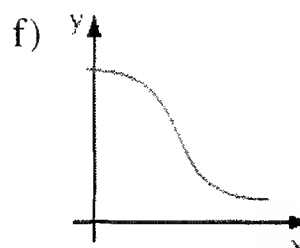
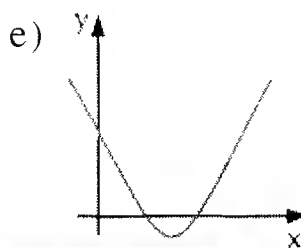
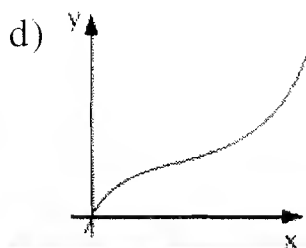
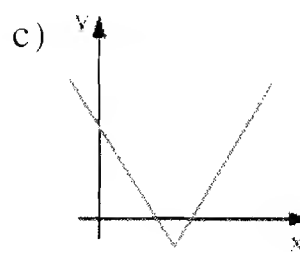
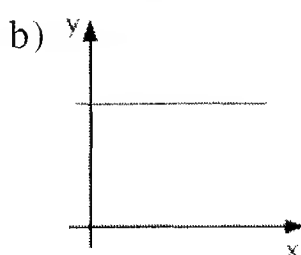
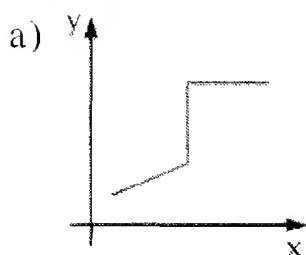
não é função, pois para o mesmo valor  $x$  temos três valores diferentes de  $y$ .



não é função, pois para o mesmo valor  $x$  temos dois valores diferentes de  $y$ .

### Exercício proposto:

7. Dos gráficos abaixo, quais representam funções?



### 8. Função par e função ímpar

Considere a função:  $f(x) = x^2 + 2$   
Vamos calcular o valor numérico de  $f$  para  $x = 3$ ,  $x = -3$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$  e  $x = -1$

$$\begin{array}{lcl} f(3) = 3^2 + 2 = 11 & & \\ f(-3) = (-3)^2 + 2 = 11 & \longrightarrow & f(3) = f(-3) \\ f(2) = 2^2 + 2 = 6 & & \\ f(-2) = (-2)^2 + 2 = 6 & \longrightarrow & f(2) = f(-2) \\ f(1) = 1^2 + 2 = 3 & & \\ f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3 & \longrightarrow & f(1) = f(-1) \end{array}$$

Note que para qualquer número real  $x$ , temos que  $f(x) = f(-x)$ , neste caso dizemos que a função é par.

$$\boxed{\text{Função par: } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)}$$

Vejamos outro exemplo,  $f(x) = 5x$ . Vamos calcular o valor numérico de  $f$  para  $x = 3$ ,  $x = -3$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$  e  $x = -1$ .

$$\begin{array}{rcl}
 f(3) = 5 \cdot 3 = 15 & & \\
 f(-3) = 5 \cdot (-3) = -15 & \longrightarrow & f(-3) = -f(3) \\
 f(2) = 5 \cdot 2 = 10 & & \\
 f(-2) = 5 \cdot (-2) = -10 & \longrightarrow & f(-2) = -f(2) \\
 f(1) = 5 \cdot 1 = 5 & & \\
 f(-1) = 5 \cdot (-1) = -5 & \longrightarrow & f(-1) = -f(1)
 \end{array}$$

Para qualquer real  $x$ , temos que  $f(-x) = -f(x)$ , neste caso dizemos que a função é ímpar.

**Função ímpar:**  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$

### Exercícios resolvidos:

1. Verificar se cada função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par ou ímpar.

a)  $f(x) = 2x^2$

*Resolução:* Vamos calcular  $f(1)$  e  $f(-1)$ .

$f(1) = 2(1)^2 = 2$  e  $f(-1) = 2(-1)^2 = 2$ , como  $f(1) = f(-1)$  a função é par.

b)  $f(x) = 2x + 1$

*Resolução:*  $f(1) = 2 \cdot (1) + 1 = 3$  e  $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$ , neste caso a função não é par e não é ímpar.

c)  $f(x) = 3x$

*Resolução:*  $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$  e  $f(-1) = 3 \cdot (-1) = -3$ , como  $f(-1) = -f(1)$  a função é ímpar.

### Exercício proposto:

8. Verificar se cada função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par ou ímpar.

a)  $f(x) = 3x^2$

d)  $f(x) = \frac{x}{2}$

g)  $f(x) = x^2 - 2$

b)  $f(x) = x^4 + x^2$

e)  $f(x) = \frac{x^2}{2}$

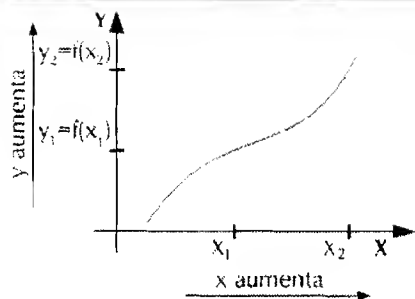
h)  $f(x) = \frac{1}{x}$

c)  $f(x) = x^3$

f)  $f(x) = x - 1$

i)  $f(x) = 4x + 2$

### 9. Função crescente e função decrescente Observe o gráfico:

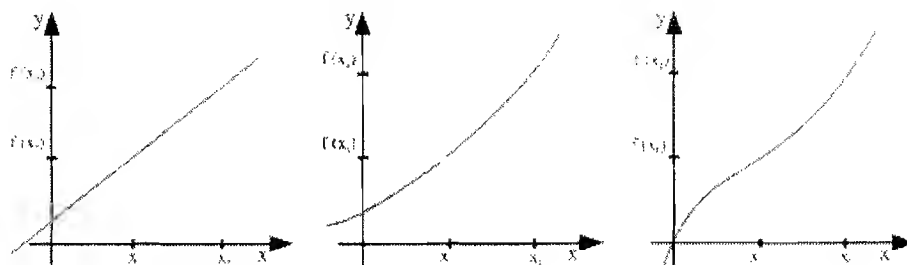


Note que aumentando o valor de  $x$ , o valor de  $y$  também aumenta. As funções que possuem esta característica são chamadas de crescentes.

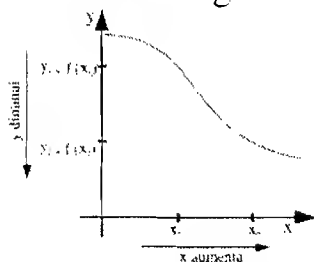
**Função crescente:**  $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$



Exemplos gráficos de funções crescentes:



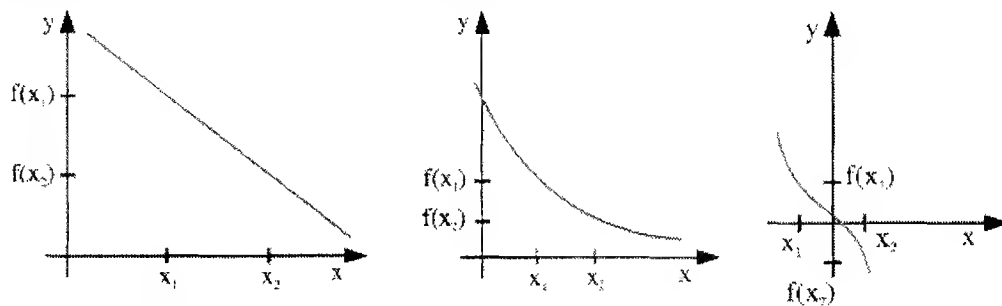
Observe o gráfico a seguir:



Note que aumentando o valor de  $x$ , o valor de  $y$  está diminuindo. Este tipo de função é chamada de decrescente.

Função decrescente:  $\forall x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ .

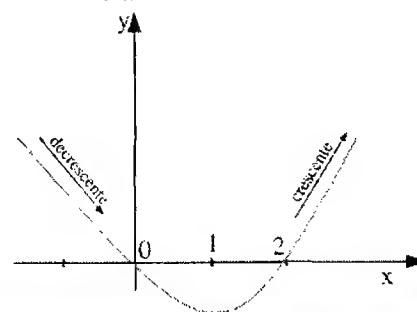
Exemplos gráficos de funções decrescentes:



Algumas funções são crescentes e decrescentes em intervalos diferentes.

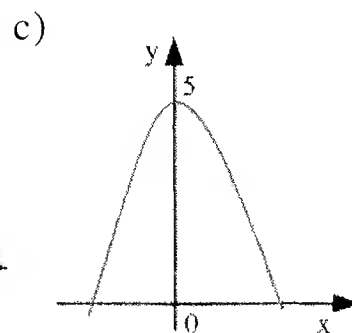
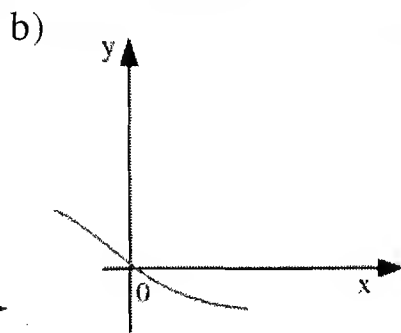
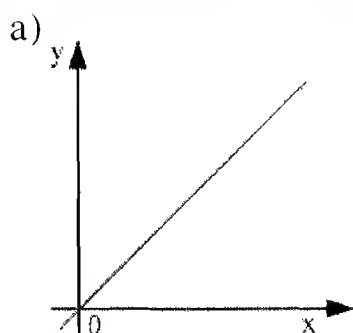
Observe o gráfico ao lado.

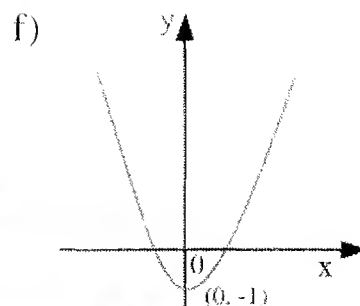
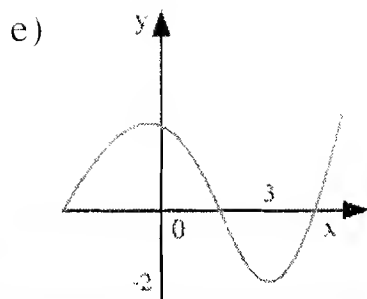
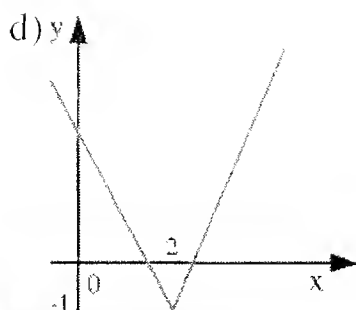
Esta função é decrescente para  $x < 1$  e crescente para  $x \geq 1$ .



### ⇒ Exercício proposto:

9. Escrever para quais intervalos a função é crescente ou decrescente, nos seguintes casos:





## 10. Funções sobrejetora, injetora e bijetora

a) **Função sobrejetora:** Uma função é sobrejetora quando seu conjunto imagem é o próprio contradomínio. Em outras palavras, não “sobram” elementos no contradomínio. Considere o exemplo:

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ onde } A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{1, 2, 5, 10\}$$

calculando o valor numérico de  $f$  para  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $x = 3$ , temos:

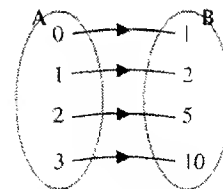
$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

Façamos um diagrama para analisar melhor a situação:

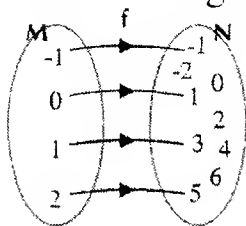


Todos os elementos de  $B$  possuem um correspondente em  $A$  (não “sobram” elementos em  $B$ ), o conjunto imagem é, portanto, o próprio contradomínio da função. Neste caso a função é *sobrejetora*.

Considere, agora, a função  $f: M \rightarrow N$ ,  $M = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $N = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$f(x) = 2x + 1$$

Calculando o valor numérico de  $f$  para os elementos do conjunto  $M$ , teremos o diagrama:

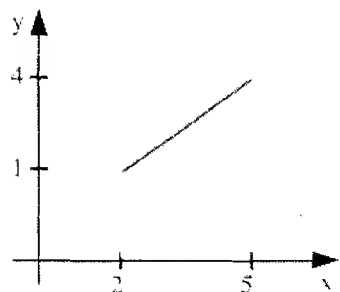


O conjunto imagem é

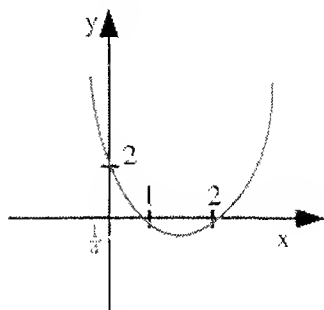
$\text{Im} = \{-1, 1, 3, 5\}$  e, portanto, não coincide com o contradomínio, a função não é sobrejetora.

Graficamente podemos verificar se as funções são ou não sobrejetoras:

O domínio é  $[2; 5]$ , o contradomínio  $[1; 4]$ . Assim, verificamos que todo  $x$  entre 2 e 5 tem um correspondente  $y$  entre 1 e 4, então o conjunto imagem é igual ao contradomínio e, neste caso a função é sobrejetora.



Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . O gráfico de  $f$  é:

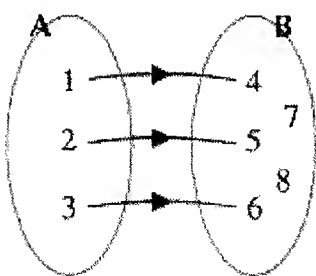


Todo  $x$  real tem um correspondente  $y$ , tal que  $y \geq -\frac{1}{4}$ , o conjunto imagem é  $\text{Im} = [-\frac{1}{4}, +\infty[$ , porém o contradomínio é  $\mathbb{R}$ , neste caso a função é sobrejetora.

**b) Função injetora:** Uma função é injetora se para cada dois elementos distintos do domínio temos duas imagens diferentes no contradomínio:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Os diagramas abaixo expressam duas funções:

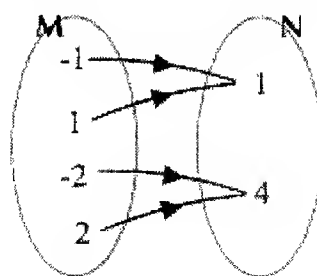
a) a função é injetora



$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(1) \neq f(2)$$

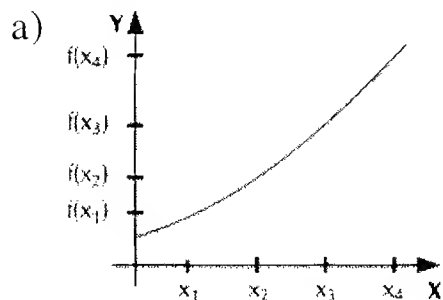
b) a função não é injetora



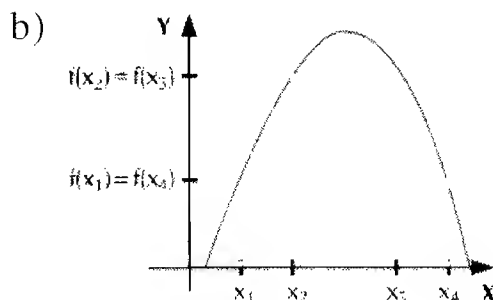
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$f(1) = f(-1)$$

Graficamente, para reconhecer se uma função é injetora, *traçamos retas paralelas ao eixo  $x$* . Se cada paralela tiver no máximo um ponto de intersecção com a curva, a função será injetora, e se alguma paralela tiver mais do que uma intersecção com a curva a função não será injetora. Observe os exemplos:

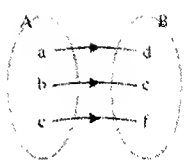


é injetora

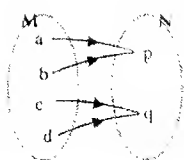


não é injetora

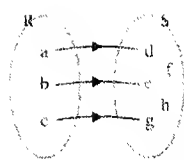
**c) Função bijetora:** As funções que são, simultaneamente, sobrejetoras e injetoras são denominadas funções bijetoras. Portanto, elementos distintos do domínio possuem imagens diferentes, e o contradomínio e o conjunto imagem são iguais. Observe os diagramas:



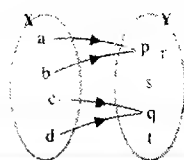
a) a função é bijetora.



b) não é bijetora porque existem elementos diferentes do domínio que possuem a mesma imagem (não é injetora).



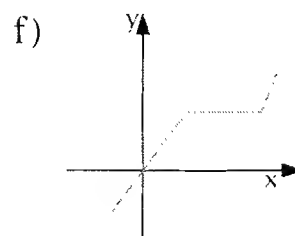
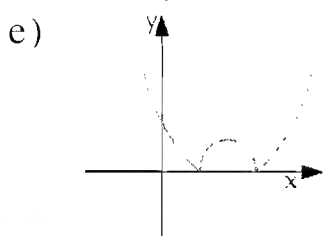
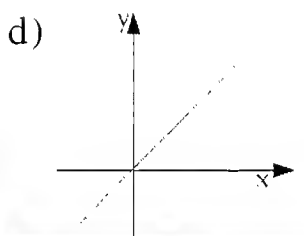
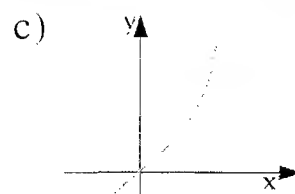
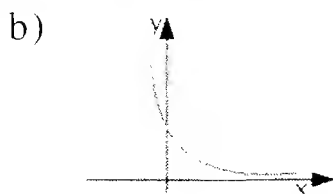
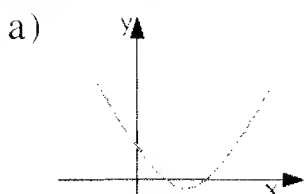
c) não é bijetora porque o conjunto imagem e o contradomínio são diferentes, ou seja, "sobram" elementos no contradomínio (não é sobrejetora).



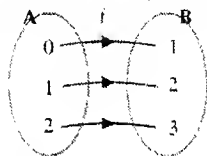
d) não é bijetora, pois não é injetora e não é sobrejetora.

### ⇒ Exercício proposto:

10. Nos gráficos a seguir, indique se cada função é sobrejetora, injetora ou bijetora, considere o domínio  $\mathbb{R}$  e o contradomínio  $\mathbb{R}$ .



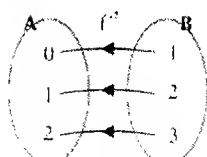
11. **Função inversa** Toda função bijetora possui, a sua inversa, ou seja, se  $f$  é uma aplicação de  $A$  em  $B$ , sua inversa será a aplicação de  $B$  em  $A$ , conforme mostra o diagrama:



$f : A \rightarrow B$

conforme o diagrama concluímos que:

$f(0) = 1; f(1) = 2; f(2) = 3$



a função inversa de  $f$  será indicada por

$f^{-1} : B \rightarrow A$

$f(1) = 0; f(2) = 1; f(3) = 2$

Note que pela função  $f$  o número 2 em  $A$  é levado ao número 3 em  $B$ , pela função inversa  $f^{-1}$  o número 3 em  $B$  é levado ao número 2 em  $A$ , portanto o que a  $f$  "faz", a  $f^{-1}$  "desfaz".

Os pares ordenados de  $f$  são  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  e  $(2, 3)$  e os de  $f^{-1}$  são  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(3, 2)$ , as abscissas de  $f$  são as ordenadas de  $f^{-1}$ , e as ordenadas de

$f$  são as abscissas de  $f^{-1}$ . Intuitivamente, deduzimos que para determinar a função inversa basta substituir a abscissa  $x$  pela ordenada  $y$ . Observe:

$$f : A \rightarrow B$$

$$f(x) = x + 1 \text{ ou } y = x + 1$$

$$\text{substituímos } x \text{ por } y \text{ e } y \text{ por } x: x = y + 1$$

$$\text{isolamos } y: y = x - 1$$

$$\text{portanto, a função inversa de } f \text{ é: } f^{-1}(x) = x - 1$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a função inversa de  $f(x) = 6x + 2$  definida de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Resolução:*  $f$  é função bijetora, portanto admite inversa.

$$y = 6x + 2$$

$$\text{substituímos } x \text{ por } y \text{ e } y \text{ por } x: x = 6y + 2$$

$$\text{isolamos } y: 6y = x - 2$$

$$y = \frac{x - 2}{6} = \frac{x}{6} - \frac{2}{6} = \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$$

2. Determinar a função inversa de  $f(x) = x^3 - 1$  bijetora definida de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Resolução:*  $y = x^3 - 1$ , substituímos  $x$  por  $y$ ,  $y$  por  $x$  e, a seguir, isolamos  $y$ :  $x = y^3 - 1 \Rightarrow y^3 = x + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x + 1} \therefore f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

3. Determine a função inversa da bijetora  $y = \frac{x - 1}{2x}$ .

*Resolução:* substituímos  $x$  por  $y$ ,  $y$  por  $x$  e isolamos  $y$ :

$$x = \frac{y - 1}{2y} \Rightarrow 2xy = y - 1 \Rightarrow 2xy - y = -1 \Rightarrow y(2x - 1) = -1$$

$$y = -\frac{1}{2x - 1} \therefore f^{-1}(x) = -\frac{1}{2x - 1}$$

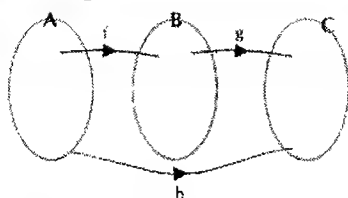
### Exercício proposto:

11. Para cada função bijetora, determine o domínio de  $f$  e sua inversa:

a)  $f(x) = 5x - 1$ ; b)  $f(x) = \frac{2x}{x - 1}$ ; c)  $f(x) = \frac{2x - 1}{3}$ ; d)  $f(x) = x + 3$

e)  $f(x) = x^3 - 4$ ; f)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; g)  $f(x) = \frac{2x}{1 - x}$ ; h)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

**12. Função composta** Considere duas funções  $f$  e  $g$  tal que  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ , conforme o diagrama:



Queremos determinar uma única função  $h : A \rightarrow C$  que realize as mesmas operações que  $f$  e  $g$ . Esta função deve levar um elemento do conjunto  $A$  diretamente para  $C$ , sem passar por  $B$ . A função  $h$ , assim determinada, será chamada de *função composta*.

$$\text{Notação: } h(x) = \text{gof}(x) = g(f(x))$$

Tecnicamente, para determinar a função composta  $g(f(x))$ , devemos, na função  $g$ , substituir  $x$  pela função  $f(x)$  e resolver as operações necessárias.

### **Exercícios resolvidos:**

1. Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = x + 1$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $g(x) = 2x$  determinar  $h(x) = \text{gof}(x)$

**Resolução:** Queremos determinar  $h(x) = \text{gof}(x) = g(f(x))$ , portanto na função  $g$  substituímos  $x$  pela função  $f(x)$ :

$$g(x) = 2 \cdot x \Rightarrow g(f(x)) = 2 \cdot f(x) \Rightarrow g(f(x)) = 2 \cdot (x + 1)$$

$$g(f(x)) = 2x + 2 \Rightarrow \boxed{h(x) = g(f(x)) = 2x + 2}$$

2. Dadas as funções definidas de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:  $f(x) = x^3 + 1$  e  $g(x) = \frac{x}{2}$ , determine: a)  $\text{fog}(x)$ ; b)  $\text{gof}(x)$ ; c)  $(\text{gof})^{-1}(x)$ .

**Resolução:** a)  $\text{fog}(x) = f(g(x)) \Rightarrow f(x) = x^3 + 1$

$$f(g(x)) = (g(x))^3 + 1 \Rightarrow f(g(x)) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 1 \Rightarrow \boxed{f(g(x)) = \frac{x^3}{8} + 1}$$

$$\text{b) } \text{gof}(x) = g(f(x)) \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{x^3 + 1}{2} \Rightarrow \text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{x^3 + 1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{x^3 + 1}{2}}$$

c) Para determinar  $(\text{gof})^{-1}(x)$ , substituímos  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x$ :

$$x = \frac{y^3 + 1}{2}; \text{ isolamos } y: 2x = y^3 + 1 \Rightarrow y^3 = 2x - 1$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{2x - 1} \therefore (\text{gof})^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x - 1}}$$

## ⇒ Exercício proposto:

**12.** Dadas as funções definidas de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $f(x) = 5x$ ,  $g(x) = \frac{x}{3} + 1$  e  $h(x) = x^2 + 1$ , determine: a)  $f \circ g(x)$ ; b)  $f \circ h(x)$ ; c)  $g \circ h(x)$ ; d)  $g \circ f(x)$ ; e)  $h \circ f(x)$ ; f)  $h \circ g(x)$ .

## ⇒ Exercícios complementares:

**13.** (UE Londrina-PR) Considere os conjuntos A e B tais que  $A \times B = \{(-1; 0), (2; 0), (-1; 2), (2; 2), (-1; 3), (2; 3)\}$

O número de elementos de  $A \cap B$  é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

**14.** (UFES) Se  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 2, 4, 5\}$  então o número de elementos distintos do conjunto  $(A \times B) \cup (B \times A)$  é:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 20 e) 24

**15.** (UFAM) Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e a relação  $R: A \rightarrow A$  definida por:  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Então, podemos afirmar que:

I) o domínio de R é  $\{1, 2\}$

II) o contradomínio de R é  $\{2, 3\}$

III)  $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

IV) a relação R é uma função

a) As quatro afirmativas são verdadeiras.

b) Somente as três primeiras são verdadeiras.

c) Somente a IV é verdadeira.

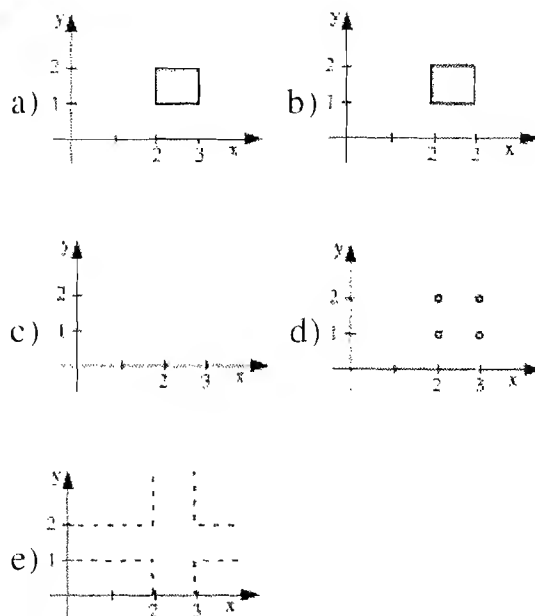
d) As quatro afirmativas são falsas.

**16.** (UFSE)

Se  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$  e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ ,

a figura que melhor representa o conjunto  $A \times B$  é:



**17.** (Fuvest-SP) Uma função  $f$  de variável real satisfaz a condição  $f(x + 1) = f(x) + f(1)$ , qualquer que seja o valor da variável  $x$ . Sabendo-se que  $f(2) = 1$ , podemos concluir que  $f(5)$  é igual a:

a)  $\frac{1}{2}$  b) 1 c)  $\frac{5}{2}$  d) 5 e) 10

**18.** (UFRR) Se  $f$  é uma função tal que  $f(1) = 3$  e  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para todos  $x$  e  $y$  reais, então  $f(3)$  vale:

a) 8 b) 6 c) 9 d) 10 e) 7

**19.** (UEPB) Sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que

$f(2x - 1) = 3x^2 - x + 25$  e

$g(x - 1) = 2x + 3$ ,

calcular o valor de  $f(g(-1))$ .

**20.** (Fatec-SP) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$\text{por } f(x) = \frac{x^2 + 6}{4},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; se  $f(m) = f(m-4)$ , então:

- a)  $m = -1$  b)  $m = 1$  c)  $m = 4$   
d)  $m = 2$  e)  $m = -4$

**21.** (UFSC) Dadas as funções:

$$f(x) = 3x + 5, g(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ e}$$

$$h(x) = 7 - x, \text{ o valor em módulo}$$

da expressão  $\frac{4[h(\frac{1}{2}) - g(4)]}{f(-1)}$  é:

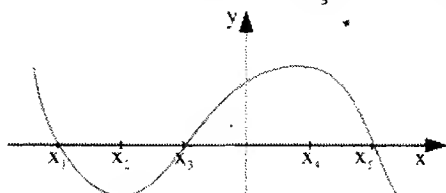
**22.** (UFPI) Dada uma função  $f$  tal que  $f(x) = 1 - 2^x$ , então a alternativa correta é:

a)  $f(0) \cdot f(1) = 1$  d)  $f(1) \cdot f(0) = 0$

b)  $f(\frac{1}{2}) \cdot f(1) = 2$  e)  $f(0) = 1$

c)  $f(1) = |f(1)|$

**23.** (FGV-SP) Seja uma função  $y = f(x)$ , cujo gráfico está representado abaixo. Assinale a afirmação correta.



- a)  $f(0) = 0$   
b)  $f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$   
c)  $f$  é crescente no intervalo  $]x_3, x_5[$   
d)  $f$  é decrescente no intervalo  $]x_3, x_5[$

e)  $f(x_2) = f(x_4) = 0$

**24.** (PUC-SP) O domínio da relação:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{4 - x^2} \right\} \text{ é:}$$

- a)  $\mathbb{R}_+$  b)  $\mathbb{R}^*$  c)  $\mathbb{R}$  d)  $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 2\}$

- e)  $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq \pm 2\}$

**25.** (UFMS) Sendo a função

$$f(x) = \frac{34x^3 + 4}{10 - 7x^3} \text{ com } x \neq \sqrt[3]{\frac{10}{7}},$$

determine o valor da  $f^{-1}(-6)$ .

**26.** (UFMG) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(3x + 1) = 1 - x$ . Então  $f(a)$  é:

a)  $1 - a$  b)  $3a + 1$  c)  $-3a$

d)  $\frac{4 - a}{3}$  e)  $4 - 3a$

**27.** (Mack-SP) Se  $y = f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$ , então determine a função inversa  $f^{-1}$ .

**28.** (UFPI) Se  $f$  é uma função real tal que  $f(3x + 1) = x$ , então:

a)  $f(x) = 3x - 1$  d)  $f(x + 1) = \frac{x}{3}$

b)  $f(f(x)) = \frac{x}{3} - 1$  e)  $f(1) = 1$

c)  $f(x) = \frac{x}{3}$

**29.** (Santa Casa-SP) Se  $f^{-1}$  é a função inversa da função  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 3x - 2$ , então  $f^{-1}(-1)$  é igual a:

a)  $-1$  b)  $-\frac{1}{3}$  c)  $-\frac{1}{5}$  d)  $\frac{1}{5}$  e)  $\frac{1}{3}$

**30.** (UFCE) Seja  $P$  o conjunto dos números naturais primos enumerados em ordem crescente e  $\mathbb{N}^*$  o conjunto dos inteiros positivos. Defina a função  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  em  $P$  pondo  $f(n)$  igual ao  $n$ -ésimo número primo de  $P$ . Sobre  $f$  e sua inversa  $f^{-1}$ , podemos afirmar:

a)  $f^{-1}(11) < f^{-1}(7)$

b)  $f^{-1}(3) + f^{-1}(5)$  é um elemento de  $P$

c)  $f^{-1}(7)$  é um elemento de  $P$

d)  $f^{-1}(13) = 5$

e)  $f(7) \cdot f(1) = 17$



**31.** (PUC-SP) Qual das funções abaixo é função par?

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       d)  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 b)  $f(x) = x$       e)  $f(x) = \sin x$   
 c)  $f(x) = x^5$

**32.** (UFPA) Dada a função  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ , o valor de  $f(f(2))$ , é:

- a)  $\frac{1}{4}$    b)  $\frac{1}{2}$    c) 2   d) 4   e) -4

**33.** (UFES) Se  $f(x) = x^3 + 1$  e  $g(f(x)) = x$ , então:

- a)  $g(x) = \frac{x}{x^3+1}$   
 b)  $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$   
 c)  $g(x) = x^3 + 1$   
 d)  $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$   
 e)  $g(x) = x^3 - 1$

**34.** (PUC-SP) Se  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = 3x^2$ , calcule a função composta  $g \circ f(x)$ .

**35.** (UFMS) Se  $f(x) = 5x + 1$  e  $h(x) = 4x + 1$ , então o valor numérico de  $h(f(5)) - f(h(2))$  é:

**36.** (UFAL) Sejam  $f$  e  $g$  funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definidas por  $f(x) = kx + 5$  e  $g(x) = x - 3$ . Para que se tenha  $g \circ f = f \circ g$  é necessário que o número real  $k$  seja igual a:

- a) -3   b) -2   c) -1   d) 0   e) 1

**37.** (Itajubá-MG) Sendo  $f(x) = \frac{2}{1-x}$

e  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ , ache o domínio de  $f(g(x))$ .

**38.** (UFAM) Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções definidas por  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  e  $g(x) = 2x - 3$ . Estabeleça a forma que define a função  $(f \circ g)(x)$ :

- a)  $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$   
 b)  $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 6x - 1$   
 c)  $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 4x + 3$   
 d)  $(f \circ g)(x) = 5x^2 - 6x + 8$

**39.** (UFPI) Sejam  $f$  e  $g$  funções reais definidas por  $f(x) = x^2 - 1$  e  $g(x) = x + 1$ .

Então  $f(g(x)) - g(f(x))$  é igual a:

- a)  $x$    b)  $x^2$    c)  $-2x$    d)  $2x$    e)  $x^2 + 2x$

**40.** (UFMG) Seja  $b$  um número positivo. Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}b & \text{se } x < b \\ x^2 - 3 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Se  $f\left(f\left(\frac{b}{2}\right)\right) = 97$ , o valor de  $b$  é:

- a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) 5

**41.** (UFPA) Se  $f(x+2) = \frac{2x-1}{x+3}$ ,  $x \neq -3$ , o domínio de  $f(x)$  é:

- a)  $\mathbb{R}$   
 b)  $\mathbb{R}^*$   
 c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$   
 d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$   
 e)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

**42.** (UFPB) O domínio da função definida por  $f(x) = \frac{3x}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  é:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$   
 b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$   
 c)  $] -1; 1[$   
 d)  $] -\infty; 1[$   
 e)  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

# Capítulo III

## FUNÇÃO DO 1<sup>o</sup> GRAU

**1. Introdução** Por volta de 2000 a.C., egípcios e babilônios já possuíam métodos para a resolução de equações do 1<sup>o</sup> grau. Entre os egípcios, destacou-se Diofanto de Alexandria, cuja principal obra, *Arithmetica*, procurava a generalização dos métodos a partir de problemas numéricos. Contudo, foi Fibonacci, influenciado pelas técnicas desenvolvidas pelos árabes, quem documentou soluções gerais para a resolução de equações do 1<sup>o</sup> grau em sua obra *Liber Abacci*.

Mas, para facilitar o trabalho com as funções que estudaremos a seguir, vamos recordar alguns importantes conceitos de álgebra.

### 2. Produtos notáveis

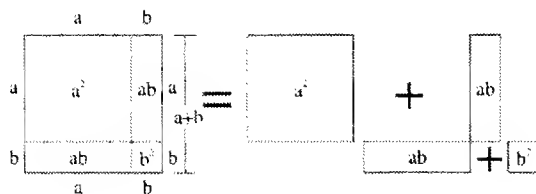
**a) Quadrado da soma de dois termos:** Vamos, algebricamente, calcular  $(a + b)^2$  utilizando a definição de potências:\*

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

como  $ab = ba$  temos que  $ab + ba = 2ab$ , então:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Os egípcios chegaram ao mesmo resultado utilizando métodos geométricos, calculando a área de um quadrado de lado  $a + b$ :



\*Para relembrar as propriedades das potências, veja o capítulo 6.

Área do quadrado:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) **Quadrado da diferença de dois termos:** Da mesma forma,  $(a - b)^2$ :

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$$

como  $-ab - ba = -2ab$ , temos:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) **Produto da soma pela diferença de dois termos:** Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, vamos calcular:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

d) **Cubo da soma de dois termos:** Utilizando as propriedades de potências, podemos escrever que:  $(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2$

desenvolvemos  $(a + b)^2$ , e aplicamos a propriedade distributiva:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

e) **Cubo da diferença de dois termos:** O processo algébrico é idêntico ao processo utilizado para o cubo da soma:

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b)^2$$

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

**3. Fatoração** O processo de fatoração consiste em transformar uma expressão algébrica em produto. Em aritmética esta operação é bastante simples, por exemplo:

$$\bullet \text{ fatorar o número } 120 \Rightarrow 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\bullet \text{ fatorar o número } 250 \Rightarrow 250 = 2 \cdot 5^3$$

Observe, nos exemplos a seguir, as expressões algébricas fatoradas:

$$2x^2 + 16xy = 2x \cdot (x + 8y)$$

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3) \cdot (x + 3) = (x + 3)^2$$

Note que, se aplicarmos a propriedade distributiva ao 2º membro, obtemos a expressão do 1º membro.

Para fatorar expressões algébricas, a análise deve ser feita tendo em vista os seguintes casos:

**a) Fator comum:** Neste caso, devemos observar se cada parcela apresenta um fator comum, que deverá ser colocado em evidência, conforme os exemplos:

$$a.1) 3ax + 9a^2x \rightarrow \text{fator comum } 3ax \Rightarrow 3ax + 9a^2x = 3ax(1 + 3a)$$

Os resultados obtidos dentro dos parênteses são provenientes da divisão de cada parcela pelo fator comum, ou seja:

$$\frac{3ax}{3ax} = 1 \quad \frac{9a^2x}{3ax} = 3a$$

$$a.2) 4a^2x^3 - 8a^4x^2 \rightarrow \text{fator comum } 4a^2x^2$$

$$\frac{4a^2x^3}{4a^2x^2} = x \quad \frac{-8a^4x^2}{4a^2x^2} = -2a^2$$

$$\text{temos, então: } \boxed{4a^2x^3 - 8a^4x^2 = 4a^2x^2(x - 2a^2)}$$

*O fator comum da parte literal são as letras comuns com o menor expoente.*

**b) Agrupamento:** Aqui os fatores comuns aparecem em grupos, observe:

$$a^2x + bx + a^2y + by$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$        $\underbrace{\hspace{2cm}}$   
 x é fator comum      y é fator comum

$$a^2x + bx + a^2y + by = x(a^2 + b) + y(a^2 + b) = (a^2 + b) \cdot (x + y)$$

$\underbrace{\hspace{4cm}}$   
 (a<sup>2</sup> + b) é fator comum

Observe o próximo exemplo:

$$3a + 3b + x^2pa + x^2pb = 3(a + b) + x^2p(a + b) = (a + b) \cdot (3 + x^2p)$$

Note que, se aplicarmos a propriedade distributiva à última igualdade, obteremos a expressão algébrica inicial.

**c) Diferença de dois quadrados:** Nos exemplos seguintes, podemos extrair a raiz quadrada dos dois termos da expressão algébrica e, como se trata de uma diferença, fatoramos utilizando o *produto da soma pela diferença de dois termos*.

$$c.1) x^2 - 16 = (x + 4) \cdot (x - 4)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \\ \sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{16} = 4 \end{array}$$

$$c.2) m^2 - n^2 = (m + n) \cdot (m - n)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \\ \sqrt{m^2} = m \quad \sqrt{n^2} = n \end{array}$$

$$c.3) 4x^2 - 25 = (2x + 5) \cdot (2x - 5)$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \downarrow \\ \sqrt{4x^2} = 2x \quad \sqrt{25} = 5 \end{array}$$

**d) Trinômio quadrado perfeito:** Trinômio quadrado perfeito é a expressão algébrica que, na forma fatorada, representa o *quadrado da soma (ou diferença) de dois termos*. Para identificá-lo, devemos observar se:

1º) dois termos são quadrados;

2º) o terceiro é o dobro do produto das raízes quadradas desses termos.

Exemplos:

$$d.1) x^2 + 6x + 9 \text{ então } \boxed{x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ \sqrt{x^2} = x \quad \quad \sqrt{9} = 3 \\ \swarrow \quad \quad \nwarrow \\ 2 \cdot x \cdot 3 \end{array}$$

$$d.2) y^2 - 10y + 25 \text{ então } \boxed{y^2 - 10y + 25 = (y - 5)^2}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ \sqrt{y^2} = y \quad \quad \sqrt{25} = 5 \\ \swarrow \quad \quad \nwarrow \\ 2 \cdot y \cdot 5 \end{array}$$

$$d.3) m^4x^2 - 18m^2x + 81 \text{ então } \boxed{m^4x^2 - 18m^2x + 81 = (m^2x - 9)^2}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \quad \swarrow \\ \sqrt{m^4x^2} = m^2x \quad \quad \sqrt{81} = 9 \\ \swarrow \quad \quad \nwarrow \\ 2 \cdot m^2x \cdot 9 \end{array}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Fatorar as expressões:

a)  $a^4 + ab^3 - a^3b - b^4$

**Resolução:** Note que os dois primeiros termos têm **a** como fator comum, e os dois últimos têm **b** como fator comum. Colocamos em evidência:  $a^4 + ab^3 - a^3b - b^4 = a(a^3 + b^3) - b(a^3 + b^3) = (a^3 + b^3)(a - b) \Rightarrow (a^3 + b^3)$  é fator comum.

b)  $12m^2n^5p + 8m^2n^2p^3 - 36m^2n^3p^2$

**Resolução:**  $mnp$  é fator comum da parte literal. Colocando em evidência as letras com os menores expoentes, temos então que  $m^2n^2p$  é fator comum. Na parte numérica colocamos em evidência o maior divisor comum entre 12, 8 e 36, que é o número 4.

$$12m^2n^5p + 8m^2n^2p^3 - 36m^2n^3p^2 = 4m^2n^2p(3n^3 + 2p^2 - 9np)$$

c)  $9x^2 + 30x + 25$

**Resolução:** Temos, neste exercício, um trinômio. Verificaremos se o termo do meio é o dobro das raízes quadradas dos outros, assim poderemos compor o quadrado da soma de dois termos.

$$\begin{array}{ccc} 9x^2 + 30x + 25 \\ \downarrow \quad \quad \uparrow \quad \downarrow \\ \sqrt{9x^2} = 3x \quad \quad \sqrt{25} = 5 \\ \searrow 2 \cdot 3x \cdot 5 \swarrow \end{array}$$

$$\therefore 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$$

2. Simplifique: a)  $\frac{mx + nx + m + n}{x^2 - 1}$  **Resolução:** Lembre-se que, para simplificar frações, devemos ter as expressões algébricas fatoradas. Observe que:

→ no numerador podemos fatorar por agrupamento;  
→ no denominador temos uma diferença de dois quadrados.

$$\frac{mx + nx + m + n}{x^2 - 1} = \frac{x(m + n) + (m + n)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{(m + n)(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{m + n}{x - 1}$$

b)  $\frac{a + b}{a^2 - ab} \cdot \frac{a^2b - ab^2}{a^2b - b^3}$  **Resolução:**

$$\begin{aligned} & \frac{a + b}{a^2 - ab} \cdot \frac{a^2b - ab^2}{a^2b - b^3} = \frac{a + b}{a(a - b)} \cdot \frac{ab(a - b)}{b(a^2 - b^2)} = \\ & = \frac{a + b}{a(a - b)} \cdot \frac{ab(a - b)}{b(a - b)(a + b)} = \frac{1}{a - b} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 9}{2x + 6} \cdot \frac{9x^2 - 25}{3x + 5} = \frac{x^2 - 9}{2x + 6} \cdot \frac{3x + 5}{9x^2 - 25} =$$

c)  $\frac{x^2 - 9}{2x + 6} \cdot \frac{9x^2 - 25}{3x + 5}$  **Resolução:**

$$\begin{aligned} & = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(3x + 5)(3x - 5)} \cdot \frac{3x + 5}{2(x + 3)} = \\ & = \frac{(x - 3)}{2(3x - 5)} = \frac{x - 3}{6x - 10} \end{aligned}$$

### Exercícios propostos:

1. Simplifique:  $\frac{ax^2 - ay^2}{x^2 - 2xy + y^2}$

2. (UFGO) Simplifique a expressão:  $\frac{a^2 + a}{b^2 + b} \cdot \frac{a^2 - a}{b^2 - b} \cdot \frac{b^2 - 1}{a^2 - 1}$

3. (FEI-SP) Fatorar:  $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$

4. Simplifique: a)  $\frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$  b)  $\frac{x^2 - 16x + 64}{x^2 - 64}$

**4. Função do 1º grau** As funções do 1º grau estão presentes em diversas situações do dia-a-dia. Por exemplo:

Uma loja de eletrodomésticos contrata vendedores com as seguintes condições salariais: um fixo de R\$ 100,00 mais 5% sobre as vendas efetuadas.

Vamos procurar uma fórmula que forneça o salário no final de cada mês. Lembremos que: 5% = 0,05. Chamemos o total do salário de  $y$ . Se o vendedor fizer uma venda de R\$ 500,00, receberá:

$$y = 100 + 0,05 \cdot 500 = 125$$

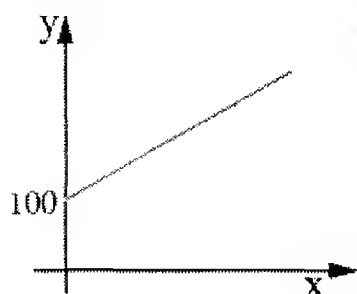
Façamos uma tabela para visualizar melhor a situação.

Salário Fixo	Venda	%	Total
100	500	5	125
100	1.000	5	150
100	2.000	5	200

De forma geral, se vender  $x$ , temos que:  $y = 100 + 0,05x$

A fórmula  $y = 100 + 0,05x$  expressa uma função de 1º grau. A

representação gráfica de uma função deste tipo *sempre* será uma *reta*:

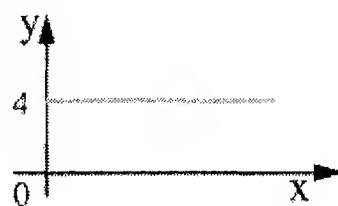


**Definição:** chama-se função do 1º grau a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  números reais e  $a \neq 0$ .  
 $a$  é o *coeficiente angular* da reta e determina sua inclinação.  
 $b$  é o *coeficiente linear* da reta e determina a intersecção da reta com o eixo Oy.

A função de 1º grau pode ser classificada de acordo com seus gráficos. Considere sempre a forma genérica  $y = ax + b$ .

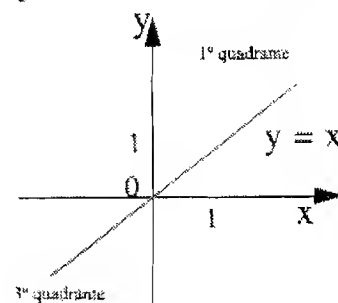
a) Função constante: se  $a = 0$ , então  $y = b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Desta forma,  $y = 4$  é função constante, pois, para qualquer valor de  $x$ , o valor de  $y$  ou  $f(x)$  será sempre 4.

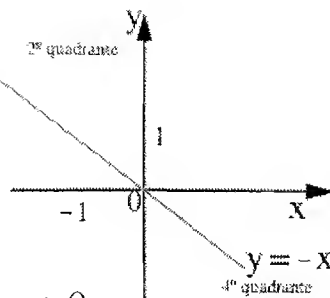


b) Função identidade: se  $a = 1$  e  $b = 0$ , então  $y = x$ . Nesta função  $x$  e  $y$  têm sempre os mesmos valores. Graficamente temos:

A reta  $y = x$  ou  $f(x) = x$  é denominada *bissetriz dos quadrantes ímpares*.



Mas, se  $a = -1$  e  $b = 0$ , temos então  $y = -x$ . A reta determinada por esta função é a *bissetriz dos quadrantes pares*, conforme mostra o gráfico:  $x$  e  $y$  têm valores iguais em módulo, porém com sinais contrários.



c) Função linear: é a função de 1º grau quando  $b = 0$ ,  $a \neq 0$  e

$a \neq 1$ ,  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Exemplos:  $f(x) = 5x$ ,  $y = \frac{1}{2x} x$ ,  $f(x) = -2x$ ,  $y = 10x$ .

d) Função afim: é a função de 1º grau quando  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Exemplos:  $f(x) = 3x + 1$ ,  $y = 4x - 2$ ,  $f(x) = -x + 5$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Obter o valor de  $m$  para que a função seja de 1º grau, em cada caso:

a)  $f(x) = (m + 1)x + 3$

**Resolução:** Pela definição,  $f(x) = ax + b$  é função de 1º grau se  $a$  e  $b$  são reais e  $a \neq 0$ . No exercício, o coeficiente de  $x$  é  $m + 1$ , que deve, então, ser diferente de zero:  $m + 1 \neq 0$ ,  $\boxed{m \neq -1}$

b)  $f(x) = (m^2 - 4)x + 5$

**Resolução:** O coeficiente de  $x$  é  $m^2 - 4$ , então:

$$m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 4 \Rightarrow \boxed{m \neq \pm 2}$$

c)  $f(x) = (2m + 1)x^2 + mx + 1$

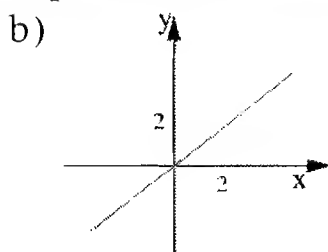
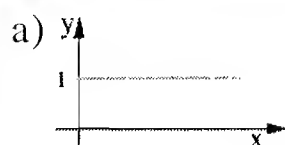
**Resolução:** Na expressão geral da função do 1º grau,  $f(x) = ax + b$ , não está presente o monômio de 2º grau ( $x^2$ ). Assim, para que a função dada seja de 1º grau é necessário que o coeficiente deste monômio seja igual a zero:

$$2m + 1 = 0 \Rightarrow 2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Se  $m = -\frac{1}{2}$ , teremos  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ , que é função de 1º grau.

### Exercícios propostos:

5. Descreva a função representada em cada figura:



6. Determine, em cada caso, o valor de  $k$  para que a função seja de 1º grau:



a)  $f(x) = (3k + 6)x + 1$

b)  $f(x) = (2k - 8)x + 7$

c)  $y = (k^2 - 25)x - 2$

d)  $y = (k^2 - 9)x^2 + 2x - 1$

e)  $f(x) = -kx + \sqrt{2}$

f)  $y = \left(\frac{2}{3}k - 4\right)x - 13$

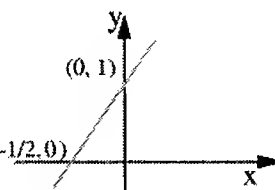
**5. Gráfico da função de 1º grau** A representação geométrica da função de 1º grau é uma reta, portanto, para determinar o gráfico é necessário obter dois pontos desta reta. Em particular, procuraremos os pontos em que a reta corta os eixos Ox e Oy.

Por exemplo, na função  $y = 2x + 1$ , o ponto do eixo Ox é determinado pela equação  $2x + 1 = 0$ , donde  $x = -\frac{1}{2}$

O ponto procurado é, portanto,  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

Analogamente, para determinar o ponto do eixo Oy,  $y = 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$ .

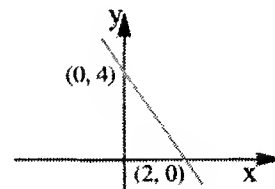
O ponto procurado é  $(0, 1)$  e o gráfico desta função será o do lado.



Da mesma forma, na função  $f(x) = -2x + 4$ , temos:  $-2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4$

$x = 2$  o ponto do eixo Ox é  $(2, 0)$ , e

$y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$  o ponto do eixo Oy é  $(0, 4)$ .



De modo geral, dada a função  $f(x) = ax + b$ , para determinarmos a intersecção da reta com os eixos, procedemos do seguinte modo:

1º) igualamos y a zero, então  $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ , no eixo Ox

encontramos o ponto  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ .

2º) igualamos x a zero, então  $f(x) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(x) = b$ , no eixo Oy encontramos o ponto  $(0, b)$ .

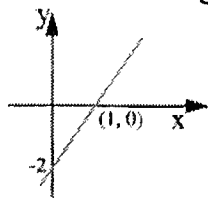
Agora, comparemos os dois exemplos anteriores:

- em  $f(x) = 2x + 1$ , temos o coeficiente de x igual a 2, ou  $a = 2$ , e o gráfico representa uma função crescente;
- em  $f(x) = -2x + 4$ , temos o coeficiente de x igual a  $-2$ , ou  $a = -2$ , e o gráfico representa uma função decrescente.

De onde concluímos que:

- $f(x)$  é *crescente* se a é um número positivo ( $a > 0$ );
- $f(x)$  é *decrescente* se a é um número negativo ( $a < 0$ ).

A partir destas observações, podemos obter a função através da análise de seu gráfico. Observe o exemplo seguinte:



Note que a reta contém os pontos:

$(1, 0)$  e  $(0, -2)$ .

Isto significa que: se  $x = 0$  então  $f(x) = -2$

se  $x = 1$  então  $f(x) = 0$

Substituímos estes dados na expressão geral

$$1) f(x) = ax + b \Rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow -2 = 0 + b \Rightarrow \boxed{b = -2} \text{ ①}$$

$$2) f(1) = a \cdot 1 + b \Rightarrow 0 = \boxed{a + b} \text{ ②}$$

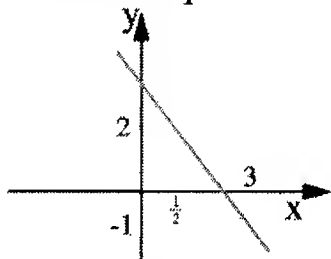
De ① temos que  $b = -2$ . Substituímos em ②

$$a + b = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Portanto,  $f(x) = 2x - 2$

Agora, observe como obter a função  $f(x) = ax + b$ , através de um gráfico que não mostra seus pontos de intersecção com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ :

Observe que:



se  $x = \frac{1}{2}$ , então  $y = 2$  ou  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

se  $x = 3$ , então  $y = -1$  ou  $f(3) = -1$

Substituímos estes dados em  $f(x) = ax + b$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow 2 = \frac{a}{2} + b$$

$$\frac{4}{2} = \frac{a + 2b}{2} \Rightarrow \boxed{a + 2b = 4}$$

$$f(3) = a \cdot 3 + b$$

$$-1 = 3a + b \Rightarrow \boxed{3a + b = -1}$$

Temos que resolver o sistema obtido com as equações:

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 3a + b = -1 \text{ (multiplicar por } -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 4 & \text{(I)} \\ -6a - 2b = 2 & \text{(somar as equações)} \end{cases}$$


---


$$-5a = 6 \Rightarrow a = \frac{-6}{5} \quad \text{substituir em (I)}$$

$$\frac{-6}{5} + 2b = 4 \Rightarrow 2b = 4 + \frac{6}{5} \Rightarrow 2b = \frac{20 + 6}{5} \Rightarrow b = \frac{26}{10} \Rightarrow b = \frac{13}{5}$$

$$f(x) = \frac{-6}{5}x + \frac{13}{5} \text{ ou } f(x) = \frac{-6x + 13}{5}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

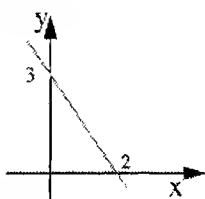
7. Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a)  $y = 3x + 1$ ; b)  $y = -x + 7$ ; c)  $f(x) = -5x$

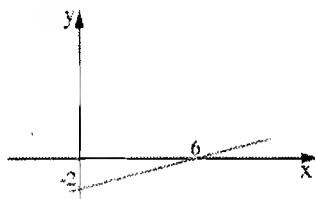
8. Na função  $y = ax + b$ , sabe-se que  $f(1) = 0$  e  $f(3) = 4$ . Determine a função.

9. Para cada um dos gráficos, determine a respectiva função:

a)

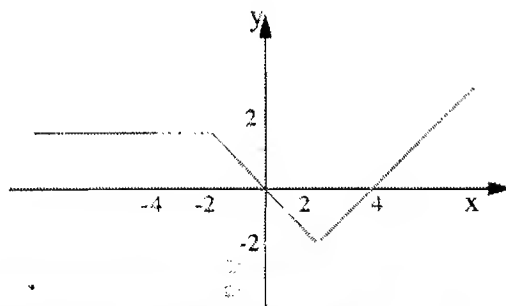


b)



10. Para o gráfico a seguir, defina a função  $y = ax + b$ , em cada um dos intervalos pedidos:

a) para  $x < -2$ ; b) para  $-2 \leq x \leq 2$ ; c) para  $x > 2$



**6. Raiz ou zero da função de 1º grau** A raiz ou *zero* da função de 1º grau é o valor de  $x$  para o qual  $y = f(x) = 0$ . Graficamente é o ponto em que a reta “corta” o eixo  $Ox$ . Portanto, para determinar a raiz da função basta igualarmos a zero:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determine a raiz da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 3x + 1$ .

**Resolução:** Igualamos  $f(x)$  a zero, portanto:  $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

Quando determinamos a(s) raiz ou raízes de uma função, o(s) valor(es) encontrado(s) deve(m) ser expresso(s) sob a forma de

conjunto, denominado conjunto-verdade (V) ou conjunto-solução (S), da seguinte forma:  $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$

2. Resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $3x + 27 = 0$ .

*Resolução:* Resolver uma equação é o mesmo que determinar a raiz da função associada:

$$3x + 27 = 0 \Rightarrow 3x = -27 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow \boxed{S = \{-9\}}$$

3. Determine  $m$  para que  $-5$  seja a raiz da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -x + 3m$ .

*Resolução:* Se  $-5$  é raiz, então para  $x = -5$  temos que  $f(x) = 0$ ; substituímos estes dados na função:

$$f(x) = -x + 3m \Rightarrow 0 = -(-5) + 3m \Rightarrow 0 = 5 + 3m \Rightarrow 3m = -5$$

$$\boxed{m = \frac{-5}{3}}$$

4. Determine o valor de  $k$  para que a função  $f(x) = (4k + 12)x + 1$  seja crescente.

*Resolução:* A função  $f(x) = ax + b$  é crescente se  $a$  for positivo ( $a > 0$ ). Por comparação, na função dada  $a = 4k + 12$ , temos então:  $4k + 12 > 0 \Rightarrow 4k > -12 \Rightarrow k > -3$

5. Determine o valor de  $p$  para que função  $f(x) = (2p + 18)x - 4$  seja decrescente.

*Resolução:* A função  $f(x) = ax + b$  é decrescente se  $a$  for negativo ( $a < 0$ ). Portanto, comparando com a função dada,  $a = 2p + 18$ , temos então:  $2p + 18 < 0 \Rightarrow 2p < -18 \Rightarrow p < -9$ .

### **Exercícios propostos:**

**11.** Determine, em  $\mathbb{R}$ , a raiz de cada uma das funções:

a)  $f(x) = -x + 7$ ; b)  $f(x) = 3x + 9$ ; c)  $f(x) = \frac{x}{2} - 7$ ;

d)  $y = -4x - 12$ ; e)  $y = \frac{1}{3}x + 5$

**12.** Determine  $K$  para que  $-3$  seja raiz da função  $y = 12x + k$ .

**13.** Sabendo que  $10$  é raiz da função  $y = -(3p - 1)x - 7$ , determine  $p$ .

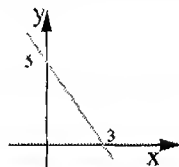
**14.** Determine  $m$  para que as funções sejam crescentes:

a)  $y = (m + 3)x$ ;      b)  $y = (2m + 5)x - 1$

**15.** Determine  $p$  para que as funções sejam decrescentes:

a)  $f(x) = (3p - 81)x + 9$ ; b)  $y = \left(\frac{p}{7} + 1\right)x - 4$

**16.** A partir do gráfico, determine a raiz da função:



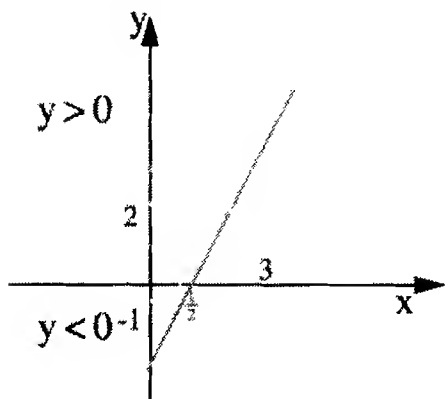
**7. Estudo de sinal da função de 1º grau** Estudar o sinal de uma função de 1º grau é *determinar os valores de  $x$  para que  $y$  seja positivo, negativo ou zero*.

Estudemos, por exemplo, o sinal da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $y = 2x - 1$ .

Vamos construir o gráfico da função.

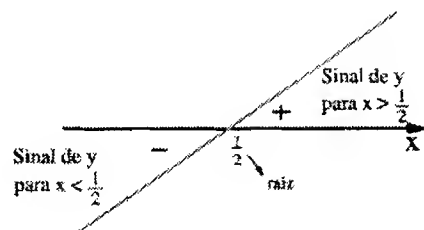
Se  $x = 0$  então  $y = 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow y = -1$ . Ponto  $(0, -1)$ .

Se  $y = 0$  então  $2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ . Ponto  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



Observe que a função é crescente ( $a = 2$ ). Analisando o gráfico podemos concluir que: ❶ se  $x < \frac{1}{2}$  então  $y < 0$ ; ❷ se  $x > \frac{1}{2}$  então  $y > 0$ ; ❸ se  $x = \frac{1}{2}$  então  $y = 0$  ( $\frac{1}{2}$  é raiz da função).

Esta análise é o estudo do sinal da função, porém, para efetuá-la podemos recorrer apenas a um esboço do gráfico, conforme mostra a figura:



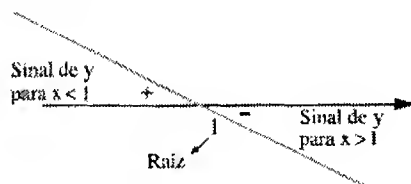
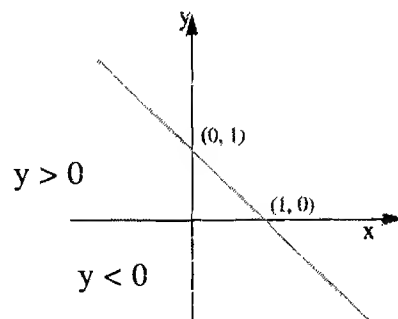
Igualmente, em  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $y = -x + 1$ , observamos que a função é decrescente ( $a = -1$ ), e a raiz é  $x = 1$ , portanto:

❶ se  $x < 1$  então  $y$  é positivo ( $y > 0$ )

❷ se  $x > 1$  então  $y$  é negativo ( $y < 0$ )

❸ se  $x = 1$  então  $y = 0$  (1 é raiz da função).

Utilizando o esboço do gráfico, temos, resumidamente, esta análise:



Observando o esboço dos gráficos dos dois exemplos, podemos extrair uma regra prática que facilite o estudo do sinal da função de 1º grau.

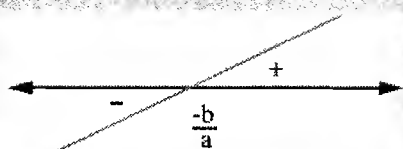
### Regra prática para o estudo de sinal da função

$$f(x) = ax + b:$$

1ª) determinamos a raiz da função, igualando-a a zero

$$\left( \text{raiz: } x = \frac{-b}{a} \right)$$

2ª) verificamos se a função é crescente ( $a > 0$ ) ou decrescente ( $a < 0$ ); temos então duas possibilidades:

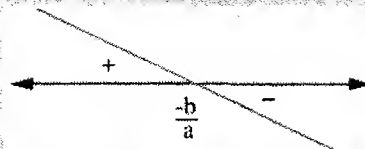


a) a função é crescente

Se  $x = \frac{-b}{a}$  então  $y = 0$ .

Se  $x < \frac{-b}{a}$  então  $y < 0$ .

Se  $x > \frac{-b}{a}$  então  $y > 0$ .



b) a função é decrescente

Se  $x = \frac{-b}{a}$  então  $y = 0$ .

Se  $x < \frac{-b}{a}$  então  $y > 0$ .

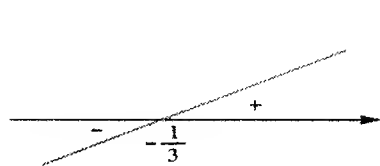
Se  $x > \frac{-b}{a}$  então  $y < 0$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Estude o sinal das funções:

a)  $y = 3x + 1$

**Resolução:** raiz da função:  $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ , o coeficiente de  $x$  é positivo ( $a = 3$ ), portanto a função é crescente, fazemos o esboço:

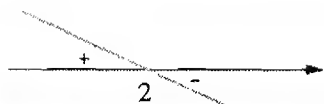


$x = -\frac{1}{3}$  então  $y = 0$ , se  $x < -\frac{1}{3}$  então  $y < 0$ ,  
se  $x > -\frac{1}{3}$  então  $y > 0$ .

b)  $f(x) = \frac{-x}{2} + 1$

**Resolução:** raiz da função:  $\frac{-x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-x}{2} = -1 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow$

$x = 2$ , o coeficiente de  $x$  é negativo ( $a = \frac{-1}{2}$ ), portanto a função é decrescente; temos então:



se  $x = 2$  então  $y = 0$ , se  $x < 2$  então  $y > 0$ ,  
se  $x > 2$  então  $y < 0$ .

### Exercício proposto:

17. Para cada caso, faça o estudo de sinal da função:

- a)  $f(x) = -x + 7$       c)  $y = -2x - 3$       e)  $f(x) = 4x + 6$   
b)  $f(x) = \frac{x}{3} + 4$       d)  $y = \frac{-x + 1}{5}$       f)  $y = -3x - 1$

**8. Inequação do 1º grau** A inequação se caracteriza pela presença de um dos seguintes sinais de desigualdade:  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  ou  $\leq$

Vamos recordar algumas propriedades das desigualdades:

1º) Somando ou subtraindo um número a cada um dos membros, a desigualdade não se altera:

$$\begin{array}{ll} -1 < 2 & 3 > -7 \\ -1 + 2 < 2 + 2 & 3 - 5 > -7 - 5 \\ 1 < 4 & -2 > -12 \end{array}$$

2º) Multiplicando ou dividindo os dois membros da desigualdade por um *número positivo*, a desigualdade não se altera:

$$\begin{array}{ll} -2 < 8 & 5 > -10 \\ -2 \cdot (2) < 8 \cdot (2) & \frac{5}{5} > \frac{-10}{5} \\ -4 < 16 & 1 > -2 \end{array}$$

3º) Multiplicando ou dividindo os dois membros da desigualdade por um *número negativo*, é necessário inverter a desigualdade para que a sentença seja verdadeira:

$$\begin{array}{ll} -7 < 0 & 3 > -9 \\ -7 \cdot (-2) > 0 \cdot (-2) & \frac{3}{-3} < \frac{-9}{-3} \\ 14 > 0 & -1 < 3 \end{array}$$

Estas propriedades são válidas para a resolução de inequações do 1º grau.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolver, em  $\mathbb{R}$ , a inequação  $2x - 1 > 3$ .

**Resolução:** Resolver esta inequação é determinar o conjunto de números que, substituídos por  $x$ , forneçam números maiores que 3. Temos então que isolar  $x$  no 1º membro da inequação:  $2x - 1 > 3 \Rightarrow \Rightarrow 2x > 3 + 1 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow V = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \}$

2. Resolver, em  $\mathbb{R}$ , a inequação  $5(x + 2) - 7 \leq 3x - 2$

*Resolução:* Efetuamos o produto, e isolamos  $x$  no 1º membro da inequação:

$$5(x + 2) - 7 \leq 3x - 2 \Rightarrow 5x + 10 - 7 \leq 3x - 2 \Rightarrow 5x + 3 \leq 3x - 2$$

$$5x - 3x \leq -2 - 3 \Rightarrow 2x \leq -5 \Rightarrow x \leq \frac{-5}{2} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-5}{2}\}$$

3. Resolver em  $\mathbb{R}$  o sistema: 
$$\begin{cases} x + 3 \geq -2x \\ \frac{-x}{2} + 1 > 4x + 5 \end{cases}$$

*Resolução:*

Resolver um sistema é determinar o conjunto de valores de  $x$  que podem ser substituídos nas duas equações, tornando-as verdadeiras. Para isto, resolvemos separadamente cada uma das inequações, e efetuamos a intersecção dos resultados.

$$x + 3 \geq -2x$$

$$x + 2x \geq -3$$

$$3x \geq -3$$

$$x \geq -1$$

$$\frac{-x}{2} + 1 > 4x + 5$$

$$\frac{-x + 2}{2} > \frac{8x + 10}{2}$$

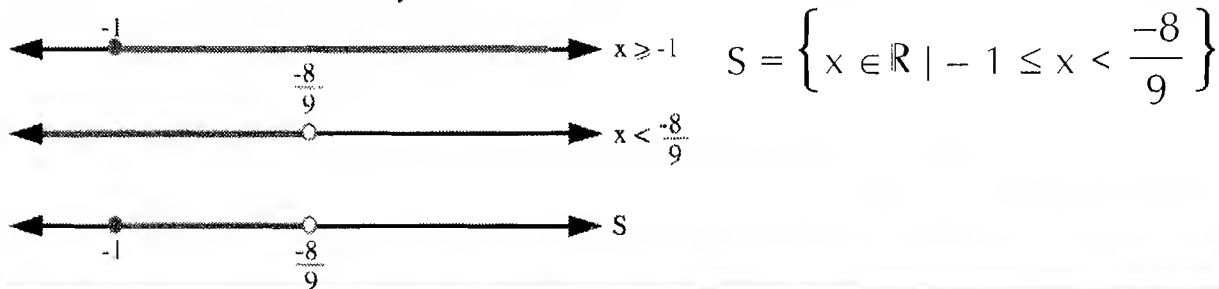
$$-x - 8x > 10 - 2$$

$$-9x > 8 \quad (-1)$$

(multiplicamos por  $-1$  e invertemos o sinal)

$$9x < -8 \Rightarrow x < \frac{-8}{9}$$

Representamos cada solução numa reta, e efetuamos a intersecção:



### ⇒ Exercícios propostos:

18. Resolver em  $\mathbb{R}$  as inequações:

a)  $2x + 5 \leq 9$

b)  $\frac{x}{3} - 1 \geq 4$

c)  $2(x + 1) - 4 < x - 1$

d)  $3x + 1 > 2(x - 5) + 9$

e)  $\frac{x}{5} - 7 < x + 10$

f)  $4x - 1 \geq \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$



**19.** Resolver em  $\mathbb{R}$  os sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + 7 \leq 2x - 1 \\ 3x - 8 > 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 \leq -x + 4 \\ 2(x - 1) > -2x + 7 \end{cases} \end{array}$$

**9. Inequação produto e inequação quociente** Dadas as funções  $f(x)$  e  $h(x)$  podemos ter:

$$\begin{array}{ll} \text{a) Inequação-produto:} & f(x) \cdot h(x) > 0 \quad f(x) \cdot h(x) \geq 0 \\ & f(x) \cdot h(x) \leq 0 \quad f(x) \cdot h(x) < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) Inequação-quociente:} & \frac{f(x)}{h(x)} > 0 \quad \frac{f(x)}{h(x)} \geq 0 \\ & \frac{f(x)}{h(x)} < 0 \quad \frac{f(x)}{h(x)} \leq 0 \end{array}$$

Para resolver uma inequação-produto ou uma inequação-quociente, devemos estudar os sinais das funções separadamente, transportar os resultados para um quadro e, a seguir, efetuar o produto dos sinais. Este procedimento se explica porque, se nosso objetivo é, por exemplo, calcular  $f(x) \cdot h(x) > 0$ , queremos que o produto das funções seja positivo. Por este motivo, multiplicamos os sinais para obter o resultado, sendo que o mesmo vale para o quociente. Determinamos os valores numéricos de  $x$  que satisfazem à desigualdade em questão. Observe o exemplo:

Vamos resolver em  $\mathbb{R}$  a inequação:  $(x + 1)(2x - 3) > 0$ .

Chamemos as funções de  $f(x)$  e  $h(x)$ , então:

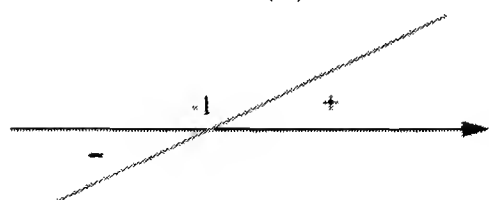
$$f(x) = x + 1 \quad h(x) = 2x - 3$$

Queremos determinar o conjunto de valores de  $x$  tal que o produto  $f(x) \cdot h(x)$  seja positivo.

Façamos o estudo do sinal das funções separadamente:

$$f(x) = x + 1, \text{ raiz de } f(x): x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

O coeficiente de  $x$  é positivo ( $a = 1$ ), então  $f(x)$  é crescente. Portanto: sinais de  $f(x)$



Observe que:

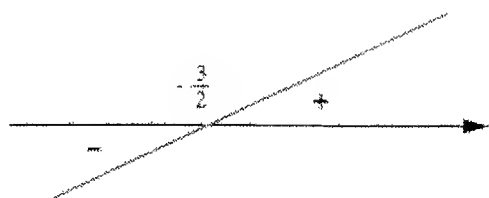
se  $x$  é menor que  $-1$ , o  $y$  é *negativo*;

se  $x$  é maior que  $-1$ , o  $y$  é *positivo*.

Os sinais de  $y$  deverão ser colocados no quadro de sinais.

$$h(x) = 2x - 3, \text{ raiz de } h(x): 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

O coeficiente de  $x$  é positivo ( $a = 2$ ), então  $h(x)$  é crescente. Portanto: sinais de  $f(x)$



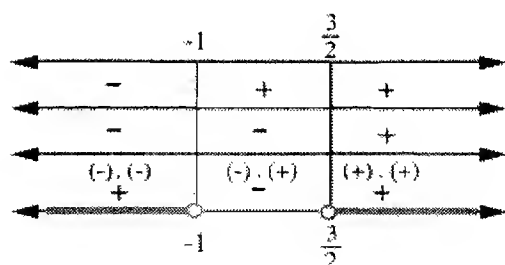
Observe que:

se  $x$  é menor que  $\frac{3}{2}$ , o  $y$  é *negativo*;

se  $x$  é maior que  $\frac{3}{2}$ , o  $y$  é *positivo*.

Os sinais de  $y$  deverão ser colocados no quadro de sinais.

Agora que sabemos os sinais de cada função separadamente, vamos transportá-los para um quadro de sinais. O quadro terá três linhas: uma para  $f(x)$ , uma para  $h(x)$  e a terceira para a solução  $f(x) \cdot h(x)$ . As raízes devem ser colocadas em ordem crescente, e indicadas por uma bolinha branca, porque elas apenas delimitam os intervalos do conjunto-solução, já que na inequação original não consta o sinal de igualdade (o sinal usado é  $>$ , e não  $\geq$ ).



Observe que na primeira linha são colocados os sinais de  $f(x)$ :

+ para  $x$  maior que  $-1$

- para  $x$  menor que  $-1$

Na segunda linha são colocados os sinais de  $h(x)$ :

+ para  $x$  maior que  $\frac{3}{2}$  e - para  $x$  menor que  $\frac{3}{2}$

Na terceira linha são colocados os sinais do produto, como inicialmente queríamos:  $f(x) \cdot h(x) > 0$ .

As soluções serão os intervalos com sinal positivo.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{3}{2} \right\}$$

Da mesma forma, resolvamos em  $\mathbb{R}$  a desigualdade:

$$(2x - 1)(-x + 4) \leq 0.$$

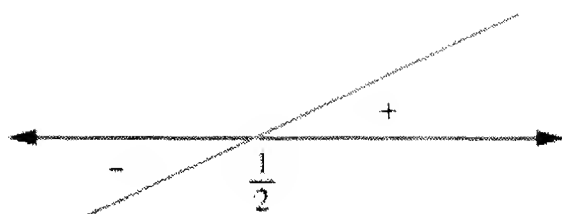
Queremos que o produto das funções seja menor ou igual a zero.

Sejam:  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = -x + 4$

Façamos o estudo de sinal separadamente.

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow \text{raiz de } f(x): 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Como o coeficiente de  $f(x)$  é um número positivo ( $a = 2$ ), então a função é crescente.

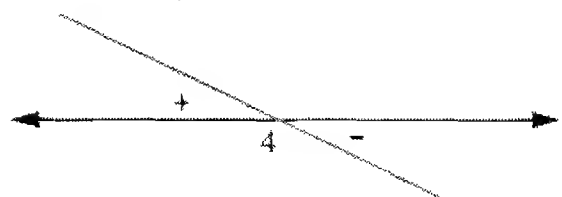


Observe que:

se  $x < \frac{1}{2}$  então  $y$  é negativo  
se  $x > \frac{1}{2}$  então  $y$  é positivo

$g(x) = -x + 4 \Rightarrow$  raiz de  $g(x)$ :  $-x + 4 = 0 \Rightarrow -x = -4$  (multiplicamos por  $-1$ )  $\Rightarrow x = 4$

O coeficiente de  $g(x)$  é negativo ( $a = -1$ ), então a função é decrescente.



Observe que:

se  $x < 4$  então  $y$  é positivo  
se  $x > 4$  então  $y$  é negativo

Vamos transportar os resultados obtidos para o quadro de sinais. Note que as raízes estão simbolizadas com uma bolinha preta, o que significa que estão incluídas nos intervalos referentes ao conjunto-solução. Utilizamos esta notação quando a inequação que estamos resolvendo contém o sinal de igualdade (neste exemplo, o sinal é  $\leq$ ).

	$\frac{1}{2}$		4	
$f(x)$	-	+	+	
$g(x)$	+	+	-	
	$(-), (+)$	$(+), (+)$	$(+), (-)$	
$S$	-	+	-	
	$x \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	$x \geq 4$

De acordo com o estudo de sinal de  $f(x)$ , temos:

- para  $x < \frac{1}{2}$   
+ para  $x > \frac{1}{2}$

De acordo com o estudo de sinal de  $g(x)$ , temos:

+ para  $x < 4$  e - para  $x > 4$

Como estamos querendo as soluções de  $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ , os intervalos procurados são aqueles que apresentam o sinal negativo, lembrando que, como as bolinhas são pretas, devemos colocar o sinal de igual na solução ( $\geq$  ou  $\leq$ ).

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 4 \right\}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

20. Resolva em  $\mathbb{R}$  cada uma das inequações:

a)  $(-x + 7)(2x + 4) > 0$

b)  $(3x - 1)(x + 5) \leq 0$

$$c) \left( \frac{x}{2} + 1 \right) (-x - 2) \geq 0$$

$$d) (8x - 4) (-3x + 6) < 0$$

Entretanto, preste atenção quando a inequação requer alguma condição de existência. Observe o exemplo seguinte:  $\frac{2x + 3}{-x + 9} \leq 0$

Procedemos, como nos exemplos anteriores, fazendo o estudos de sinal das funções separadamente, porém devemos observar que o *denominador não pode se anular*, então:

$$-x + 9 \neq 0 \Rightarrow -x \neq -9 \Rightarrow x \neq 9$$

O número 9 não fará parte do conjunto solução, portanto devemos nos lembrar de simbolizar o 9 com uma bolinha branca e não utilizar o sinal de igualdade no intervalo cuja extremidade seja o 9.

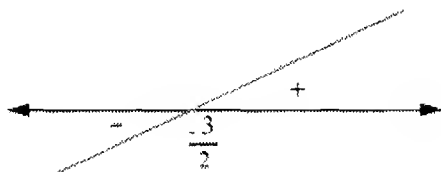
Considere as funções:

$$f(x) = 2x + 3 \text{ e } h(x) = -x + 9$$

$$\text{Sinais de } f(x) = 2x + 3: \text{ raiz de } f(x): x = \frac{-3}{2}$$

$$a = 2 \Rightarrow \text{função crescente.}$$

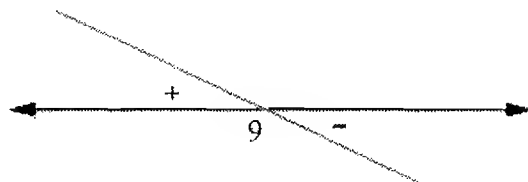
Sinais de  $f(x)$ :



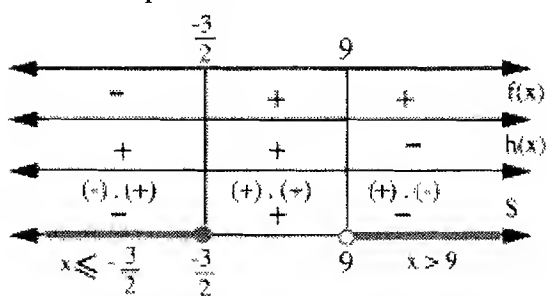
Sinais de  $h(x)$ :

$$h(x) = -x + 9; \text{ raiz de } h(x): x = 9$$

$$a = -1 \Rightarrow \text{função decrescente}$$



No quadro de sinais, temos:



Na inequação que estamos resolvendo:

$$\frac{2x + 3}{-x + 9} \leq 0$$

Procuramos os valores de  $x$  tal que o quociente seja menor ou igual a zero, então o conjunto-solução é composto dos intervalos onde o sinal é negativo. Lembre-se que o número 9 não pode ser incluído na solução.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-3}{2} \text{ ou } x > 9 \right\}$$

## Exercício proposto:

21. Resolva em  $\mathbb{R}$  as seguintes inequações:

a)  $\frac{2x-7}{x-1} \geq 0$ ; b)  $\frac{3x+4}{x} \leq 0$ ; c)  $\frac{-x+5}{2x-4} > 0$ ; d)  $\frac{x}{3x+27} \geq 0$

## Exercícios resolvidos:

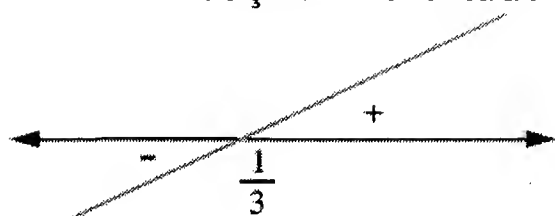
1. Resolva  $\frac{(3x-1) \cdot (-x+4)}{x} \geq 0$

**Resolução:** Chamemos as funções de:  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(x) = -x + 4$  e  $h(x) = x$

Queremos determinar valores de  $x$  tal que:  $\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$  seja maior ou igual a zero.

Lembre-se que  $h(x)$  está no denominador, portanto  $h(x) \neq 0$ , então:  $x \neq 0$

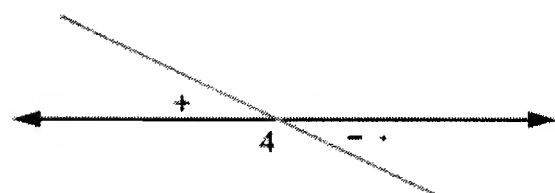
Façamos o estudo de sinal de cada função:



Sinais de  $f(x)$

raiz:  $x = \frac{1}{3}$

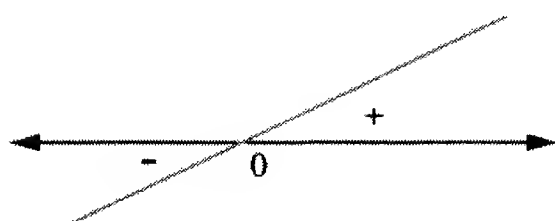
$a = 3 \Rightarrow$  função crescente



Sinais de  $g(x)$

raiz:  $x = 4$

$a = -1 \Rightarrow$  função decrescente



Sinais de  $h(x)$

raiz:  $x = 0$

$a = 1 \Rightarrow$  função crescente

No quadro de sinais temos:

	0	$\frac{1}{3}$	4	
	-	-	+	+
	+	+	+	-
	-	+	+	+
	(-)(+)(-)	(-)(+)(+)	(+)(+)(+)	(+)(-)(+)
	+	-	+	-
	0	$\frac{1}{3}$	4	
	$x < 0$		$x$ está entre $\frac{1}{3}$ e 4	

Queremos os valores de  $x$  tais que:

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} \geq 0$$

O conjunto-solução é, portanto, o conjunto dos intervalos que possuem o sinal positivo, lembrando que, como  $x$  não pode ser zero, não deve constar o sinal de igual nesta raiz.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } \frac{1}{3} \leq x \leq 4 \right\}$$

2. Determine o domínio de  $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$

**Resolução:** Determinar o domínio desta função é estabelecer as condições de existência da raiz quadrada. Ou seja, o radicando

deve ser maior ou igual a zero, portanto:  $\frac{2x}{x-1} \geq 0$

O problema se resume a resolver a inequação-quociente acima, com um procedimento semelhante ao dos exemplos anteriores.

Note que o denominador deve ser diferente de zero:

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Consideremos:  $f(x) = 2x$  e  $g(x) = x - 1$ . Iremos colocar os sinais das funções diretamente no quadro de sinais:

	0	1	
←	-	+	+
←	-	-	+
←	+	-	+
←	$x \leq 0$	$1$	$x > 1$

Queremos que o quociente das funções seja maior ou igual a zero. O conjunto-solução é, portanto, formado pelos intervalos onde aparecem os sinais positivos, lembrando que  $x$  não pode assumir o valor 1.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$$

### Exercícios propostos:

22. Resolva as inequações:

a)  $\frac{(-x + 9)(3x - 4)}{-x - 5} \leq 0$

c)  $\frac{3x}{(5x + 10) \cdot (x + 1)} \geq 0$

b)  $(4x + 1)(-2x - 1)(x + 3) > 0$

d)  $\frac{(x + 12) \cdot (7x - 14)}{(2x + 1) \cdot (x - 5)} > 0$

**23.** Determine o domínio das funções:

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3x-1}}$

b)  $g(x) = \sqrt{(x+4)(-2x-7)}$

c)  $f(x) = \sqrt{\frac{(5x-15) \cdot (2x+1)}{(x+4)}}$

d)  $g(x) = \sqrt{\frac{3x \cdot (x-6)}{x}}$

### Exercícios complementares:

**24.** (Acafe-SC) Seja  $y = ax + b$ . Assinale a alternativa correta:

- a) o gráfico da função passa sempre pela origem.
- b) o gráfico da função nunca passa pela origem.
- c) o gráfico da função corta sempre o eixo das ordenadas.
- d) o zero da função é  $\frac{b}{a}$ .

e) a função é crescente para  $a < 0$ .

**25.** (PUC-SP) No conjunto dos números reais, a equação  $ax = b$ , na incógnita  $x$ :

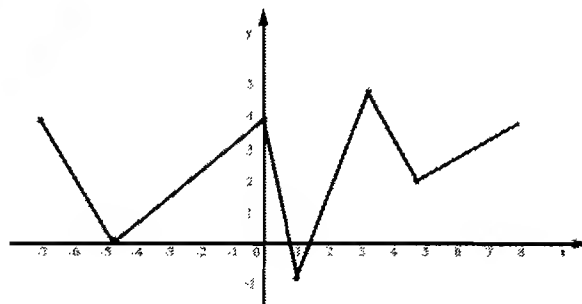
- a) não pode ter infinitas soluções.
- b) sempre tem solução.
- c) só tem solução se  $a \neq 0$ .
- d) tem infinitas soluções se  $b \neq 0$ .
- e) tem solução única se  $a \neq 0$ .

**26.** (UFGO) O produto da soma pela diferença de dois números inteiros é 12. Determine esses números.

**27.** (UFSC) Seja  $f(x) = ax + b$  uma função linear. Sabe-se que  $f(-1) = 4$  e  $f(2) = 7$ . Dê o valor de  $f(8)$ .

**28.** (UFSC) Considere a função  $f(x)$  real, definida por  $f(1) = 43$  e  $f(x+1) = 2f(x) - 15$ . Determinar o valor de  $f(0)$ .

**29.** (UFMG) Observe a figura:

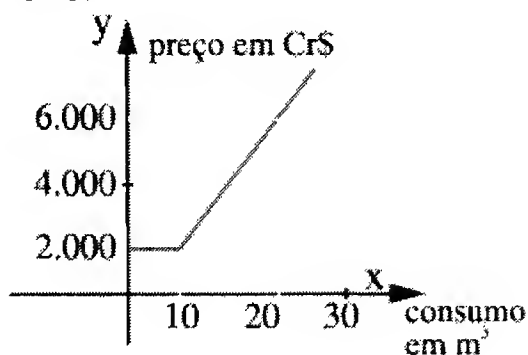


Essa figura contém o gráfico da função  $y = f(x)$  definida em  $A = \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x \leq 8\}$ .

Todas as afirmativas sobre a figura estão corretas, EXCETO:

- a) A soma de todas as raízes distintas de  $f(x)$  é negativa.
- b)  $f(-5) < f(6)$
- c)  $f(-4) + f(2) > 1$
- d) A soma de todos os valores distintos de  $x$ ,  $x \in A$ , tais que  $f(x) = 3$  é um número positivo.
- e)  $f(3) - f(-2) < 0$ .

**30.** (UFSE) O gráfico abaixo informa a quantia a ser paga pelo consumo de água, em certa cidade da região Nordeste:



De acordo com o gráfico, um consumo de  $28 \text{ m}^3$  importa no pagamento de:

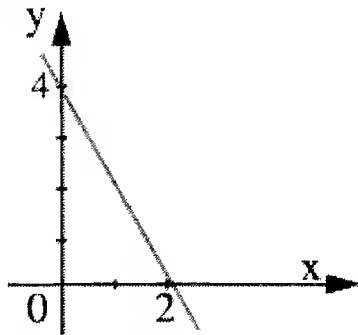
- a) Cr\$ 2.000,00; b) Cr\$ 5.800,00;  
c) Cr\$ 7.200,00; d) Cr\$ 9.200,00;  
e) Cr\$ 11.200,00.

**31.** (UFRN) O gráfico da função  $f$  é o segmento de reta que une os pontos  $(-2, 2)$  e  $(2, 0)$ .

O valor de  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  é:

- a) 1 b)  $\frac{3}{4}$  c)  $\frac{1}{2}$  d)  $\frac{1}{8}$  e)  $\frac{7}{8}$

**32.** (UFMG) Observe a figura:



O gráfico da função  $f(x) = ax + b$  está representado nessa figura. O valor de  $a + b$  é:

- a)  $-2$  b)  $2$  c)  $\frac{7}{2}$  d)  $\frac{9}{2}$  e)  $6$

**33.** (UFPB) A reta que passa pelos pontos  $(0, 3)$  e  $(5, 0)$  também passa pelo ponto:

- a)  $(5, 3)$  c)  $(10, -3)$  e)  $(-13, 5)$   
b)  $(3, 5)$  d)  $(0, 0)$

**34.** (UFMS) O valor de  $x$  que satisfaz a igualdade

$$\frac{0,1 - 4 \cdot 0,1}{0,01 \cdot (1 - 0,1)} = \frac{x}{\frac{1}{4} - 1} \text{ é:}$$

**35.** (UFPI) A função de variável real, definida por:

$$f(x) = (3 - 2a)x + 2,$$

é crescente quando:

- a)  $a > 0$ ; b)  $a < \frac{3}{2}$ ; c)  $a = \frac{3}{2}$ ; d)  $a > \frac{3}{2}$

**36.** (UFSC) A soma dos quadrados dos extremos do intervalo que satisfaz, simultaneamente, as inequações  $x + 3 \geq 2$  e  $2x - 1 \leq 17$  é:

**37.** (UFMG) O conjunto solução da desigualdade  $\frac{3}{x-5} \leq 2$  é:

- a)  $\left\{x \in \mathbb{R}: x \geq \frac{13}{2}\right\}$   
b)  $\left\{x \in \mathbb{R}: 5 < x \leq \frac{13}{2}\right\}$   
c)  $\left\{x \in \mathbb{R}: x \leq 5 \text{ ou } x \geq \frac{13}{2}\right\}$   
d)  $\left\{x \in \mathbb{R}: x < 5 \text{ ou } x > \frac{13}{2}\right\}$   
e)  $\left\{x \in \mathbb{R}: x < 5 \text{ ou } x \geq \frac{13}{2}\right\}$

**38.** (UFAM) O intervalo de números reais  $x$ , satisfazendo a desigualdade

$$(x + 1)(x - 2) < 0, \text{ é:}$$

- a)  $-1 \leq x < 2$  c)  $1 \leq x \leq 2$   
b)  $-1 < x \leq 2$  d)  $-1 < x < 2$

**39.** (UFPI) O domínio da função real definida por

$$y = \sqrt{\frac{-6}{(5-x)(x+2)}} \text{ é:}$$

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 2\}$   
b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 5\}$   
d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$   
e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$



**40.** (UFRR) Dez jovens foram jantar em um restaurante de Boa Vista. Ao pedirem a conta, que foi de Cr\$ 48.000,00, os rapazes não permitiram que as moças pagassem, ocasionando um aumento de Cr\$ 3.200,00 para cada um deles. Quantas eram as moças?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7 e) 6

**41.** (UFSC) A soma das idades de um pai e seu filho é 38 anos. Daqui a 7 anos o pai terá o triplo da idade do filho. A idade do pai será:

**42.** (UFRN) Um terreno foi repartido entre três pessoas. A primeira ficou com a metade do terreno, a segunda, com um quarto do restante e a tercei-

ra, com 600 m<sup>2</sup>. A parte da segunda pessoa mede:

a) 400 m<sup>2</sup> c) 200 m<sup>2</sup> e) 1.000 m<sup>2</sup>  
b) 600 m<sup>2</sup> d) 800 m<sup>2</sup>

**43.** (UFMG) A diferença entre dois números positivos  $a$  e  $b$  é 5, e a razão

entre eles é  $\frac{5}{3}$ . O produto  $ab$  é:

a) 7,5 c) 12,5 e) 93,75  
b) 8,333... d) 93

**44.** (UFPA) O conjunto solução da equação

$$\frac{3}{2(x+2)} = \frac{1}{2x-4} - \frac{2}{x^2-4} \text{ é:}$$

a) {2} b) {3} c)  $\emptyset$  d) {4} e) {1}

# Capítulo IV

## FUNÇÃO DO 2º GRAU

**1. Introdução** Se você gosta de esportes, provavelmente deve se lembrar do saque “Jornada nas Estrelas”. Neste saque, o jogador dá um impulso inicial à bola de baixo para cima, fazendo com que atinja a altura de cerca de 15 metros, caindo diretamente no campo adversário. A trajetória percorrida pela bola é uma curva denominada *parábola*. Algebricamente, essa curva representa uma função do 2º grau.

Em cerca de 2000 a.C., matemáticos babilônios já resolviam algumas equações de 2º grau. Nessa época, utilizavam regras ou figuras nas resoluções, já que não se utilizavam de letras simbolizando números e, conseqüentemente, não tinham fórmulas.

Foi o matemático hindu Bhaskara que encontrou a resolução da equação de 2º grau sem recorrer a figuras, mas somente no século XVI, quando o matemático francês François Viète começou a usar letras simbolizando coeficientes e incógnitas, a fórmula de Bhaskara adquiriu o formato que conhecemos hoje.

### 2. Definição

Chama-se função do 2º grau ou *função quadrática*, de domínio  $\mathbb{R}$  e contra-domínio  $\mathbb{R}$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais e  $a \neq 0$ .

$a$  é o coeficiente de  $x^2$

$b$  é o coeficiente de  $x$

$c$  é o termo independente

Chama-se *função completa* àquela em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  não são nulos, e *função incompleta* àquela em que  $b$  ou  $c$  são nulos.

Observe os exemplos:

1)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  é função quadrática completa onde  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = -1$ .

2)  $f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{1}{5}$  é função quadrática completa onde  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -2$  e  $c = \frac{1}{5}$ .

3)  $y = 2x^2 - 8$  é função quadrática incompleta onde  $a = 2$ ,  $b = 0$  e  $c = -8$ .

4)  $y = \frac{x^2}{4} + 3x$  é função quadrática incompleta onde  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = 3$  e  $c = 0$ .

5)  $f(x) = -3x^2$  é função quadrática incompleta onde  $a = -3$  e  $b = c = 0$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Em cada caso, determine  $m$  para que a função seja do 2º grau.

a)  $y = (2m + 1)x^2 + 3x - 1$

**Resolução:** Pela definição, a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é quadrática se  $a \neq 0$ . Por comparação, no exercício,  $a = 2m + 1$ , então:

$$2m + 1 \neq 0 \Rightarrow 2m \neq -1 \Rightarrow m \neq \frac{-1}{2}$$

b)  $f(x) = \left(\frac{m}{3} - \frac{4}{5}\right)x^2 + 5$ . **Resolução:**

$$\frac{m}{3} - \frac{4}{5} \neq 0$$

$$\frac{m}{3} \neq \frac{4}{5}$$

$$5m \neq 12$$

$$m \neq \frac{12}{5}$$

### Exercício proposto:

1. Em cada caso, determine  $K$  para que a função seja do 2º grau:

a)  $y = (-K + 1)x^2 - 2x - 1$  c)  $y = (-3K + 15)x^2 + 4x - 1$

b)  $f(x) = \left(\frac{K}{5} + 7\right)x^2$

d)  $f(x) = Kx^2 + 3x - 7$

**3. Raízes da função do 2º grau** Analogamente à função do 1º grau, para encontrar as raízes da função quadrática, devemos igualar  $f(x)$  a zero. Teremos, então:  $ax^2 + bx + c = 0$

A expressão assim obtida denomina-se *equação do 2º grau*. As raízes da equação são determinadas utilizando-se a *fórmula de Bhaskara*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta$  (letra grega: delta) é chamado de *discriminante* da equação. Note que o discriminante terá um valor numérico, do qual temos que extrair a raiz quadrada. Neste caso temos três casos a considerar:

- se  $\Delta$  é um número negativo ( $\Delta < 0$ ), não é possível extrair a raiz quadrada. Dizemos então que a equação não possui raízes reais, e simbolizamos por:  $\nexists x \in \mathbb{R}$ ;
- se  $\Delta = 0$  então  $\sqrt{\Delta} = 0$ . Neste caso a equação possui duas raízes reais e iguais:  $x = \frac{-b}{2a}$ ;
- se  $\Delta$  é um número positivo ( $\Delta > 0$ ), teremos duas raízes reais e distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Resumindo, temos:

$\Delta > 0 \Rightarrow$  duas raízes reais e distintas;  
 $\Delta = 0 \Rightarrow$  duas raízes reais e iguais;  
 $\Delta < 0 \Rightarrow$  não existem raízes reais ( $\nexists x \in \mathbb{R}$ ).

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva as equações do 2º grau:

a)  $-7x^2 + 6x + 1 = 0$

**Resolução:** Sempre que tivermos uma equação completa, utilizaremos a fórmula de Bhaskara para resolver:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 1 \Rightarrow \Delta = 36 + 28 = 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm 8}{-14} \begin{cases} x_1 = \frac{-6 + 8}{-14} = \frac{2}{-14} = \frac{-1}{7} \\ x_2 = \frac{-6 - 8}{-14} = \frac{-14}{-14} = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{-1}{7}, 1 \right\}$$

b)  $x^2 - 5x + 4 = 0$

Resolução:  $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9$

$$\sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$S = \{1, 4\}$$

c)  $x^2 - 3x = 0$

Resolução: Nas equações incompletas onde  $c = 0$ , pode-se aplicar a fórmula de Bhaskara, ou fatora-se, colocando  $x$  em evidência:  $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 3) = 0$

Se um produto é zero, então pelo menos um dos fatores é zero:

$$x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{0, 3\}$$

d)  $x^2 - 81 = 0$

Resolução: Nas equações incompletas onde  $b = 0$ , pode-se aplicar a fórmula, porém é mais simples isolar o  $x$  no primeiro membro e lembrar que teremos duas soluções, pois  $c$  é um número negativo.

$$x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 = 81$$

$$\text{Sabemos que } (-9)^2 = 81 \text{ e } 9^2 = 81, \text{ então } x = \pm 9 \Rightarrow S = \{-9, 9\}$$

2. Determinar as raízes de cada uma das funções:

a)  $f(x) = -2x^2 + x - 5$

Resolução: Para determinar as raízes de uma função, basta igualá-la a zero, e resolver a equação obtida:  $-2x^2 + x - 5 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) \Rightarrow \Delta = 1 - 40 \Rightarrow \Delta = -39$$

Como  $\Delta$  é negativo ( $\Delta < 0$ ), não existe solução real, então:  $S = \emptyset$

b)  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$

$$\text{Resolução: } \frac{x^2}{2} + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\Delta = 4 - 4 \Rightarrow \Delta = 0. \text{ Duas raízes reais e iguais}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow S = \{-2\}$$

$$c) y = -4x^2 + \sqrt{10}x + 5$$

$$\text{Resolução: } -4x^2 + \sqrt{10}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (\sqrt{10})^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 5 = 10 + 80 = 90$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{90} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{2 \cdot 5} \therefore \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{10}$$

$$x = \frac{-\sqrt{10} \pm 3\sqrt{10}}{2 \cdot (-4)} \begin{cases} x_1 = \frac{2\sqrt{10}}{-8} = \frac{-\sqrt{10}}{4} \\ x_2 = \frac{-4\sqrt{10}}{-8} = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{-\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$$

3. Determine o valor de  $p$  para que a função  $y = px^2 + 2x - 1$  tenha:

- a) duas raízes reais e distintas, b) duas raízes reais e iguais e  
c) não tenha raízes reais

**Resolução:** a) Para que a função tenha duas raízes reais e distintas  $\Delta$  deve ser um número positivo. Temos então:  $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) > 0 \Rightarrow 4 + 4p > 0 \Rightarrow 4p > -4$

$$\boxed{p > -1}$$

b) Para que a função tenha duas raízes reais e iguais  $\Delta$  deve ser igual a zero, portanto:  $\Delta = 0 \Rightarrow 4 + 4p = 0 \Rightarrow 4p = -4 \Rightarrow \boxed{p = -1}$

c) Para que a função não tenha raízes reais,  $\Delta$  deve ser um número negativo, então:  $\Delta < 0 \Rightarrow 4 + 4p < 0 \Rightarrow 4p < -4 \Rightarrow \boxed{p < -1}$

### **Exercícios propostos:**

2. Resolva as equações:

a)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

d)  $x^2 + 3x + 5 = 0$

g)  $x^2 + 5x - 6 = 0$

b)  $7x^2 + 6x + 2 = 0$

e)  $16x^2 - 9 = 0$

c)  $-6x^2 + 12x = 0$

f)  $x^2 - 8x - 9 = 0$

3. Determine as raízes das funções:

a)  $f(x) = 5x^2 - 4x$

d)  $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

b)  $y = x^2 - 6x - 3$

e)  $y = x^2 - 6x + 8$

c)  $y = x^2 - 3x - 10$

4. Determine  $k$  de modo que a função  $y = 2x^2 - x + k$  tenha duas raízes reais e diferentes.

5. Determine  $m$  de modo que a função  $y = x^2 + mx + \frac{1}{4}$  tenha duas raízes reais e iguais.

6. Determine  $p \neq 0$  de modo que a função  $f(x) = px^2 - 4x + 1$  não tenha raízes reais.

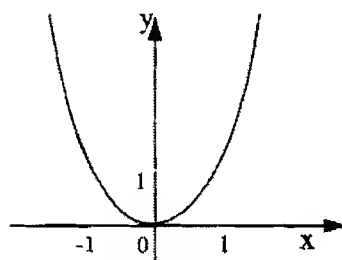
#### 4. Gráfico da função de 2º grau

a) **Concavidade da parábola:** Graficamente, a função de 2º grau, de domínio  $\mathbb{R}$ , é representada por uma curva denominada *parábola*.

No momento, vamos construir gráficos atribuindo valores à abscissa ( $x$ ) e calculando o respectivo valor da ordenada ( $y$ ).

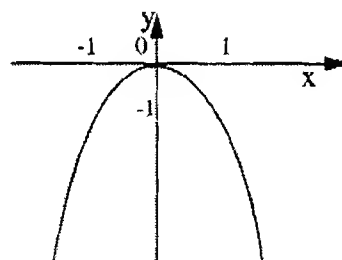
Vamos construir o gráfico de  $y = x^2$ . Atribuindo e tabelando alguns valores, temos:

X	Y
-1	1
0	0
1	1



Façamos agora o gráfico da função  $y = -x^2$ .

x	y
-1	-1
0	0
1	-1



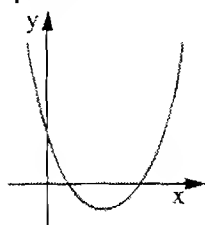
Note que em  $y = x^2$  o coeficiente de  $x^2$  é 1 ( $a = 1$ ) e a parábola tem a concavidade voltada para cima; em  $y = -x^2$  o coeficiente de  $x^2$  é  $-1$  ( $a = -1$ ) e a parábola tem a concavidade voltada para baixo. De modo geral, o sinal de  $a$  determina a posição da concavidade da parábola:

Dada a função  $y = ax^2 + bx + c$ , cujo gráfico é uma parábola, se:

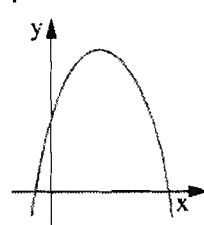
$a > 0 \rightarrow$  concavidade voltada

$a < 0 \rightarrow$  concavidade voltada

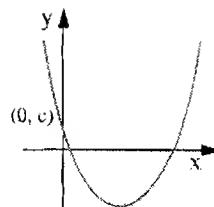
para cima



para baixo



**b) O termo independente:** Na função  $y = ax^2 + bx + c$ , se  $x = 0$  temos  $y = c$ . Os pontos em que  $x = 0$  estão no eixo Oy, isto significa que o ponto  $(0, c)$  é onde a parábola "corta" o eixo Oy.



**c) Raízes da função:** Graficamente, as raízes da função de 2º grau são os pontos onde a parábola corta o eixo Ox. Temos então três casos a considerar:

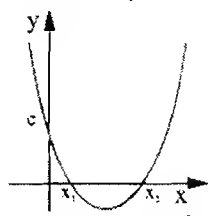
- se  $\Delta > 0$ , a função tem duas raízes reais e distintas, neste caso a parábola "corta" o eixo Ox em *dois pontos*.
- se  $\Delta = 0$ , a função tem duas raízes reais e iguais, neste caso a parábola "corta" o eixo Ox em *um único ponto*.
- se  $\Delta < 0$ , a função não tem raízes reais, neste caso a parábola *não "corta" o eixo Ox*.

Considerando os sinais do discriminante ( $\Delta$ ) e do coeficiente de  $x^2$ , teremos os seguintes gráficos para a função  $y = ax^2 + bx + c$ .

**1º caso)  $\Delta > 0$**  (duas raízes reais e distintas,  $x_1 \neq x_2$ )

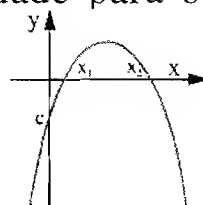
$a > 0$

(concavidade para cima)



$a < 0$

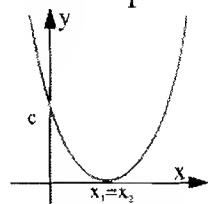
(concavidade para baixo)



**2º caso)  $\Delta = 0$**  (duas raízes reais e iguais,  $x_1 = x_2$ )

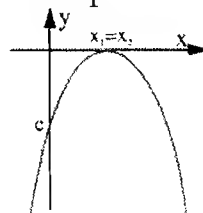
$a > 0$

(concavidade para cima)



$a < 0$

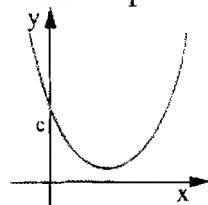
(concavidade para baixo)



**3º caso)  $\Delta < 0$**  (não tem raiz real,  $\nexists x \in \mathbb{R}$ )

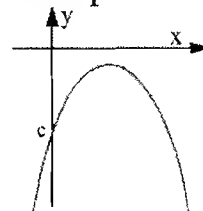
$a > 0$

(concavidade para cima)



$a < 0$

(concavidade para baixo)





### Exercícios resolvidos:

1. Determinar  $k$  para que a parábola cuja função é

$$y = \left(\frac{k}{3} + 7\right)x^2 + 2x - 1 \text{ tenha: a) concavidade voltada para cima;}$$

b) concavidade voltada para baixo.

**Resolução:** a) Queremos que a concavidade esteja voltada para cima. Neste caso o coeficiente de  $x^2$  deve ser positivo, então:

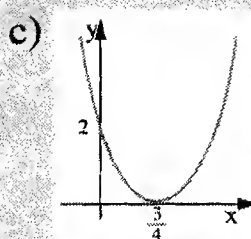
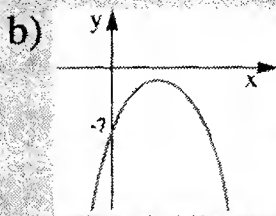
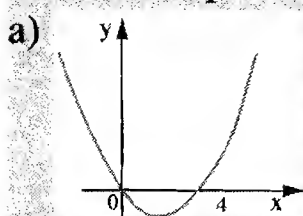
$$\frac{k}{3} + 7 > 0 \Rightarrow \frac{k}{3} > -7 \Rightarrow \boxed{k > -21}$$

b) Queremos que a concavidade esteja voltada para baixo. Neste caso o coeficiente de  $x^2$  deve ser negativo:

$$\frac{k}{3} + 7 < 0 \Rightarrow \boxed{k < -21}$$

2. Analisando cada um dos gráficos de funções quadráticas, identifique:

① sinal do discriminante; ② as raízes da função e ③ o valor do termo independente.



**Resolução:**

a) ① como a parábola intercepta o eixo  $Ox$  em dois pontos, o discriminante é positivo ( $\Delta > 0$ ); ② as raízes são 0 e 4; ③ a parábola corta o eixo  $Oy$  no ponto  $(0, 0)$ , então  $c = 0$ .

b) ① a parábola não "corta" o eixo  $Ox$ , então  $\Delta < 0$ ; ② sendo  $\Delta < 0$  a função não possui raízes reais; ③  $c = -7$ .

c) ① a parábola intercepta o eixo  $Ox$  em um único ponto, então  $\Delta = 0$ ; ② o ponto de intersecção da parábola com o eixo  $Ox$  é  $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ , então a raiz é  $\frac{3}{4}$ ; ③  $c = 2$ .

3. Sabe-se que a função  $y = ax^2 + bx + 1$  tem como raízes  $-1$  e  $\frac{1}{2}$ . Determine a função.

**Resolução:** Se as raízes são  $x = -1$  e  $x = \frac{1}{2}$ , então para estes valores temos  $y = 0$ . Substituímos  $x = -1$  e  $y = 0$  em  $y = ax^2 + bx + 1$

$$0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 \Rightarrow 0 = a - b + 1 \Rightarrow \boxed{a - b = -1}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ e } y = 0 \text{ em } y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow 0 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + 1$$

$$0 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + 1 \Rightarrow 0 = \frac{a + 2b + 4}{4} \Rightarrow a + 2b + 4 = 0$$

$$\boxed{a + 2b = -4}$$

Para determinar  $a$  e  $b$  temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = -4 \\ a - b = -1 \end{cases} \quad (\text{multiplicamos esta equação por } -1)$$

$$+ \begin{cases} a + 2b = -4 \\ -a + b = 1 \end{cases} \quad (\text{somamos as duas equações})$$

$$0 + 3b = -3 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$
 Substituímos em

$$a - b = -1 \Rightarrow a - (-1) = -1 \Rightarrow a + 1 = -1 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Substituindo os valores de  $a$  e  $b$  em  $y = ax^2 + bx + 1$ , temos:

$$\boxed{y = -2x^2 - x + 1}$$

### Exercícios propostos:

7. Para cada função quadrática, determine  $p$  de modo que:

① a concavidade da parábola esteja voltada para cima;

② a concavidade da parábola esteja voltada para baixo.

a)  $y = (2p - 4)x^2 + 2x - 1$

c)  $y = (p + 23)x^2 + 3x - 10$

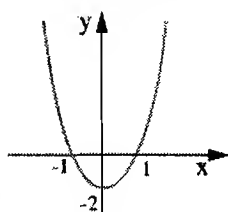
b)  $y = \left(\frac{p}{2} + 9\right)x^2 - x + 7$

d)  $y = (-2p + 12)x^2 + 3x - 5$

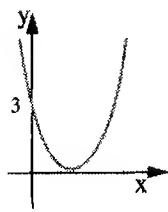
8. Em cada gráfico, identifique:

① o sinal do discriminante; ② as raízes da função e ③ o valor do termo independente.

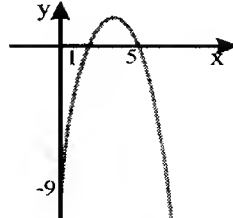
a)



b)



c)



9. As raízes da função  $y = ax^2 + bx + 3$  são  $-2$  e  $3$ .

Determine  $a$  e  $b$ .

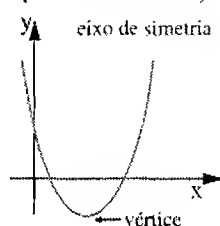
10. A parábola determinada pela função  $y = mx^2 + nx - 1$  passa pelos pontos  $(-2, 0)$  e  $(3, 2)$ . Determine  $m$  e  $n$ .

**5. Vértice da parábola. Máximos e mínimos da função** Para construir o gráfico de uma função de 2º grau, podemos atribuir valores aleatórios a  $x$ , calcular  $y$ , marcar os pontos no plano cartesiano e uni-los formando uma parábola. Esse método é válido, porém nem sempre eficiente, podendo gerar erros. Para construir com segurança gráficos de funções quadráticas, vamos utilizar pontos específicos:

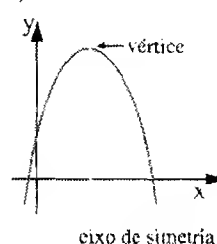
- as raízes da função;
- o termo independente;
- o vértice da parábola.

Observe os vértices no gráficos abaixo:

se  $a > 0$  (concavidade voltada para cima)



se  $a < 0$  (concavidade voltada para baixo)



O vértice da parábola será:

- o ponto mínimo se a concavidade estiver voltada para cima ( $a > 0$ );
- o ponto máximo se a concavidade estiver voltada para baixo ( $a < 0$ ).

A reta paralela ao eixo Oy que passa pelo vértice da parábola é chamada de eixo de simetria.

**a) Coordenadas do vértice:** Para determinarmos o vértice da função de 2º grau,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , cuja representação gráfica é uma parábola, recordemos a relação da soma das raízes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \\ &= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Considerando que  $x_v$  é o ponto médio entre as raízes, temos:

$$x_{\text{vértice}} = x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-b}{2a}}$$

Substituímos  $\frac{-b}{2a}$  na função:  $y_{\text{vértice}} = y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$

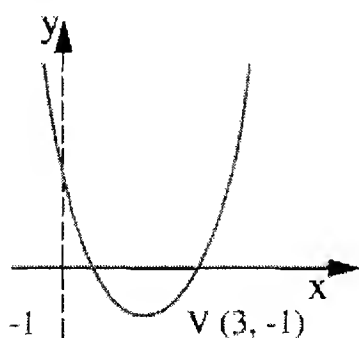
$$y_v = \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + \left(\frac{-b^2}{2a}\right) + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \therefore \boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

De onde concluímos que as coordenadas do vértice são:

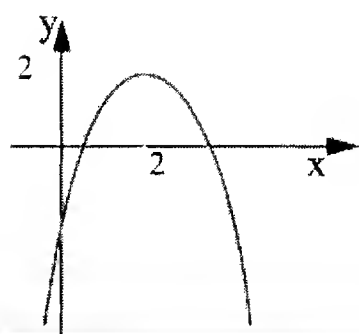
$$\boxed{V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)}$$

**b) Conjunto imagem:** Conhecendo a ordenada do vértice da parábola é possível determinar o conjunto imagem da função. Observe os exemplos:



Nesse exemplo a parábola tem concavidade voltada para cima, portanto, o vértice é o ponto mínimo da função. Se projetarmos qualquer ponto da parábola sobre o eixo Oy, obteremos valores de y maiores ou igual a -1, conforme mostra a figura; neste caso o conjunto imagem é:

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}.$$



Nesse exemplo, a parábola tem concavidade voltada para baixo, então o vértice é ponto máximo da função. Ao projetarmos qualquer ponto sobre o eixo Oy, teremos valores de y menores ou igual a 2. O conjunto imagem será:

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}.$$

### Exercícios resolvidos:

1. Construir os gráficos de cada função, determinando o respectivo conjunto imagem:

a)  $y = 2x^2 - 3x + 1$

**Resolução:** 1º passo: Determinar as raízes da função, igualando-a a zero.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1 \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm 1}{2 \cdot 2}$$

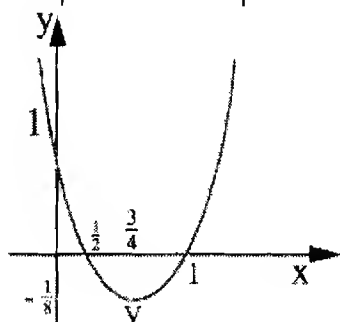
$$x = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

portanto, a parábola corta o eixo Ox nos pontos  $(1, 0)$  e  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2º passo: Determinar o vértice da parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4 \cdot 2} = \frac{-1}{8} \therefore V = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{8}\right)$$

3º passo: O ponto em que a parábola corta o eixo Oy é  $c = 1$ .



Como  $a = 2$  ( $a$  é positivo) a concavidade da parábola está voltada para cima. Note que, ao projetarmos qualquer ponto da parábola sobre o eixo Oy, encontraremos sempre valores

de  $y$  maiores ou igual a  $\frac{-1}{8}$ .

$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-1}{8} \right\}$$

b)  $y = \frac{-x^2}{3} + x - 9$

Resolução: 1º passo: Determinar as raízes.

$$\frac{-x^2}{3} + x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4\left(\frac{-1}{3}\right)(-9) \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11$$

Como  $\Delta < 0$ , não existem raízes reais que satisfaçam a equação, então a parábola não intercepta o eixo Ox. Observe que  $a = \frac{-1}{3}$ , portanto a parábola tem concavidade voltada para baixo, e estará abaixo do eixo Ox. Note que a função não possui raízes reais, porém existe um gráfico para representá-la.

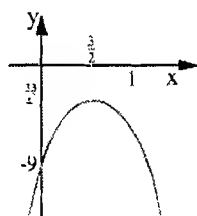
2º passo: Determinar o vértice da parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2\left(\frac{-1}{3}\right)} = \frac{-1}{\frac{-2}{3}} = -1 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(-11)}{4\left(\frac{-1}{3}\right)} = \frac{11}{\frac{-4}{3}} = 11 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-33}{4}$$

$$V = \left(\frac{3}{2}, \frac{-33}{4}\right)$$

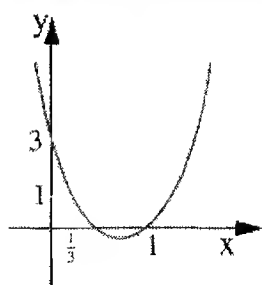
3º passo: O ponto em que a parábola corta o eixo Oy é  $c = -9$ .

O gráfico será:



$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{33}{4} \right\}$$

2. Determinar a função representada pelo gráfico abaixo.



**Resolução:** Como se trata de uma parábola, sabemos que a função procurada é do tipo:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Temos, então, que determinar os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Imediatamente, concluímos que  $c = 3$ , pois nesse ponto a parábola "corta" o eixo Oy.

Observe que o ponto  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$  pertence ao gráfico.

Substituindo  $x$  por  $\frac{1}{3}$  e  $y$  por 1 na expressão geral, temos:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 1 = a\left(\frac{1}{3}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{3} + 3$$

$$1 = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + 3 \Rightarrow \frac{a}{9} + \frac{b}{3} = 1 - 3 \Rightarrow \frac{a}{9} + \frac{b}{3} = -2$$

$$\frac{a + 3b}{9} = \frac{-18}{9} \Rightarrow a + 3b = -18$$

Uma das raízes da função é  $x = 1$ . Portanto, substituindo esse valor de  $x$  no ponto  $y = 0$ , temos:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a(1)^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b = -3$$

Para determinar  $a$  e  $b$  temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 3b = -18 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

Da segunda equação deduzimos que  $a = -3 - b$ . Substituímos esse valor de  $a$  na primeira equação:

$$a + 3b = -18 \Rightarrow -3 - b + 3b = -18 \Rightarrow 2b = -18 + 3$$

$$2b = -15 \Rightarrow b = -\frac{15}{2}$$

Como  $a = -3 - b$ , substituindo o valor de  $b$ , temos:

$$a = -3 - \left(-\frac{15}{2}\right) = -3 + \frac{15}{2} = \frac{-6 + 15}{2} \therefore a = \frac{9}{2}$$

A função procurada é:  $y = \frac{9x^2}{2} - \frac{15x}{2} + 3$

3. Determine  $p$  para que o ponto  $(-2, -3)$  seja vértice da parábola  $y = 2x^2 - px + 5$ .

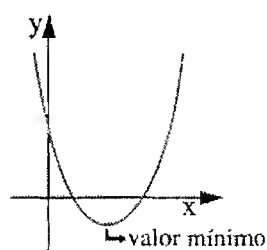
*Resolução:* Queremos que a abscissa do vértice seja  $-2$ , então:

$$\frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow \frac{-(-p)}{2 \cdot 2} = -2$$

$$\frac{p}{4} = -2 \Rightarrow \boxed{p = -8}$$

4. Determine  $k$  para que a função:  $y = \left(\frac{-3}{2}k + 3\right)x^2 - x - 3$  tenha valor mínimo.

*Resolução:* A função terá valor mínimo se a concavidade estiver voltada para cima. Para que isso aconteça o coeficiente de  $x^2$  deve ser positivo. Temos então:



$$\frac{-3}{2}k + 3 > 0$$

$$\frac{-3}{2}k > -3$$

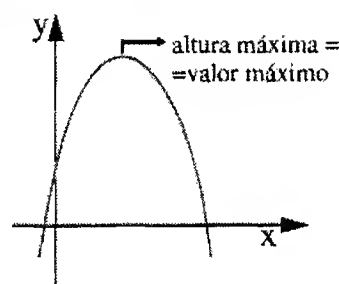
$$-3k > -6$$

(multiplica-se por  $-1$ , alterando o sinal da desigualdade)

$$3k < 6 \Rightarrow \boxed{k < 2}$$

5. (UFRS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por  $y = -2x^2 + 12x$ , onde  $y$  é a altura, dada em metros. A altura máxima atingida pela bola é de: a) 36 m b) 18 m c) 12 m d) 6 m e) 3 m.

*Resolução:* Note que  $a = -2$ , portanto a parábola que representa a trajetória da bola tem concavidade voltada para baixo. Neste caso, a ordenada do vértice ( $y_v$ ) será a altura máxima atingida pela bola (valor máximo da função), conforme mostra a figura:



$$\text{altura máxima} \Rightarrow y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{-8} = 18$$

**Alternativa correta: b**

6. (UFSC) As dimensões de um retângulo são dadas, em centímetros, pelas expressões:  $2x$  e  $(10 - 2x)$  com  $0 < x < 5$ . Determinar,

70

neste caso, o valor máximo da área em  $\text{cm}^2$ , que esse retângulo pode assumir.

**Resolução:** A área de um retângulo é obtida pelo produto de seus lados, então

$$\text{área} \Rightarrow A = 2x \cdot (10 - 2x) \Rightarrow A = 20x - 4x^2 \Rightarrow A = -4x^2 + 20x$$

A expressão que fornece a área do retângulo é uma função quadrática, cuja parábola tem concavidade voltada para baixo ( $a = -4$ ). Assim, o valor máximo da área é o valor máximo da função, obtido pela ordenada do vértice:

$$A_{\text{máxima}} = y_v = \frac{-\Delta}{4a}; \text{ como } \Delta = 400, A_{\text{máxima}} = \frac{-400}{-16} \Rightarrow \boxed{A_{\text{máxima}} = 25 \text{ cm}^2}$$

### Exercícios propostos:

**11.** Determine as coordenadas do vértice de cada função:

a)  $y = -x^2 + 2x - 1$

d)  $y = x^2 + 3x - 2$

b)  $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x + 4$

e)  $f(x) = -4x^2 + 2x$

c)  $y = 5x^2 - x + 1$

**12.** Faça o gráfico de cada uma das funções, determinando o respectivo conjunto imagem:

a)  $y = x^2 - 9$

d)  $y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$

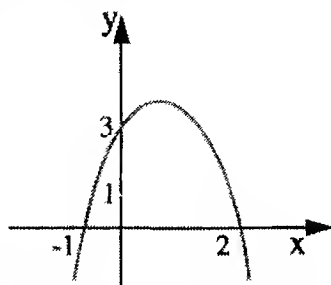
b)  $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

e)  $y = x^2$

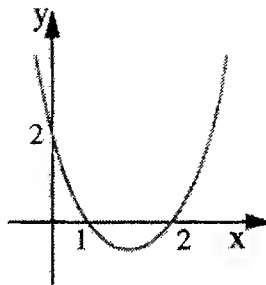
c)  $y = -x^2 + 2x$

**13.** Determine a função quadrática que representa cada um dos gráficos:

a)



b)



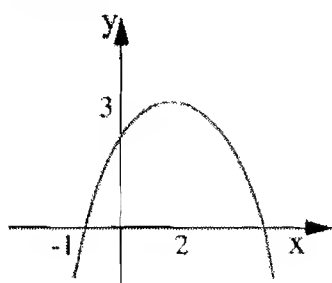
**14.** Determine  $p$  tal que a função  $y = x^2 + 2x - p$  assumo valor mínimo igual a 2.

**15.** Determine  $m$  para que o vértice da parábola representada pela função  $y = (2m + 1)x^2 + x - 1$  tenha abscissa 1.

**16.** Determine  $m$  para que a função  $y = (3m + 81)x^2 - x + 1$  tenha valor máximo.



**17.**(UFRJ) A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau.



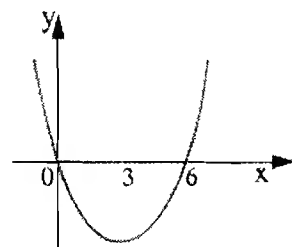
Determine o trinômio.

**18.**(UFMG) Seja  $b > 0$ . Se o sistema  $\begin{cases} y = bx - x^2 \\ y = 4 \end{cases}$  tem solução única, conclui-se que o vértice da parábola de equação  $y = -bx + x^2$  é:

a)  $(-2, -4)$  b)  $(-2, 4)$  c)  $(2, 0)$  d)  $(2, -4)$  e)  $(0, 4)$

(Sugestão: se o sistema tem solução única, então a equação  $-x^2 + bx = 4$  tem  $\Delta = 0$ . Determina-se, assim, o valor de  $b$ . Este valor deve ser substituído na equação  $y = -bx + x^2$ , calculando-se o vértice).

**19.**(UFMS) Considerando que o gráfico a seguir representa a função quadrática do tipo  $y = ax^2 + bx$ , determine a soma dos números associados à(s) afirmativa(s) VERDADEIRA(S):



01. O gráfico representa a função  $y = x^2 - 6x$ .

02. A ordenada do vértice que representa o valor mínimo da função é  $-9$ .

04. A abscissa do vértice é  $3,5$ .

08. A função é positiva para  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 6\}$ .

16. O domínio da função é  $\mathbb{R}$ .

32. O gráfico da função corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 0)$ .

**20.**(UFPA) O vértice da parábola  $y = x^2 + ax + b$  é o ponto  $(-1, -4)$ . O valor de  $ab$ , é:

a) 6 b)  $-6$  c) 1 d)  $-1$  e) 0

**6. Estudo do sinal da função do 2º grau** Estudar o sinal da função quadrática é determinar os valores de  $x$  para que  $y$  seja: positivo, negativo ou zero. Para isso temos que considerar três casos possíveis:

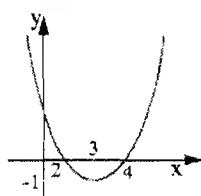
a)  $\Delta > 0$ , com duas raízes reais e distintas

Observe os exemplos:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$\text{raízes} \Rightarrow x = 4 \text{ e } x = 2$$

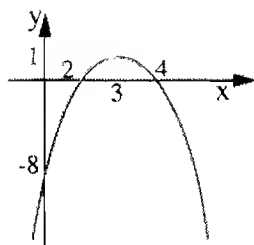
$$\text{vértice} \Rightarrow (3, -1)$$



$$g(x) = -x^2 + 6x - 8$$

$$\text{raízes} \Rightarrow x = 4 \text{ e } x = 2$$

$$\text{vértice} \Rightarrow (3, 1)$$



Observando o gráfico de  $f(x)$ ,

$$\text{temos } a > 0 \text{ e: } \begin{cases} x < 2 \text{ ou } x > 4 \Rightarrow y > 0 \\ 2 < x < 4 \Rightarrow y < 0 \end{cases}$$

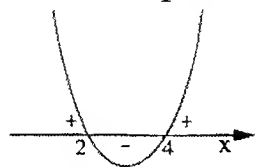
Observando o gráfico de  $g(x)$ ,

$$\text{temos } a < 0 \text{ e: } \begin{cases} x < 2 \text{ ou } x > 4 \Rightarrow y < 0 \\ 2 < x < 4 \Rightarrow y > 0 \end{cases}$$

Com base nestes dados, podemos utilizar esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$ , conhecendo as raízes e os sinais de  $a$ :

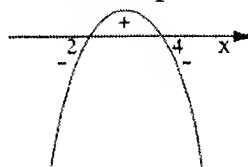
$f(x)$  tem  $a > 0$

(concavidade para cima)

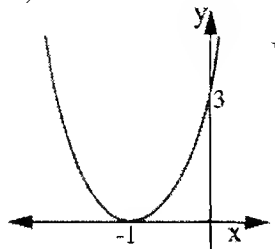


$g(x)$  tem  $a < 0$

(concavidade para baixo)

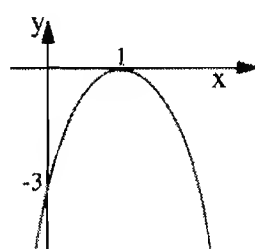


b)  $\Delta = 0$ , com duas raízes reais e iguais



$$f(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

$$\Delta = 0; \text{ raiz} \Rightarrow x = -1$$



$$g(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

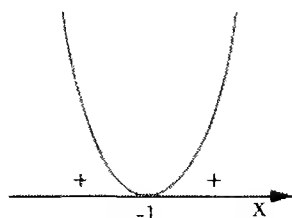
$$\Delta = 0; \text{ raiz} \Rightarrow x = 1$$

Em  $f(x)$ , como  $a > 0$ , a concavidade está voltada para cima, e a parábola está acima do eixo  $Ox$ , portanto, para qualquer valor de  $x$ ,  $f(x)$  é sempre positiva:  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$ ; se  $x = -1$  então  $y = 0$ .

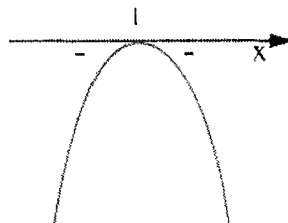
Em  $g(x)$ , como  $a < 0$ , a concavidade está voltada para baixo e a parábola está abaixo do eixo  $Ox$ , portanto, para qualquer valor de  $x$ ,  $g(x)$  é sempre negativa:  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$ ; se  $x = 1$  então  $y = 0$ .

Para cada caso podemos fazer um esboço, utilizando a raiz da função e o sinal de  $a$ .

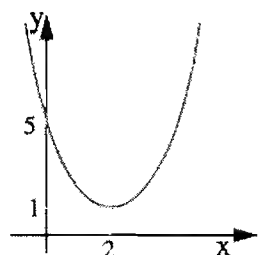
$f(x)$  tem  $a > 0$   
(concavidade para cima)



$g(x)$  tem  $a < 0$   
(concavidade para baixo)



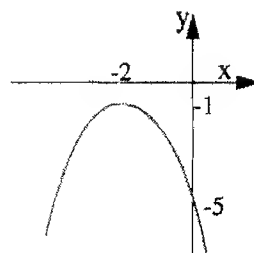
c)  $\Delta < 0$ , sem raízes reais



$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\Delta = -4$$

$$\text{vértice} \Rightarrow (2, 1)$$



$$g(x) = -x^2 - 4x - 5$$

$$\Delta = -4$$

$$\text{vértice} \Rightarrow (-2, -1)$$

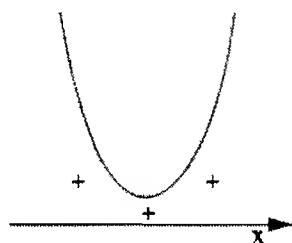
Observe que em  $f(x)$ , como  $a > 0$ , a parábola tem concavidade voltada para cima e está totalmente acima do eixo  $Ox$ . Neste caso, o sinal de  $f(x)$  é sempre positivo. Porém, em  $g(x)$ , como  $a < 0$ , a concavidade da parábola está voltada para baixo e está totalmente abaixo do eixo  $Ox$ . Assim, o sinal de  $g(x)$  é sempre negativo:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0$$

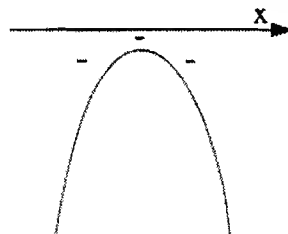
$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) < 0$$

Sabendo que o discriminante é negativo, precisamos somente do sinal de  $a$  para fazer o esboço dos gráficos e concluir o sinal de  $y$ . Se  $a > 0$ , a função tem sinal positivo; se  $a < 0$  a função tem sinal negativo. Observe os sinais de  $f(x)$  e  $g(x)$  em seus respectivos esboços:

$f(x)$  tem  $a > 0$   
(concavidade para cima)



$g(x)$  tem  $a < 0$   
(concavidade para baixo)



Com base nesses exemplos, podemos extrair uma regra para estudar o sinal da função quadrática.

## Regra prática para o estudo do sinal da função de 2º grau

Dada a função  $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ , para saber os sinais de  $y$  determinamos as raízes (se existirem) e analisamos o valor do discriminante. Poderemos ter:

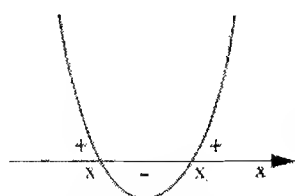
a) Se  $\Delta > 0$  então as raízes são  $x_1 \neq x_2$ :

se  $a > 0$  temos

$$x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \Rightarrow y > 0$$

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow y < 0$$

$$x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \Rightarrow y = 0$$

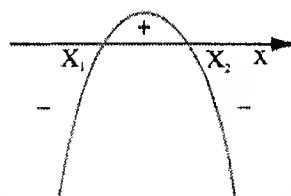


se  $a < 0$  temos

$$x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \Rightarrow y < 0$$

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow y > 0$$

$$x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \Rightarrow y = 0$$

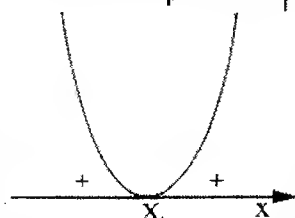


b) Se  $\Delta = 0$  então as raízes são  $x_1 = x_2$ :

se  $a > 0$  temos:

$$x = x_1 \Rightarrow y = 0$$

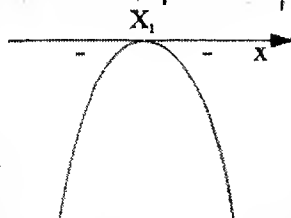
$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq x_1 \Rightarrow y > 0$$



se  $a < 0$  temos:

$$x = x_1 \Rightarrow y = 0$$

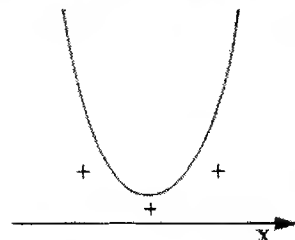
$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq x_1 \Rightarrow y < 0$$



c) Se  $\Delta < 0$  então não existem raízes reais:

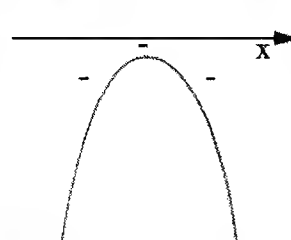
se  $a > 0$  temos

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$$



se  $a < 0$  temos

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$$



### Exercícios resolvidos:

1. Estude o sinal de cada função:

a)  $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

**Resolução:** Inicialmente determinamos as raízes da função:

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{raiz } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

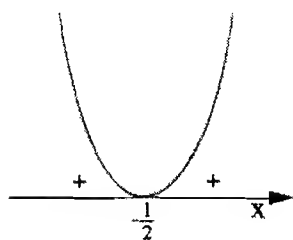
Como  $a = 1$ , a concavidade da parábola está voltada para cima.

Temos, então:

Os sinais da função são:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow y > 0$$



b)  $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$

**Resolução:** Determinamos o discriminante:

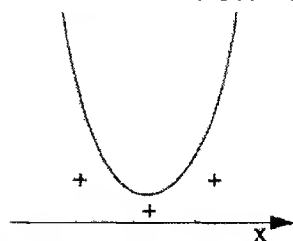
$$\Delta = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 36 - 40 = -4 \Rightarrow \text{Como } \Delta < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Sendo  $a = 5$ , a concavidade da parábola está

voltada para cima, então

Concluimos que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$$



c)  $y = -2x^2 + 18$

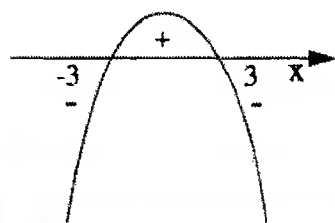
**Resolução:** Inicialmente determinamos as raízes:

$$-2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Como temos duas raízes distintas, o discriminante é positivo e, como

$a = -2$ , a concavidade da parábola está voltada para baixo. Temos:

Os sinais da função são:



$$\begin{cases} x < -3 \text{ ou } x > 3 \Rightarrow y < 0 \\ -3 < x < 3 \Rightarrow y > 0 \\ x = -3 \text{ ou } x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

### ≡ Exercício proposto:

21. Estude o sinal de cada função: a)  $y = 3x^2 - 2x - 3$ ; b)  $f(x) = -x^2 + 16$ ; c)  $y = -x^2 + 2x - 2$ ; d)  $y = 10x^2 + 2x + 1$ ; e)  $y = -3x^2 + 2x + 1$ ; f)  $f(x) = -x^2$ ; g)  $y = 5x^2$

## 7. Inequações do 2º grau

Considere a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde  $a \neq 0$  e  $a, b, c$  são números reais. A inequação do 2º grau é toda desigualdade tal que:  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \geq 0$ , ou  $f(x) \leq 0$ .

Resolver uma inequação quadrática é determinar o conjunto de valores de  $x$  que satisfaçam a desigualdade pedida.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva as inequações:

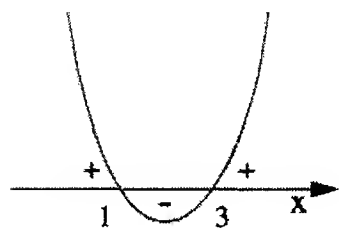
a)  $x^2 - 4x + 3 > 0$

**Resolução:** Para resolver esta inequação devemos fazer o estudo do sinal da função e determinar os valores de  $x$  para que a função seja positiva. Estudo do sinal: Começamos por determinar as raízes, igualando a função a zero:  $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{2 \cdot 1} \begin{cases} x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

As raízes são 1 e 3 e, como  $a = 1$ , a concavidade da parábola está voltada para cima. Os sinais da função são:



Na inequação inicial  $x^2 - 4x + 3 > 0$ , queremos os valores de  $x$  para que a função seja positiva, portanto a solução são os intervalos em que aparece esse sinal:

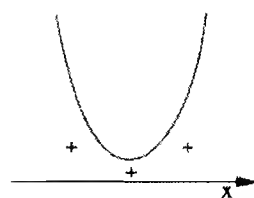
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$$

b)  $3x^2 - x + 1 \leq 0$

**Resolução:** Estudo do sinal:  $3x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

A função não possui raízes reais e, como  $a = 3$ , a concavidade está voltada para cima. Os sinais são:



Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  a função é sempre positiva. A inequação a ser resolvida é:  $3x^2 - x + 1 \leq 0$

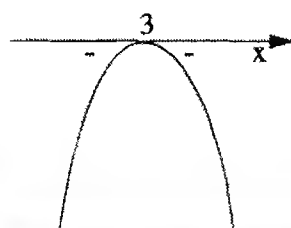
Queremos determinar os valores de  $x$  para que a função seja menor ou igual a zero. Como a função é sempre positiva, não há solução para essa inequação, então  $S = \emptyset$

c)  $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

**Resolução:** No estudo do sinal, igualamos a função a zero para determinar as raízes:  $-x^2 + 6x - 9 = 0$

$$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 0}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

A única raiz é 3 e, como  $a = -1$ , a concavidade está voltada para baixo. Os sinais são:



A inequação em questão é:  $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

Queremos determinar os valores de  $x$  para que a inequação seja positiva ou zero. No estudo do sinal podemos observar que a função é sempre negativa, e somente se anula para  $x = 3$ , então:  $S = \{ 3 \}$

### ≡ Exercícios propostos:

**22.** Resolver as inequações:

a)  $x^2 - 6x - 16 \geq 0$

e)  $4x^2 - x + \frac{1}{2} > 0$

b)  $6x^2 - 5x + 1 \leq 0$

c)  $-5x^2 + 6x - 2 \geq 0$

f)  $x^2 + 3x - 4 \geq 0$

d)  $3x^2 + 2x + 1/3 < 0$

g)  $x^2 + 2x - 1 < 0$

**23.** (UFAM) Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , podemos afirmar que  $f(x) < 0$  para  $x$ , tal que:

a)  $x < 1$  ou  $x > 2$

c)  $x = 1$  ou  $x = 2$

b)  $1 < x < 2$

d)  $x \leq 1$  ou  $x \geq 2$

### 8. Inequação-produto e inequação-quociente

Dadas duas (ou mais) funções do 2º grau,  $f(x)$  e  $g(x)$ , denominamos inequação-produto as desigualdades do tipo:

$$f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0$$

$$f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

São inequações-quociente as desigualdades:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Para resolvê-las, iremos fazer o estudo de sinal separadamente, transportar os sinais para um quadro, efetuar o produto dos sinais, e determinar o(s) conjunto(s) que satisfaz(em) a desigualdade pedida.

## Exercícios resolvidos:

1. Resolva as inequações:

a)  $(x^2 - 2x) \cdot (-x^2 + 4x - 3) \geq 0$

**Resolução:** Sejam  $f(x) = x^2 - 2x$  e  $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ . Façamos o estudo de sinal separadamente, utilizando os esboços dos gráficos:



Sinais de  $f(x)$

Observe que:

para  $x < 0$  ou  $x > 2$  o sinal é positivo

para  $0 < x < 2$  o sinal é negativo



Sinais de  $g(x)$

Observe que:

para  $x < 1$  ou  $x > 3$  o sinal é negativo

para  $1 < x < 3$  o sinal é positivo

Transportamos os sinais obtidos para um quadro, onde a primeira linha é destinada aos sinais de  $f(x)$ , a segunda aos sinais de  $g(x)$  e a terceira ao produto dos sinais de onde será extraído o conjunto-solução da inequação.

Lembre-se que as raízes devem ser colocadas em ordem crescente, e simbolizadas com uma bolinha preta, pois a desigualdade a ser resolvida contém o sinal de igualdade ( $\geq$ ).

	0	1	2	3	
←	+	-	-	+	→
←	-	-	+	+	→
←	-	+	-	+	→
←	0	1	2	3	→
	$0 \leq x \leq 1$		$2 \leq x \leq 3$		

→ Sinais de  $f(x)$ : negativo entre 0 e 2

positivo fora desse intervalo

→ Sinais de  $g(x)$ : positivo entre 1 e 3

negativo fora desse intervalo

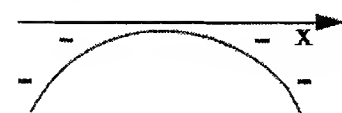
→ produto dos sinais:

como queremos que  $f(x) \cdot g(x)$  seja maior ou

igual a zero, as soluções são os conjuntos em que os sinais são positivos.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$$

b)  $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} \leq 0$ . **Resolução:** Sejam  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$  e  $g(x) = x^2 + 3x$ , vamos analisar os sinais das funções:



Em  $f(x)$ , qualquer que seja o valor de  $x$ , a função é sempre negativa.

Em  $g(x)$ , temos:

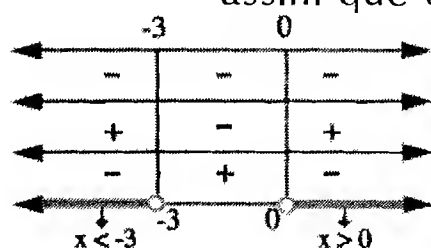
se  $x < -3$  ou  $x > 0$  o sinal é positivo

se  $-3 < x < 0$  o sinal é negativo





Transportamos os sinais para o quadro, lembrando que, como a função  $g(x)$  está no denominador da fração, temos que indicar as raízes de  $g(x)$ ,  $-3$  e  $0$  com uma bolinha branca, garantindo assim que o denominador não se anulará.



→ Sinais de  $f(x)$ : sempre negativo

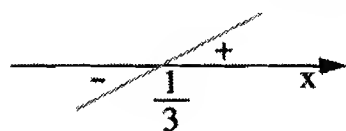
→ Sinais de  $g(x)$ : negativo entre  $-3$  e  $0$   
positivo fora desse intervalo

→ produto dos sinais: como queremos que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  seja menor ou igual a zero, a solução  $\frac{f(x)}{g(x)}$  são os intervalos que têm sinal negativo.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 0\}$$

c)  $\frac{3x-1}{x^2} \leq 0$ . Resolução: Sejam  $f(x) = 3x - 1$  e  $g(x) = x^2$ , observe que nesse exercício  $f(x)$  é função do primeiro grau.

Vamos analisar os sinais das funções:

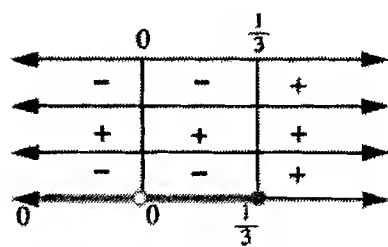


Sinais de  $f(x)$ : negativo para  $x < \frac{1}{3}$   
positivo para  $x > \frac{1}{3}$



Sinais de  $g(x)$ : note que se  $x = 0$  a função se anula se  $x < 0$  ou  $x > 0$  a função é sempre positiva.

Colocando os sinais no quadro, devemos lembrar que a função  $g(x)$  está no denominador, portanto sua raiz,  $x = 0$ , deve ser indicada com uma bolinha branca.



→ Sinais de  $f(x)$ : negativo para  $x < \frac{1}{3}$   
positivo para  $x > \frac{1}{3}$

→ Sinais de  $g(x)$ : sempre positivo

→ produto dos sinais: como queremos que o quociente das funções seja menor ou igual a

zero, a solução são os intervalos que têm o sinal negativo, lembrando que  $x \neq 0$ , pois esse valor anula o denominador da fração.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ e } x \neq 0\}$$

d)  $\frac{x+2}{2} + \frac{2}{x-1} \geq \frac{-1}{2}$ . *Resolução:* Para resolver essa inequação, devemos obter uma inequação-produto ou inequação-quociente que seja equivalente a ela. Para isso, colocamos todas as frações no primeiro membro, calculamos o m.m.c. do denominador, efetuando todas as operações necessárias. Observe:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2} + \frac{2}{x-1} &\geq -\frac{1}{2} \\ \frac{x+2}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} &\geq 0 \\ \frac{(x+2)(x-1) + 2 \cdot 2 + (x-1)}{2(x-1)} &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 2x - x - 2 + 4 + x - 1}{2x - 2} &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 2} &\geq 0\end{aligned}$$

Sejam  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  e  $g(x) = 2x - 2$ . Colocaremos os sinais de  $f(x)$  e  $g(x)$  diretamente no quadro:

-1	1	
← +	← +	← +
← -	← -	← +
← -	← -	← +
-1	1	

→ Sinais de  $f(x)$ : sempre positivo  
 → Sinais de  $g(x)$ : negativo se  $x < 1$   
 positivo se  $x > 1$   
 → produto dos sinais: como queremos que o quociente das funções seja maior ou igual a zero, o conjunto solução é o intervalo que tem sinal positivo. Lembre que, quando  $x = -1$ , a função  $f(x)$  se anula, portanto esse ponto está incluído na solução. Porém,  $x = 1$  anula a função  $g(x)$  que está no denominador, então esse ponto não está na solução.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ ou } x = -1\}$$

2. Determinar o domínio da função  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 50}{-x^2 + 4x - 3}}$

*Resolução:* Para determinar o domínio devemos lembrar que o radicando não pode ser negativo, pois trata-se de uma raiz quadrada, então:

$\frac{2x^2 - 50}{-x^2 + 4x - 3} \geq 0$ . Determinar o domínio, neste caso, resume-se a resolver essa inequação.

Sejam  $f(x) = 2x^2 - 50$  e  $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ . Vamos analisar os sinais:



Em  $f(x)$  temos:

se  $x < -5$  ou  $x > 5$  o sinal é positivo

se  $-5 < x < 5$  o sinal é negativo

se  $x = -5$  ou  $x = 5$  a função se anula.



Em  $g(x)$  temos:

se  $x < 1$  ou  $x > 3$  o sinal é negativo

se  $1 < x < 3$  o sinal é positivo

se  $x = 1$  ou  $x = 3$  a função se anula.

Como  $g(x)$  está no denominador, indicaremos essas raízes com bolinhas brancas, garantindo que o denominador não será zero.

No quadro de sinais, temos:

←	-5	1	3	5	→	
←	+	-	-	-	+	→ Sinais de $f(x)$
←	-	-	+	-	-	→ Sinais de $g(x)$
←	-	+	-	+	-	→ produto dos sinais; como queremos que $\frac{f(x)}{g(x)}$
←	-5	1	3	5	→	

seja maior ou igual a zero, as soluções são os intervalos que têm sinal positivo e as raízes que anulam a função, com exceção de 1 e 3.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 1 \text{ ou } 3 < x \leq 5\}$$

### Exercícios propostos:

**24.** Resolva as inequações:

a)  $(x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 1) > 0$ ; b)  $(6x^2 + 7x + 2)(-3x^2 + 10x) < 0$ ;

c)  $\frac{3x^2 - 27}{x^2 - 2x - 8} \geq 0$ ; d)  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x-2} \leq -\frac{2}{x-1}$ ;

e)  $\frac{-3x}{-x+1} - \frac{1}{x} < 0$

**25.** Determinar o domínio das funções:

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 64}{-3x^2 + 6x + 9}}$  c)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1-x}{x-1}}$

b)  $g(x) = \sqrt{\frac{10x^2 + 2x + 1}{2x^2}}$  d)  $g(x) = \sqrt{(x^2 - 100)(x^2 - 10x + 9)}$

**26.** (UFPI) O conjunto solução da inequação  $\frac{x-1}{x^2 - 4x + 3} \geq 1$ , no universo  $\mathbb{R}$ , é:

a)  $]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$ ; b)  $\mathbb{R} - \{3, 1\}$ ; c)  $[3, 4]$ ; d)  $]3, 4]$ ; e)  $]3, 4[$

**27.** (UFSE) Se  $k$  é uma solução inteira da inequação

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \leq 0, \text{ então } k \text{ é igual a:}$$

a) 1 b) 1 ou 4 c) 2 ou 3 d) 1, 2, 3 ou 4 e) 5, 6, 7, 8 ou 9

**28.** (Cesgranrio-RJ) Dadas as funções  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = 5 - x$

e  $h(x) = x^2 - 4x + 3$ , definimos a função  $\varphi(x) = \frac{g(x) \cdot h(x)}{f(x)}$ .

Analisando os valores de  $x$ , para os quais  $\varphi(x) \geq 0$ , temos:

a)  $x < 1$  ou  $3 < x < 5$

d)  $x \geq 5$  ou  $1 \leq x \leq 3$

b)  $x < 1$  ou  $3 \leq x \leq 5$

e)  $x > 5$  ou  $1 < x < 3$

c)  $x \leq 1$  ou  $3 \leq x \leq 5$

### Exercícios complementares:

**29.** (UFMG) O conjunto de todos os valores reais de  $x$  que satisfazem à de-

sigualdade  $\frac{-x^2 + 2}{-x^2 + 2x - 2} \leq 1$  é

a)  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$

c)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$

d)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \sqrt{2}\}$

e)  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$

**30.** (UFAC) Se toda solução de  $x^2 - x = 0$  é também solução de  $-2x^2 - bx + c = 0$ , então a soma  $b + c$  vale:

a) 1 b) -2 c) 0 d) 2 e)  $\frac{1}{2}$

**31.** (UFBA) O trinômio  $y = x^2 + mx + n$  admite 2 como raiz e tem valor mínimo para  $x = 3$ . Calcule  $|mn|$ .

**32.** (UFRR) Sabendo-se que  $x + y = 2$  e  $xy = -3$ , determinar o valor de  $(x - y)^2$ .

**33.** (UFMG) Resolvendo-se a equação

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{x - 2} = 0, \quad x \neq 2, \quad x \neq 3,$$

pode-se afirmar que:

a) o produto de suas raízes é 6.

b) o produto de suas raízes é 12.

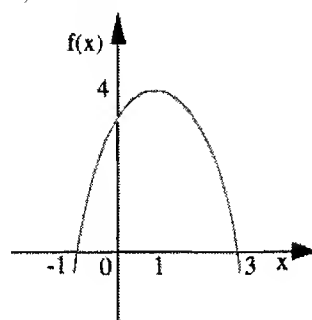
c) o produto de suas raízes é 24.

d) sua única raiz é ímpar.

e) sua única raiz é par.

**34.** (PUC-SP) Sendo  $x'$  e  $x''$  os zeros ou raízes da função quadrática  $f(x) = x^2 - 8x + m$ . Determinar  $m$  para que se tenha  $3x' - 4x'' = 3$ .

**35.** (UFPB) Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função quadrática cujo gráfico está desenhado abaixo, então



a)  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

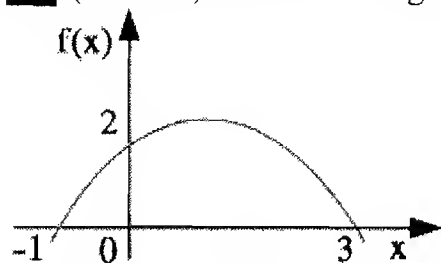
b)  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

c)  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

d)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

e)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$

**36.** (UFMG) Observe a figura:



A função do 2º grau, cujo gráfico nela está representado, é:

- a)  $y = \frac{3}{2} + x - \frac{x^2}{2}$
- b)  $y = x^2 - 2x - 3$
- c)  $y = -x^2 + 2x + 3$
- d)  $y = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2$
- e)  $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$

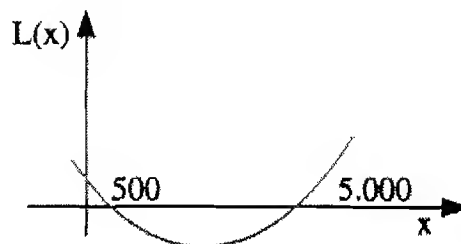
**37.** (Mack-SP) O vértice da parábola  $y = x^2 + kx + m$  é o ponto V  $(-1, -4)$ . O valor de  $k + m$  é: a)  $-2$  b)  $-1$  c)  $0$  d)  $1$  e)  $2$

**38.** (UFGO) Certa indústria produz cabides com um custo de produção de Cr\$ 500,00 por unidade. Estima-se que, se cada cabide for vendido por  $x$  cruzeiros ( $0 \leq x \leq 5.000$ ), serão compradas  $5000 - x$  unidades por mês. Com estes dados, pode-se concluir que (some os valores correspondentes):

- 01. quanto mais barato o preço do cabide, maior será o número de cabides vendidos;
- 02. caso o preço de cada cabide seja menor que Cr\$ 500,00, a indústria terá prejuízo;
- 04. a receita mensal (quantidade de dinheiro “que entra”) da indústria é dada por  $R(x) = 5\,000 - x$ ;
- 08. a indústria obterá o maior lucro possível caso cada cabide seja vendido por Cr\$ 2 500,00;

16. caso todos os cabides produzidos sejam vendidos, o lucro mensal da indústria é dado pela fórmula  $L(x) = (5\,000 - x)(x - 500)$ ;

32. supondo que todos os cabides produzidos sejam vendidos, um possível gráfico para o lucro mensal da indústria em função do preço  $x$  de cada cabide é:



**39.** (FGV-SP) O lucro de uma empresa é dado por  $L(x) = 100(10 - x)(x - 2)$ , onde  $x$  é a quantidade vendida. Podemos afirmar que:

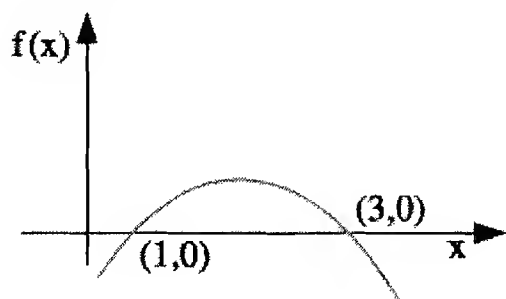
- a) o lucro é positivo qualquer que seja  $x$ .
- b) o lucro é positivo para  $x$  maior que 10.
- c) o lucro é positivo para  $x$  entre 2 e 10.
- d) o lucro é máximo para  $x$  igual a 10.
- e) o lucro é máximo para  $x$  igual a 3.

**40.** (UFSC) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = -x^2$ . Determine a soma dos números associados às afirmativas VERDADEIRAS:

- 01. O gráfico de  $f(x)$  tem o vértice na origem;
- 02.  $f(x)$  é crescente em  $\mathbb{R}$ ;
- 04. As raízes de  $f(x)$  são reais e iguais;
- 08.  $f(x)$  é decrescente em  $[0, \infty[$ ;
- 16.  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$ ;

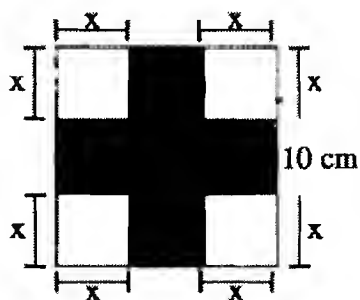
32. O gráfico de  $f(x)$  é simétrico em relação ao eixo  $x$ .

41. (UFSE) O gráfico abaixo pode representar a função real de variável real dada por:



- a)  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
- b)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$
- c)  $f(x) = x^2 - 6x + 6$
- d)  $f(x) = -x^2 + 6x - 6$
- e)  $f(x) = -x^2 + 9$

42. (UFAL) Na figura abaixo tem-se um quadrado com 10 cm de lado. A função  $f$ , definida para  $0 < x < 5$ , dada por  $f(x) = 100 - 4x^2$ , dá o valor, em centímetros quadrados, da área da região sombreada, para cada valor de  $x$ .



Qual é a imagem de  $f$ ?

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$
- b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 100\}$
- c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$
- e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 100\}$

43. (Fuvest-SP) Encontre todos os conjuntos de três números inteiros consecutivos cuja soma é igual ao seu produto.

44. (UFAL) O gráfico de uma função quadrática intercepta o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 4)$  e o eixo das abscissas nos pontos  $(1, 0)$  e  $(-2, 0)$ . É correto afirmar que o vértice da parábola que a representa é o ponto:

- a)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
- b)  $\left(-\frac{1}{2}, 9\right)$
- c)  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$
- d)  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$
- e)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$

45. (FAAP-SP) Qual o domínio da função definida por  $y = \sqrt{x^2 - 9}$ ?

46. (UFPI) A soma dos inversos das raízes da equação  $x^2 + 6x + 4 = 0$  é igual a:

- a)  $-6$
- b)  $4$
- c)  $-\frac{3}{2}$
- d)  $0$
- e)  $-\frac{1}{6}$

47. (Fuvest-SP) A equação

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

tem duas raízes. A soma e o produto dessas raízes são iguais a:

- a)  $-2$
- b)  $0$
- c)  $3$
- d)  $-4$
- e)  $1$

48. (UFSE) Se a equação  $3x^2 - 4x + m = 0$  não tem raízes reais, é verdade que:

- a)  $m = \frac{4}{3}$
- b)  $m > \frac{4}{3}$
- c)  $m < \frac{7}{2}$
- d)  $m < 12$
- e)  $m > 13$

49. (UFMG) Se a diferença das raízes de  $y = -2x^2 + 4x + k$  é 4, então o valor de  $k$  é:

- a)  $-6$
- b)  $-3$
- c)  $0$
- d)  $3$
- e)  $6$

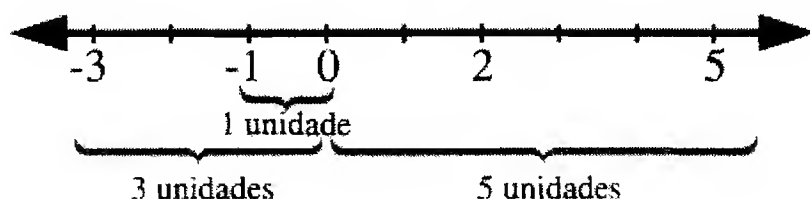
# Capítulo V

## FUNÇÃO MODULAR

**1. Introdução** O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real surgiu como consequência do desenvolvimento teórico dos números inteiros. Na linguagem coloquial, não utilizamos números negativos, mas sim palavras que os simbolizam. Por exemplo:

- dizemos que a temperatura atingiu  $5^{\circ}\text{C}$  abaixo de zero e não  $-5^{\circ}\text{C}$ ;
- dizemos que uma conta bancária tem saldo devedor de R\$ 100,00 e não  $-\text{R\$ } 100,00$ ;
- dizemos que o mergulhador chegou a 20 metros abaixo do nível do mar e não a  $-20$  metros.

**2. Módulo de um número real** Utilizamos os números em módulo acrescentando palavras que localizam sua posição em relação à origem. Portanto, o conceito de módulo de um número é basicamente geométrico. Observe a reta real:



O módulo de um número real é a distância do ponto correspondente a ele até a origem, portanto o módulo de um número é sempre positivo. Observe:

o módulo de  $-3$  é  $3$ , usamos a notação:  $|-3| = 3$

o módulo de  $-1$  é  $1$ , ou  $|-1| = 1$

o módulo de  $-5$  é  $5$ , ou  $|-5| = 5$

De modo geral, para calcular o módulo de um número procedemos da seguinte maneira:

→ se o número é positivo, conserva-se o sinal;

→ se o número é negativo, troca-se o sinal.

**Definição:** O módulo de um número real  $x$  é:  
 $x$ , se  $x$  for positivo e o oposto de  $x$  ( $-x$ ), se  $x$  for negativo.

$$\text{Simbolicamente, } |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

### Exercícios resolvidos:

Calcule:

a)  $|-5,7|$

Resolução:  $|-5,7| = 5,7$

b)  $|91|$

Resolução:  $|91| = 91$

c)  $|2x|$

Resolução: Neste caso, o valor numérico depende da incógnita  $x$ . Como não sabemos se  $2x$  é positivo ou negativo, temos que considerar os dois casos:

1º caso: se  $2x$  for *positivo ou zero*, conserva-se o sinal. Assim,  
 $|2x| = 2x$

2º caso: se  $2x$  for *negativo*, troca-se o sinal. Assim,  $|2x| = -2x$

$$\text{Resumindo, temos: } |2x| = \begin{cases} 2x & \text{se } 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ -2x & \text{se } 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

d)  $|5x + 10|$

Resolução: Novamente, como não temos um valor numérico para  $5x + 10$ , temos que determinar  $x$  considerando que  $5x + 10$  possa ser positivo ou negativo:

1º caso: se  $5x + 10$  for *positivo ou zero*, conserva-se o sinal.

$$5x + 10 \geq 0 \Rightarrow 5x \geq -10 \Rightarrow x \geq -2$$

Então,  $|5x + 10| = 5x + 10$  para  $x \geq -2$ ;

2º caso: se  $5x + 10$  for *negativo*, troca-se o sinal.

$$5x + 10 < 0 \Rightarrow 5x < -10 \Rightarrow x < -2$$

Então,  $|5x + 10| = -5x - 10$  para  $x < -2$ .

$$\text{Resumindo, temos: } |5x + 10| = \begin{cases} 5x + 10 & \text{se } x \geq -2 \\ -5x - 10 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$



e)  $|x^2 - 1|$

**Resolução:** Vamos considerar os dois casos:

1º caso: se  $x^2 - 1$  for *positivo* ou zero, conserva-se o sinal.

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$



Então,  $|x^2 - 1| = x^2 - 1$  para  $x \leq -1$  e  $x \geq 1$

2º caso: se  $x^2 - 1$  for *negativo*, troca-se o sinal.

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$



Portanto,  $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$  para  $-1 < x < 1$

Resumindo, temos:  $|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$

### Exercícios propostos:

1. Calcular a)  $|-15|$ ; b)  $|204|$ ; c)  $|-7,3|$ ; d)  $|-16,1|$ ; e)  $|81|$ ; f)  $|12,5|$

2. Calcular, em função de  $x$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $|5x|$                       c)  $|2x + 4|$                       e)  $|4x - 16|$                       g)  $|-7x - 35|$

b)  $|-3x|$                       d)  $|-x + 7|$                       f)  $|x^2 - 4|$

### 3. Função modular – gráfico da função modular

**Definição:** Função modular é toda função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$  e contra-domínio  $\mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = |x|$  ou  $y = |x|$ .

O gráfico da função modular pode ser obtido de duas formas:

1º modo: a partir da definição de módulo;

2º modo: por simetria em relação ao eixo  $Ox$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Esboce o gráfico de  $y = |x + 1|$ .

**Resolução:** 1º modo – Aplicando a definição de módulo:

se  $x + 1$  é *positivo* ou zero, conservamos o sinal.

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -1}. \text{ Então } |x + 1| = x + 1 \text{ se } x \geq -1$$

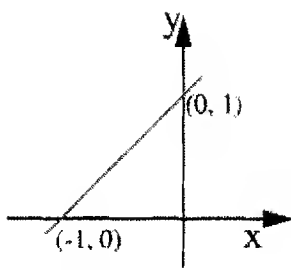
se  $x + 1$  é *negativo*, troca-se o sinal.

$$x + 1 < 0 \Rightarrow \boxed{x < -1}$$

Então  $|x + 1| = -x - 1$  se  $x < -1$

Assim, temos:  $|x + 1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \text{ (I)} \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \text{ (II)} \end{cases}$

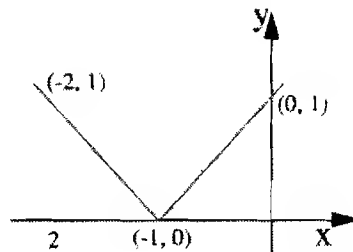
Substituímos  $x$  por  $-1$ , e por valores maiores que  $-1$  na equação (I):  $y = x + 1$   
se  $x = -1$  então  $y = -1 + 1 = 0$  ponto  $(-1, 0)$   
se  $x = 0$  então  $y = 0 + 1 = 1$  ponto  $(0, 1)$



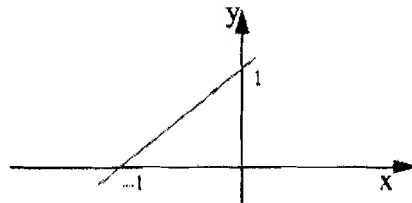
Marcamos os pontos obtidos no plano cartesiano, traçando uma semi-reta com origem no ponto  $(-1, 0)$ .

Atribuímos a  $x$  valores menores que  $-1$ , substituindo na função (II):  $y = -x - 1$ , se  $x = -2$  então  $y = -(-2) - 1 = 2 - 1 = 1$  ponto  $(-2, 1)$

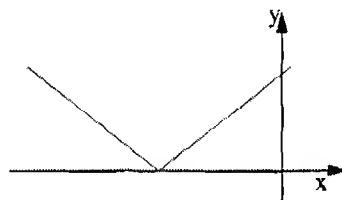
Marcamos este ponto no plano cartesiano, unindo-o ao ponto  $(-1, 0)$ :



2º modo - Queremos o gráfico de  $y = |x + 1|$ , para isto traçamos o gráfico de  $y = x + 1$ :



Como o módulo de um número é sempre positivo, os pontos abaixo do eixo  $Ox$ , onde  $y$  é negativo, não pertencem ao gráfico de  $|x + 1|$ . Tomamos, então, pontos simétricos em relação ao eixo  $Ox$  ou, em outras palavras, "rebatemos" o gráfico. Observe:



2. Esboçar o gráfico de  $y = |2x - 4|$ .

Resolução: 1º modo – Aplicamos a definição de módulo de um

$$\text{número: } |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } 2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{se } 2x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

Substituímos  $x$  por 2 e por números maiores que 2 na função:

$$y = 2x - 4$$

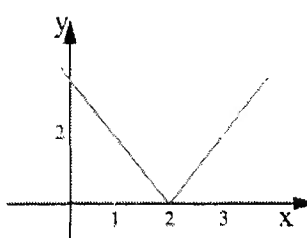
se  $x = 2$  então  $y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$  ponto  $(2, 0)$

se  $x = 3$  então  $y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$  ponto  $(3, 2)$

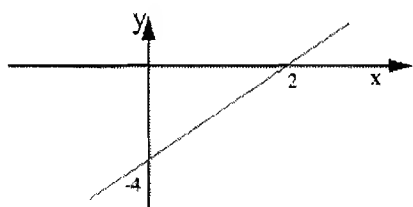
Substituímos  $x$  por números menores que 2 na função:  $y = -2x + 4$

se  $x = 1$  então  $y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$  ponto  $(1, 2)$ .

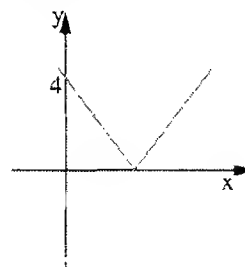
O gráfico será:



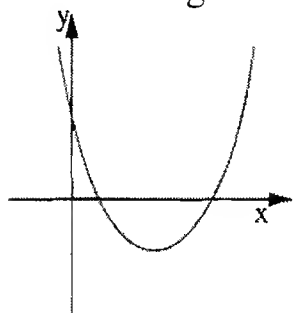
2º modo – Inicialmente, fazamos o gráfico de  $y = 2x - 4$ :



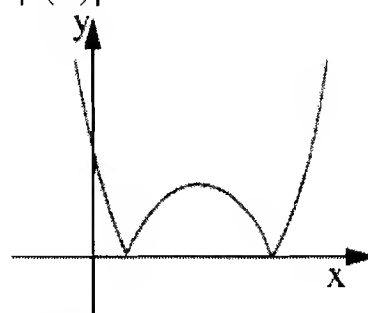
"Rebatemos" os pontos que estão abaixo do eixo  $x$ :



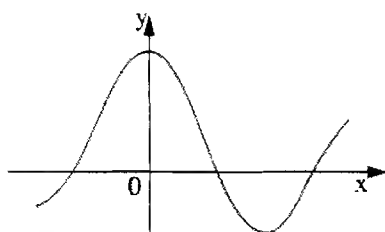
3. Dado o gráfico de  $f(x)$  esboce o gráfico de  $|f(x)|$ .



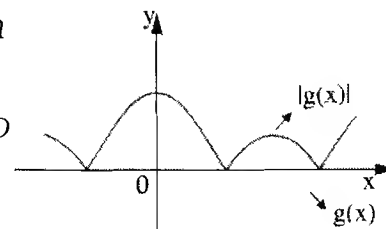
Resolução: Quando não conhecemos a função mas temos o gráfico, é mais fácil "rebater" os pontos abaixo do eixo  $Ox$ :



4. Dado o gráfico de  $g(x)$  esboce o gráfico de  $|g(x)|$ .



Resolução: Basta "rebater" os pontos que estão abaixo do eixo  $Ox$ :



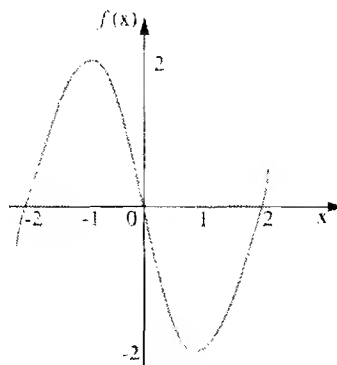
### ⇒ Exercícios propostos:

3. Esboçar o gráfico das seguintes funções modulares:

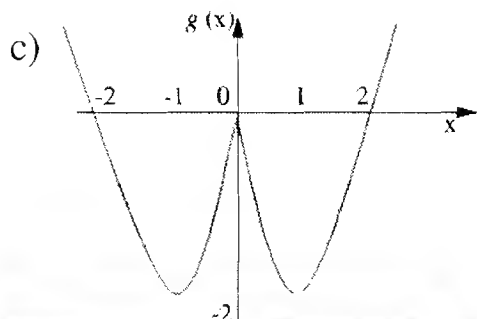
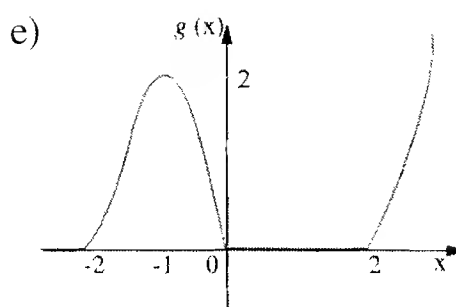
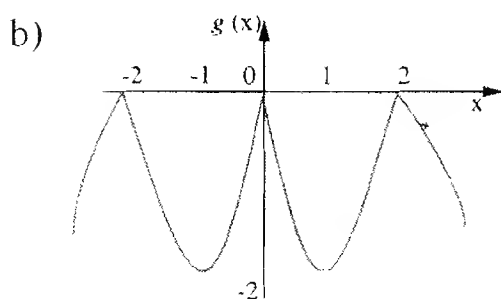
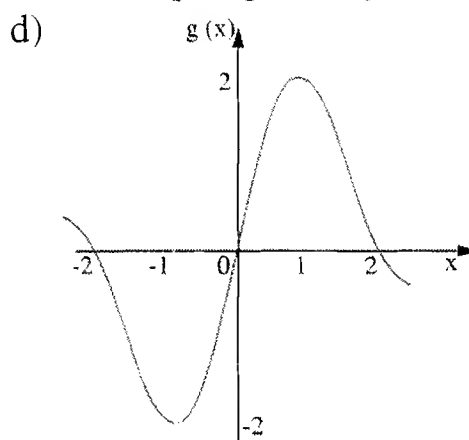
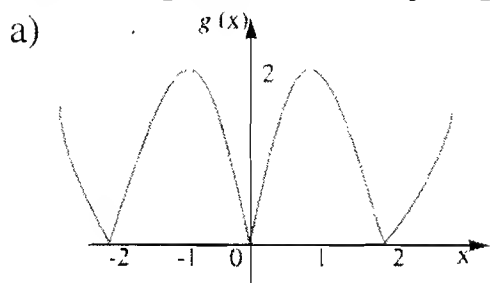
a)  $y = |x + 3|$                       c)  $y = \left| \frac{x}{2} - 4 \right|$

b)  $y = |-x + 5|$                       d)  $y = |3x - 15|$

4. (UFPB) Sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujo gráfico é:



então, o gráfico da função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = |f(x)|$ , é



**4. Equações modulares** Para resolver equações modulares, utilizaremos basicamente a definição de módulo. Sempre que tivermos uma função modular devemos considerar que, dependendo do valor da in-

cognita, o valor numérico da função (entre as barras do módulo) poderá ser positivo ou negativo.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva a equação  $|2x| = 14$ .

*Resolução:* Se o módulo de  $2x$  é 14, então a função  $y = 2x$  pode ser 14 ou  $-14$ , pois:  $|14| = 14$  e  $|-14| = 14$

Então:  $2x = 14$  ou  $2x = -14 \Rightarrow x = 7$  ou  $x = -7 \Rightarrow \boxed{S = \{-7, 7\}}$

2. Determinar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x + 1| = 9$ .

*Resolução:* Como  $|9| = 9$  e  $|-9| = 9$ , para resolver  $|x + 1| = 9$ , temos que:  $x + 1 = 9$  ou  $x + 1 = -9 \Rightarrow x = 8$  e  $x = -10$

$$\boxed{S = \{-10, 8\}}$$

3. Resolver a equação:  $|-2x + 1| = \frac{1}{2}$ .

*Resolução:* como  $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$  ou  $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ , então:

$$-2x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2x = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow -2x = \frac{1-2}{2} \Rightarrow -2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } -2x + 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow -2x = -\frac{1}{2} - 1$$

$$-2x = \frac{-1-2}{2} \Rightarrow -2x = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}}$$

4. Determine  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x + 1| = -4$ .

*Resolução:* Por definição, o módulo de um número é sempre positivo, portanto, não existe  $x \in \mathbb{R}$  de modo que o módulo de  $x + 1$  seja  $-4$ , então:  $\boxed{S = \emptyset}$

### Exercícios propostos:

5. Resolva em  $\mathbb{R}$  as equações:

a)  $|3x| = 12$

e)  $|3x - 1| = -3$

b)  $|-5x| = 20$

f)  $|-4x + 9| = 3$

c)  $|-x + 4| = 11$

g)  $|9x + 8| = -5$

d)  $|2x - 7| = 5$

h)  $|-6x + 2| = 16$

6. Se  $|2x - 3| = \frac{1}{4}$ , então x vale:

- a)  $\frac{13}{8}$     b)  $-\frac{7}{8}$     c)  $\frac{13}{8}$  ou  $\frac{11}{8}$     d)  $\frac{11}{8}$  ou  $\frac{3}{8}$     e) n.r.a.

Os exercícios seguintes apresentam resolução diferente, observe.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva a equação  $|x^2| + |x| - 12 = 0$

**Resolução:** Note que, neste exercício, temos uma equação do 2º grau onde a incógnita é  $|x|$ . Para facilitar a resolução podemos utilizar uma mudança de variável, substituindo  $|x|$ , por exemplo, por m, então:  $|x| = m$

Em função de m, temos a seguinte equação:  $m^2 + m - 12 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48$$

$$\Delta = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7 \Rightarrow m = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m = -\frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} m_1 = -\frac{1+7}{2} = -4 \\ m_2 = -\frac{1-7}{2} = 3 \end{cases}$$

Agora que temos os valores de m, podemos calcular  $|x|$ :

como  $|x| = m$ , então:

$$|x| = 3 \quad \text{ou} \quad |x| = -4$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ , pois o módulo de um número é sempre positivo.

$$S = \{-3, 3\}$$

2. Calcule o valor de x na equação:  $|x|^2 - 6|x| + 5 = 0$

**Resolução:** Efetuamos uma mudança de variável, por exemplo:

$$|x| = t$$

Portanto, em função de t, temos a equação:  $t^2 - 6t + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$$t = -\frac{(-6) \pm 4}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} t_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \\ t_2 = \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

Como  $|x| = t$ , temos:

$$\begin{array}{ccc} |x| = 5 & \text{ou} & |x| = 1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x = 5 \text{ ou } x = -5 & & x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{array}$$

$$S = \{-5, -1, 1, 5\}$$

### ⇒ Exercício proposto:

7. Resolva as equações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $|x|^2 - 9|x| + 14 = 0$

d)  $|x|^2 + 2|x| - 3 = 0$

b)  $|x|^2 - 8|x| - 9 = 0$

e)  $|x|^2 + 9|x| + 8 = 0$

c)  $|x|^2 - 11|x| + 30 = 0$

**5. Inequações modulares** As inequações modulares se caracterizam pela presença de um dos sinais de desigualdade:  $>$ ,  $\geq$ ,  $<$  ou  $\leq$ . Observe a resolução dos exercícios seguintes.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva a inequação  $|x| < 3$ .

*Resolução:* Queremos determinar os valores de  $x$ , cujos módulos sejam menores que 3. Sabemos que, se  $|x| = 3$  então  $x = 3$  ou  $x = -3$ . Colocaremos os pontos correspondentes a estes valores na reta real e analisaremos os intervalos determinados:



Substituindo  $x$  por números menores que  $-3$ , temos:

se  $x = -4$  então  $|x| = 4$ , portanto maior que 3;

se  $x = -5$  então  $|x| = 5$ , portanto maior que 3.

Concluimos que números menores que  $-3$  não satisfazem a desigualdade  $|x| < 3$ .

Substituindo  $x$  por números maiores que 3, temos:

se  $x = 4$  então  $|x| = 4$ , portanto maior que 3;

se  $x = 5$  então  $|x| = 5$ , portanto maior que 3.

Também, neste intervalo, os valores de  $x$  não satisfazem a inequação  $|x| < 3$ .

Considere, agora, o seguinte intervalo:



Substituindo  $x$  por números entre  $-3$  e  $3$ , temos:

se  $x = -2$  então  $|x| = 2$ , portanto menor que 3;

se  $x = 0$  então  $|x| = 0$ , portanto menor que 3;

se  $x = 1$  então  $|x| = 1$ , portanto menor que 3.

Qualquer valor de  $x$  entre  $-3$  e  $3$   
satisfaz a desigualdade  $|x| < 3$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$$

2. Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação  $|x| \geq 5$ .

*Resolução:* Vamos analisar os intervalos com extremidades em  $-5$  e  $5$ . Note que, como o sinal de desigualdade é  $\geq$ , os pontos  $-5$  e  $5$  são representados com uma bolinha preta:



Substituindo  $x$  por  $-5$  e por números menores que  $-5$ , temos:

se  $x = -7$  então  $|x| = 7$ , portanto maior ou igual a 5;

se  $x = -6$  então  $|x| = 6$ , portanto maior ou igual a 5;

se  $x = -5$  então  $|x| = 5$ , portanto maior ou igual a 5.

Concluimos que os valores menores ou igual a  $-5$   
satisfazem a inequação  $|x| \geq 5$ .

Substituindo  $x$  por  $5$  e por números maiores que  $5$ , temos:

se  $x = 5$  então  $|x| = 5$ , portanto maior ou igual a 5;

se  $x = 6$  então  $|x| = 6$ , portanto maior ou igual a 5;

se  $x = 7$  então  $|x| = 7$ , portanto maior ou igual a 5.

Portanto, valores de  $x$  maiores ou igual a  $5$   
satisfazem a inequação  $|x| \geq 5$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 5\}$$

De modo geral, se  $a$  é um número positivo então:

Propriedade 1:  $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

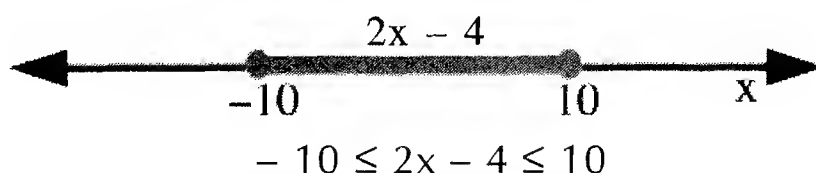


Propriedade 2:  $|x| > a \Rightarrow x < -a \text{ ou } x > a$



3. Resolver a inequação  $|2x - 4| \leq 10$ .

*Resolução:* Inicialmente, procedemos como nos exercícios anteriores, aplicando a propriedade 1:





Porém, precisamos determinar  $x$ . Para isso utilizamos propriedades operatórias de forma a isolar  $x$  no termo central da inequação:

$$-10 \leq 2x - 4 \leq 10$$

Somamos 4 nos três membros da inequação

$$-10 + 4 \leq 2x - \cancel{4} + \cancel{4} \leq 10 + 4 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 14$$

$$\text{dividimos por 2: } -\frac{6}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{14}{2} \Rightarrow -3 \leq x \leq 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 7\}$$

4. Determine o valor de  $x$  na inequação  $|-3x + 2| > 1$ .

Resolução: Aplicando a propriedade 2, temos:



$$-3x + 2 < -1 \Rightarrow -3x < -1 - 2 \Rightarrow -3x < -3 \text{ ou}$$

$$-3x + 2 > 1 \Rightarrow -3x > 1 - 2 \Rightarrow -3x > -1$$

Multiplicamos por  $-1$ , invertendo o sinal de desigualdade:

$$3x > 3 \Rightarrow x > 1 \text{ e } 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 1\}$$

5. Determine  $x$  na inequação  $|-5x + 1| < 9$ .

Resolução: Aplicando a propriedade 1, temos:  $-9 < -5x + 1 < 9$

Subtraímos 1 nos três membros:  $-9 - 1 < -5x + \cancel{1} - \cancel{1} < 9 - 1$

$$-10 < -5x < 8$$

Dividimos os três membros por  $-5$ , invertendo o sinal da desigualdade:

$$\frac{-10}{-5} > \frac{-5x}{-5} > \frac{8}{-5} \Rightarrow 2 > x > -\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{8}{5} < x < 2$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{8}{5} < x < 2\right\}$$

6. Resolva a inequação  $|x + 7| > -3$ .

Resolução: Nos exercícios anteriores, tínhamos números positivos no segundo membro das inequações. Neste exercício temos um número negativo ( $-3$ ). Devemos, portanto, analisar para obter a solução. Queremos determinar um conjunto de valores para  $x$  que, quando substituídos em  $|x + 7|$ , forneçam resultados maiores que  $-3$ . Por definição, o módulo de um número é sempre

positivo, então, para qualquer  $x$ , temos que  $|x + 7|$  será positivo e, neste caso, será maior que  $-3$ . O conjunto-solução é, portanto:

$$S = \mathbb{R}$$

7. Determine os valores de  $x$  que satisfazem a inequação:  $|3x - 4| \leq -1$ .

**Resolução:** Novamente, no segundo membro da inequação temos um número negativo ( $-1$ ). Analogamente ao exercício anterior, como  $|3x - 4|$  é positivo qualquer que seja o valor de  $x$ , então não é possível ser menor que um número negativo. Neste caso, o conjunto solução é:  $S = \emptyset$

De forma geral, se  $m$  é um número negativo, então:

$$|x| > m \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \therefore S = \mathbb{R}$$

$$|x| < m \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \therefore S = \emptyset$$

### ⇒ Exercício proposto:

8. Resolva as inequações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $|x| \geq 12$

b)  $|x| < 7$

c)  $|4x + 7| \leq 5$

d)  $|-9x + 1| > 26$

e)  $|-2x - 4| \geq 16$

f)  $|10x + 4| \geq -5$

g)  $|7x - 3| < -1$

h)  $|-8x + 10| \geq 6$

i)  $|-12x| > -7$

j)  $|-x + 3| < -9$

### ⇒ Exercícios complementares:

9. (PUC-SP) Para definir módulo de um número real  $x$  podemos dizer que:

a) é igual ao valor de  $x$  se  $x$  é real.

b) é o maior valor do conjunto formado por  $x$  e o oposto de  $x$ .

c) é o valor de  $x$  tal que  $x \in \mathbb{N}$ .

d) é o oposto do valor de  $x$ .

e) é o maior inteiro contido em  $x$ .

10. (UFSC) Seja  $F: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = |x - 1|$ . Determine a soma dos números associados às afirmativas verdadeiras.

01. A imagem de  $f$  é  $\mathbb{R}$ .

02.  $f(x)$  é decrescente em  $[-4, 1]$ .

04.  $f(x)$  é simétrica em relação ao eixo imaginário  $x = 0$ .

08.  $f(x)$  é crescente em  $[1, 4]$ .

16.  $f(x)$  é função ímpar.

32.  $f(x)$  é sobrejetora.

11. (UFRR) Dadas as funções  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = x^2$ , então a composta  $f(g(x))$  é:

a)  $x$  b)  $x^2$  c)  $x^{\frac{3}{2}}$  d)  $|x|$  e)  $\sqrt{x} + x^2$

12. (UFRN)

A função,  $f(x) = \frac{x + |x|}{|x|}$  definida para todo número real  $x \neq 0$ .

a) é uma função ímpar.

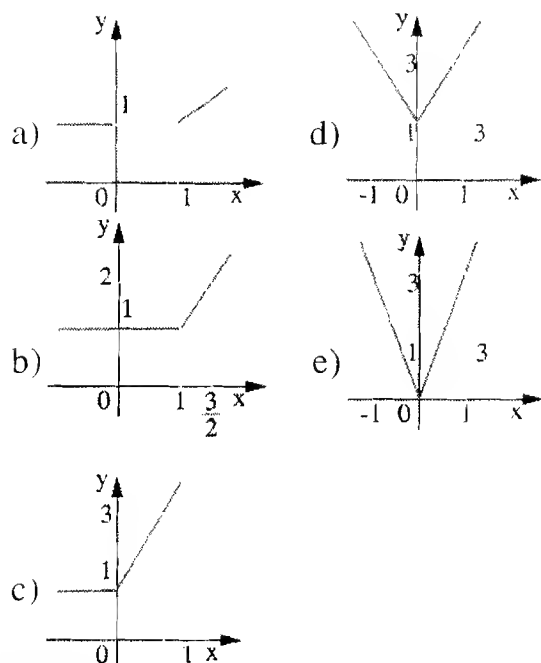
b) é decrescente quando  $x < 0$ .

c) é sempre crescente conforme  $x$  cresce.

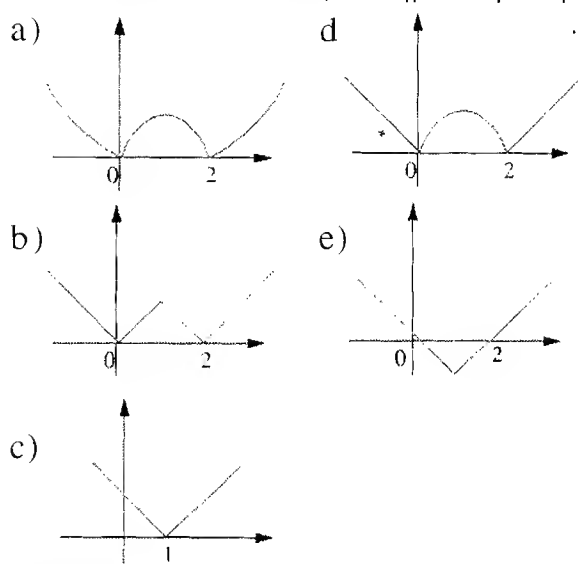
d) atinge um valor máximo para um único valor  $x$ .

e) admite um conjunto imagem de apenas dois elementos.

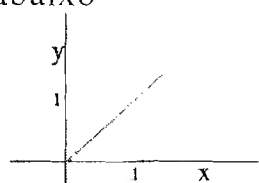
**13.** (UFAL) O gráfico da função  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = |x| + x + 1$ , é



**14.** (UFPI) O gráfico que mais se assemelha ao de  $f(x) = ||x - 1| - 1|$  é



**15.** (UFPA) A função cujo gráfico aparece abaixo



a) tem domínio  $\mathbb{R}$

b) tem conjunto imagem  $\mathbb{R}_+^*$

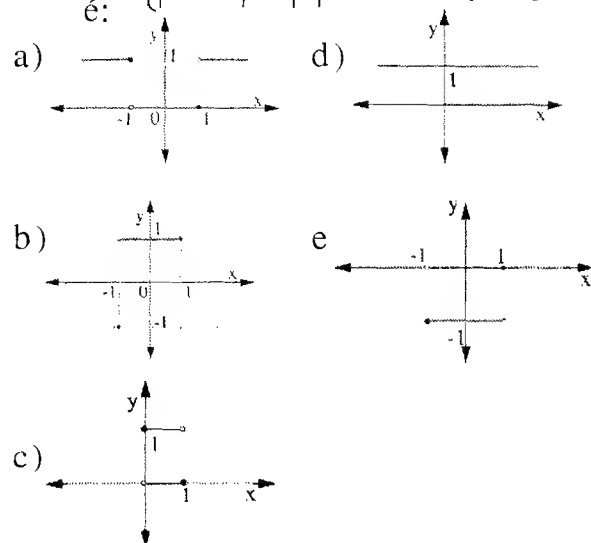
c) é definida por  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $x \neq 0$

d) é definida por  $f(x) = |x|$ ,  $x \geq 0$

e) é definida por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ,  $x > 0$

**16.** (UFPB) O gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin [0, 1] \\ |1-x| + |x|, & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$



**17.** (FGV-SP) A soma das raízes da equação  $|5x - 1| = 6$  é:

a) 0   b)  $\frac{1}{5}$    c)  $\frac{2}{5}$    d)  $\frac{3}{5}$    e)  $\frac{4}{5}$

**18.** (ITA-SP) Sabendo que as soluções da equação  $|x|^2 - |x| - 6 = 0$  são raízes da equação  $x^2 - ax + b = 0$ , podemos afirmar que:

a)  $a = 1$  e  $b = 6$ .

b)  $a = 0$  e  $b = -6$ .

c)  $a = 1$  e  $b = -6$ .

d)  $a = 0$  e  $b = -9$ .

e) não existem  $a$  e  $b$  tal que  $x^2 - ax + b = 0$  contenha todas as raízes da equação.

**19.** (FGV-SP) Quantos números inteiros não-negativos satisfazem a inequação  $|x - 2| < 5$ ?

a) infinitos b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

**20.** (UECE) Dados os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 5| < 3\} \text{ e}$$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 4| \geq 1\}$ , a soma dos elementos de  $A \cap B$  é igual a:

a) 19 b) 20 c) 21 d) 22

**21.** (FEI-SP) Se  $|2x - 1| \geq 3$ , então:

a)  $x \leq -1$  ou  $x \geq 2$  b)  $x \geq 3$

c)  $x \leq \frac{1}{2}$  d)  $x \leq 0$  e)  $-1 \leq x \leq 2$ .

**22.** (UFGO) O conjunto solução

da inequação  $\left| \frac{2x + 4}{x - 2} \right| \leq 0$  é:

a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -2\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$

d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

**23.** (UFPI) O conjunto S das soluções da equação

$$-2 + 2x = |3x - 2| \text{ é:}$$

a)  $S = \{0\}$

b)  $S = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$

c)  $S = \left\{ 0, \frac{4}{5} \right\}$

d)  $S = \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$

e)  $S = \emptyset$

# Capítulo VI

## FUNÇÃO EXPONENCIAL

**1. Introdução** Ao longo da história da matemática, o homem sempre procurou meios que facilitassem os cálculos. Na antigüidade, os matemáticos procuravam construir tabelas para simplificar a aritmética, mais especificamente para cálculos com potências. Utilizando essas tabelas, obtinham resultados cada vez mais precisos. Os primeiros registros sobre potências datam de 1.000 a.C., porém somente no século XVII encontramos a notação de potências que utilizamos hoje.

**2. Revisão de potências** A potência  $n$  de um número é o produto de  $n$  fatores deste número:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}$$

$a$  é chamada de *base* e  $n$  é chamado de *expoente*, então:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$$

$$6^1 = 6$$

$$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$$

Note que, se a base é um número positivo, qualquer que seja o expoente, a potência é sempre positiva. Porém, se a base é um número negativo, teremos a potência: positiva, se o expoente é um número par (o número de fatores é par); negativa, se o expoente é um número ímpar (o número de fatores é ímpar).

Como  $n$  é um número inteiro, podemos ter expoentes negativos. Nestes casos usamos a seguinte propriedade para calcular a potência:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ onde } a \neq 0$$

Exemplos:

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \qquad 4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$(-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{1}\right)^4 = 81$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

### Exercício proposto:

1. Calcule as potências:

- a)  $2^7$                       c)  $(-4)^3$                       e)  $5^{-1}$                       g)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$                       i)  $7^{-2}$
- b)  $3^5$                       d)  $(-2)^{10}$                       f)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$                       h)  $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$                       j)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

**3. Propriedades de potências** O trabalho com potências torna-se simples se forem aplicadas, sempre que possível, suas propriedades. Considere  $a$  e  $b$  bases reais e diferentes de zero,  $m$  e  $n$  expoentes inteiros. Temos:

a) no produto de potências com bases iguais, conservamos a base e somamos os expoentes:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) no quociente de potências de bases iguais, conservamos a base e subtraímos os expoentes:  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Observe que estas propriedades somente são válidas se as potências tiverem bases iguais.

Exemplos:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

$$5^2 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5^1 = 5^{2+1} = 5^3 = 125$$

$$\frac{4^7}{4^3} = 4^{7-3} = 4^4 = 256$$

$$3^8 \div 3^4 = 3^{8-4} = 3^4 = 81$$

$$7^{-1} \cdot 343 = 7^{-1} \cdot 7^3 = 7^{-1+3} = 7^2 = 49$$

$$\frac{32}{2^{-2}} = \frac{2^5}{2^{-2}} = 2^{5-(-2)} = 2^{5+2} = 2^7 = 128$$

c) qualquer base real  $a$ , elevada a zero, é igual a um:  $a^0 = 1$

Podemos demonstrar esta propriedade da seguinte maneira:  $\frac{25}{25} = 1$ .

Por outro lado, sabendo que  $25 = 5^2$  e aplicando a propriedade do quociente, temos:  $\frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$ .

Como  $\frac{25}{25} = 1$  e  $\frac{25}{25} = 5^0$  então  $5^0 = 1$ .

Demonstra-se, através de teorema, que:  $0^0 = 1$

d) no cálculo de potência de uma potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

$$(2^2)^5 = 2^{2 \cdot 5} = 2^{10} = 1024$$

$$\left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right]^{-1} = \left( \frac{2}{3} \right)^{2 \cdot (-1)} = \left( \frac{2}{3} \right)^{-2} = \left( \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$(5^4)^{-1} = 5^{4 \cdot (-1)} = 5^{-4} = \left( \frac{1}{5} \right)^4 = \frac{1}{625}$$

e) Temos ainda as seguintes propriedades:

$$\left( \frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ e } (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Exemplos:

$$\left( \frac{2}{3} \right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

$$\left( \frac{1}{4} \right)^{-3} = \left( \frac{4}{1} \right)^3 = \frac{4^3}{1^3} = 64$$

f) a última propriedade refere-se à raiz  $n$ -ésima de um número:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ onde } a \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Em outras palavras, é sempre possível transformar a raiz  $n$ -ésima de um número em potência e vice-versa. Veja os exemplos:

$$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\frac{3^2}{4^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule o valor da expressão:  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-5)^2 + (13207)^0$

**Resolução:** Aplicamos as propriedades de potências e calculamos o valor numérico de cada uma, lembrando que todo número elevado a zero é igual a 1:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-5)^2 + (13207)^0 = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 - 25 + 1 = 9 - 25 + 1 = \boxed{-15}$$

2. Efetue reduzindo as potências à mesma base:  $\frac{(9^2 \cdot 81)^{-1} \cdot 3}{27^{-2} \cdot 9}$

**Resolução:** Para reduzir a potência à mesma base, efetuaremos as seguintes substituições e aplicaremos as propriedades necessárias:  $9 = 3^2$ ,  $81 = 3^4$  e  $27 = 3^3$ . Temos, então:

$$\begin{aligned} \frac{(9^2 \cdot 81)^{-1} \cdot 3}{27^{-2} \cdot 9} &= \frac{\left[(3^2)^2 \cdot 3^4\right]^{-1} \cdot 3}{(3^3)^{-2} \cdot 3^2} = \\ &= \frac{\left[3^4 \cdot 3^4\right]^{-1} \cdot 3}{3^{-6} \cdot 3^2} = \frac{\left[3^{4+4}\right]^{-1} \cdot 3}{3^{-6+2}} = \frac{\left[3^8\right]^{-1} \cdot 3^1}{3^{-4}} = \frac{3^{-8} \cdot 3}{3^{-4}} = \frac{3^{-8+1}}{3^{-4}} \\ &= \frac{3^{-7}}{3^{-4}} = 3^{-7-(-4)} = 3^{-7+4} = 3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{27}} \end{aligned}$$

3. Resolva:  $\frac{\sqrt{2} \cdot (2^{\frac{3}{2}})^{-1} \cdot 2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}}$

**Resolução:** Observe que aparecem potências e raízes na mesma expressão. Portanto, para facilitar a resolução, transformaremos as



as raízes em potências. Podemos, deste modo, aplicar as propriedades conhecidas:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} \cdot 2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2}{\sqrt[3]{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1}}{2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1-3+2}{2}}}{2^{\frac{2+1}{3}}} = \frac{2^{\frac{0}{2}}}{2^{\frac{3}{3}}} = \frac{2^0}{2^1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4. Calcule:  $\sqrt{\frac{3 \cdot 3^{3^{-1}}}{\sqrt[3]{3}}}$ . *Resolução:* 
$$\sqrt{\frac{3 \cdot 3^{3^{-1}}}{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt{\frac{3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{1+\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{\frac{3+1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{3^{\frac{4-1}{3}}} = \sqrt{3^{\frac{3}{3}}} = \boxed{= \sqrt{3}}$$

### Exercícios propostos:

2. Resolva as expressões, utilizando as propriedades de potências:

a)  $\frac{(49 \cdot 7^{-2})}{343 \cdot 7^0}$     b)  $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^4}{3^{-5} \cdot \frac{1}{3}}$     c)  $\sqrt{\frac{2^{2^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{32}}$

3. (UFSE) Efetuando-se  $3^{3^{-1}}$ , obtém-se:

a)  $\sqrt[3]{3}$     b)  $-27$     c)  $\frac{1}{27}$     d)  $-9$     e)  $\frac{1}{9}$

4. (UFRS) O valor de  $n$  na igualdade  $\frac{(-3)^2 + 3^2}{3^0} = n$  é:

a) 0    b) 1    c) 4    d) 12    e) 18

5. (UFMG) Escrevendo a expressão  $\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^2}}$ ,  $x > 0$ , na forma  $x^n$  onde

$n$  é racional, obtém-se para  $n$  o valor:

a)  $-\frac{11}{10}$     b)  $-\frac{9}{10}$     c)  $-\frac{11}{20}$     d)  $\frac{29}{10}$     e)  $\frac{29}{20}$

**4. Equação exponencial** A equação exponencial caracteriza-se pela presença da incógnita no expoente. Exemplos:

$$\begin{array}{lll} 2^x = 32 & 5^{-x^2+4} = 125 & 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0 \\ 3^{x+1} = 243 & 3^x + 3^{x+1} - 3^{x-2} = \frac{11}{9} & \end{array}$$

Para resolver estas equações, além das propriedades de potências, utilizaremos a seguinte propriedade:

*Se duas potências são iguais, tendo as bases iguais, então os expoentes são iguais:  $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$  sendo  $a > 0$  e  $a \neq 1$*

**Exercícios resolvidos:**

1. Resolva as equações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $2^x = 32$

**Resolução:** Como  $32 = 2^5$ , substituiremos na equação. Note que, ao reduzir os dois membros da igualdade à mesma base (2), podemos igualar os expoentes:  $2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \boxed{S = \{5\}}$

b)  $3^{x+1} = 243$

**Resolução:** Procedemos da mesma forma que no exercício anterior, substituindo 243 por  $3^5$ , reduzimos os dois membros da equação à base 3, igualamos os expoentes e encontramos o valor de x:  $3^{x+1} = 243 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^5 \Rightarrow x+1 = 5 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \boxed{S = \{4\}}$

c)  $5^{-x^2+4} = 125$

**Resolução:** Como  $125 = 5^3$ , temos:

$$\begin{aligned} 5^{-x^2+4} = 125 &\Rightarrow 5^{-x^2+4} = 5^3 \Rightarrow -x^2 + 4 = 3 \Rightarrow -x^2 = 3 - 4 \\ -x^2 &= -1 \quad (-1) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \boxed{S = \{-1, 1\}} \end{aligned}$$

d)  $9^x = 27$

**Resolução:** Substituindo  $9 = 3^2$  e  $27 = 3^3$ , temos:

$$9^x = 27 \Rightarrow (3^2)^x = 3^3 \Rightarrow 3^{2x} = 3^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

e)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+3}$

**Resolução:** Podemos "inverter" uma das frações, lembrando de "trocar" o sinal do expoente. Procedendo deste modo podemos obter potências com bases iguais nos dois membros da equação:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} &= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-2x+3} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4-2(x+1)}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3}$$

Portanto,  $x + 1 = 2x + 3 \Rightarrow x - 2x = -3 - 1 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$

$$S = \{4\}$$

2. (UFSC) Determine o valor de  $x$  que satisfaz a equação:

$$8 \cdot \sqrt[5]{343} = 19208$$

*Resolução:* Fatorando 19208, temos que:  $19208 = 2^3 \cdot 7^4$ , por

outro lado:  $\sqrt[5]{343} = \sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}} = 7^{\frac{4}{5}}$

Efetuada as substituições na expressão dada:

$$8 \cdot \sqrt[5]{343} = 19208$$

$$2^3 \cdot 7^{\frac{12}{5}} = 2^3 \cdot 7^4$$

$$7^{\frac{12}{5}} = \frac{2^3 \cdot 7^4}{2^3}$$

$$7^{\frac{12}{5}} = 7^4$$

Portanto,  $\frac{12}{5} = 4 \Rightarrow 12 = 20 \Rightarrow 16x = 32 \Rightarrow x = 2$

$$S = \{2\}$$

### Exercícios propostos:

6. Resolva em  $\mathbb{R}$  as equações:

a)  $4^x = 16$

c)  $7^x = 343$

e)  $3^{-\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{3}$

b)  $8^x = 32$

d)  $5^{x^2-12} = \frac{1}{125}$

f)  $\sqrt[5]{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$

7. (UFRS) O valor de  $x$  que verifica a equação:  $27^{x-1} = \sqrt{\sqrt{9^x}}$  é:

a) 0,4 b) 0,8333 c) 1,2 d) 2,5 e) inexistente

*Sugestão:* efetue a seguinte substituição:  $\sqrt{\sqrt{9^x}} = \sqrt{9^{\frac{x}{2}}} = \left(9^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{x}{4}}$

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva em  $\mathbb{R}$  as equações exponenciais: a)  $3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = \frac{11}{9}$

**Resolução:** Note que esta equação é diferente das anteriores, pois no primeiro membro há três exponenciais. Adotamos um processo próprio para resolvê-la. A exponencial cujo expoente é  $x + 1$  pode ser desmembrada utilizando a propriedade do produto de potências com bases iguais. Analogamente, a exponencial que tem expoente  $x - 1$  é desmembrada utilizando o quociente de potências de bases iguais. Observe:

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3 \text{ (conservar a base e somar os expoentes)}$$

$$3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1} \text{ (conservar a base e subtrair os expoentes)}$$

Substituímos na equação dada:

$$3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = \frac{11}{9} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 - \frac{3^x}{3} = \frac{11}{9}$$

Como  $3^x$  é fator comum, faremos uma *mudança de variável*, para visualizar melhor a equação. Por exemplo, seja:

$$\boxed{3^x = t} \Rightarrow t + 3t - \frac{t}{3} = \frac{11}{9} \Rightarrow 4t - \frac{t}{3} = \frac{11}{9} \Rightarrow \frac{36t - 3t}{9} = \frac{11}{9}$$
$$33t = 11 \Rightarrow t = \frac{11}{33} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\text{Como } 3^x = t, \text{ temos } 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{S = \{-1\}}$$

b)  $2^{x+2} - 2^x + 2^{x-1} = 14$

**Resolução:** Procedemos da mesma forma que no exercício anterior, aplicando as propriedades do produto e quociente de potências com mesma base:  $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 2^x \cdot 4 = 4 \cdot 2^x$

(conservar a base e somar os expoentes)

$$2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{2^x}{2^1} \text{ (conservar a base e subtrair os expoentes)}$$

Substituímos, na equação dada:

$$2^{x+2} - 2^x + 2^{x-1} = 14 \Rightarrow 4 \cdot 2^x - 2^x + \frac{2^x}{2} = 14$$

Façamos uma mudança de variável, por exemplo:

$$\boxed{2^x = m} \Rightarrow 4m - m + \frac{m}{2} = 14 \Rightarrow 3m + \frac{m}{2} = 14 \Rightarrow \frac{6m + m}{2} = \frac{28}{2}$$

$$7m = 28 \Rightarrow m = 4$$

Como  $2^x = m$ , temos  $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$

### ⇒ Exercícios propostos:

8. Resolva as equações exponenciais em  $\mathbb{R}$ :

a)  $2^x + 2^{x+2} - 2^{x+3} = -24$       c)  $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 72$

b)  $5^x + 5^{x+1} - 5^{x-1} = 29$

9. (UE de Londrina-PR) A solução da equação  $2^{x-1} - 2^{x+2} = -56$  é um número:

a) primo

c) divisível por 4

e) divisível por 7

b) múltiplo de 3

d) múltiplo de 5

### ⇒ Exercícios resolvidos:

1. Resolva em  $\mathbb{R}$  as equações:

a)  $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$

*Resolução:* Neste exercício, não temos nem somas nem subtrações nos expoentes, porém há um produto  $2 \cdot x$ . Podemos, então, aplicar a propriedade de uma potência elevada a outra potência. Observe:  $2^{2x} = 2^{2 \cdot x} = 2^{x \cdot 2} = (2^x)^2$

Substituindo na equação dada:

$$2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Façamos uma mudança de variável para visualizar melhor a equação. Seja:

$$\boxed{2^x = t} \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7 \Rightarrow t = \frac{-(-1) \pm 7}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \therefore t = 4 \text{ ou } t = -3$$

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Como  $2^x = t$ , temos:

ou

$$2^x = -3 \therefore \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{S = \{2\}}$$

b)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

*Resolução:* Note que podemos fatorar o número 9 e aplicar a propriedade de potência de uma potência:

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2 \cdot x} = 3^{x \cdot 2} = (3^x)^2$$

Substituindo na equação, temos:

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Façamos uma mudança de variável, por exemplo:

$$3^x = m \Rightarrow m^2 - 4 \cdot m + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 \therefore \sqrt{\Delta} = 2$$

$$m = \frac{-(-4) \pm 2}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow m = 3 \text{ ou } m = 1$$

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Como  $3^x = m$ , temos:

ou

$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$$

$$S = \{0, 1\}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**10.** Determine o valor de  $x$  nas equações exponenciais:

a)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

c)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

b)  $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

d)  $2^{2x} + 6 \cdot 2^x + 5 = 0$

**11.** (FEI-SP) Resolva  $\frac{4^x + 4}{5} = 2^x$ .

### 5. Função exponencial. Gráficos

A função exponencial  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$  e contra-domínio  $\mathbb{R}$ , é definida por  $y = a^x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y = a^x$  onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$

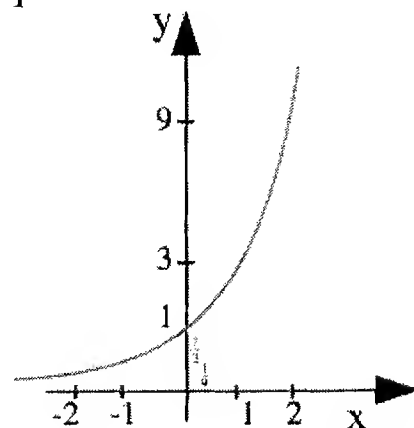
São exemplos de funções exponenciais:

$$y = 2^x \quad y = (\sqrt{3})^x \quad y = \pi^x \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

**a) Gráfico da função exponencial:** Considere a função  $y = 3^x$ . Vamos atribuir valores a  $x$ , calcular  $y$  e a seguir construir o gráfico:

Observando o gráfico, podemos concluir que:

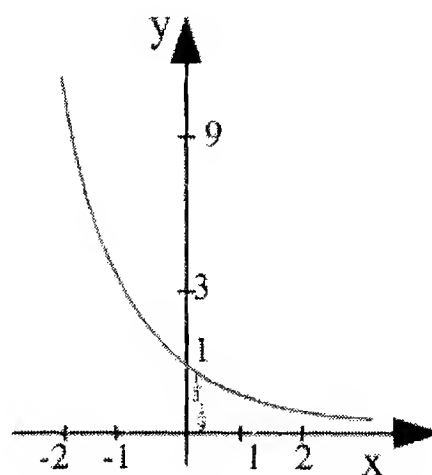
$x$	$y = 3^x$
-2	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
-1	$3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
0	$3^0 = 1$
1	3
2	9
3	27



- ① a curva se aproxima muito do eixo Ox, porém não o intercepta porque para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  temos  $y = 3^x$  diferente de zero;
- ② qualquer que seja a base positiva da exponencial, a curva intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada 1, porque neste ponto o valor de  $x$  é zero e  $a^0 = 1$ ;
- ③ a *função é crescente*, ou seja, se o valor de  $x$  aumenta, então  $y$  também aumenta.

Vamos, agora, construir o gráfico da exponencial  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ :

$x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$
-1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3^1 = 3$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$



Note que:

- ① a curva se aproxima do eixo Ox, mas não o intercepta pois a exponencial não se anula;
- ② a *função é decrescente*, pois à medida que o valor de  $x$  aumenta, o valor de  $y$  diminui.

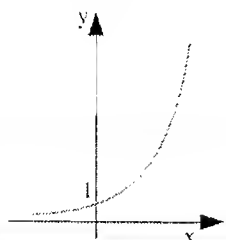
Comparando os gráficos, podemos concluir que o crescimento da função está relacionado ao valor da base da exponencial. Ou seja, no primeiro gráfico a função é crescente e a base é 3 ( $a = 3$ ), no segundo, a função é decrescente e a base é  $\frac{1}{3}$  ( $a = \frac{1}{3}$ ).

De forma geral, dada a função:  $y = a^x$

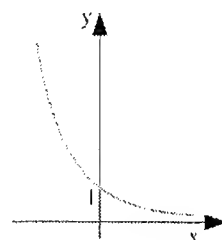
- se  $a > 1$  a função exponencial é *crescente*;
- se  $0 < a < 1$  a função é *decrescente*.

Graficamente temos:

$y = a^x$   
 $a > 1 \Rightarrow$  exponencial  
 crescente



$y = a^x$   
 $0 < a < 1 \Rightarrow$  exponencial  
 decrescente



### Exercícios resolvidos:

1. Classifique as funções exponenciais em crescente ou decrescente.

a)  $y = 2^x$

c)  $y = \pi^x$

e)  $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

b)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d)  $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Resolução: a) Como  $a = 2$  a função é crescente.

b) Como  $a = \frac{1}{2}$ , portanto  $0 < a < 1$ , e a função é decrescente.

c) Sabendo que  $\pi \cong 3,14$ , portanto  $a$  é maior que 1, e a função é crescente.

d) Como  $a = \frac{2}{5}$  e  $0 < \frac{2}{5} < 1$ , a função é decrescente.

e) Como  $a = \frac{5}{2} = 2,5$  a função é crescente.

2. Determine o valor de  $a$  para que a função abaixo seja crescente:

$$y = \left(-\frac{a}{2} + 3\right)^x$$

Resolução: A condição para que a função exponencial seja crescente é que a base seja maior que 1. Então:

$$-\frac{a}{2} + 3 > 1 \Rightarrow -\frac{a}{2} > -2 \quad (-1) \Rightarrow \frac{a}{2} < 2 \Rightarrow \boxed{a < 4}$$

3. Determine  $m$  para que a função abaixo seja decrescente:

$$f(x) = \left(\frac{m}{4} + 7\right)^{x+1}$$

Resolução: Para que a função seja decrescente, a base da



exponencial deve ser um número entre 0 e 1. Portanto:

$$0 < \frac{m}{4} + 7 < 1 \Rightarrow 0 - 7 < \frac{m}{4} + \cancel{7} - \cancel{7} < 1 - 7 \Rightarrow -7 < \frac{m}{4} < -6$$

$$-7 \cdot 4 < \frac{m}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} < -6 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{-28 < m < -24}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**12.** Classifique as funções exponenciais em crescente ou decrescente:

a)  $y = 7^x$                       c)  $y = 12,1^x$                       e)  $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

b)  $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$                       d)  $y = \left(\frac{12}{5}\right)^x$                       f)  $y = \left(\frac{10}{11}\right)^x$

**13.** Determine  $a$  para que cada uma das funções abaixo seja crescente:

a)  $y = (2a + 12)^x$     b)  $y = (-3a + 4)^x$     c)  $f(x) = \left(\frac{a}{5} - 7\right)^x$

**14.** Determine  $k$  para que cada uma das funções abaixo seja decrescente:

a)  $f(x) = \left(\frac{k}{3} + 9\right)^x$     b)  $f(x) = (-k + 5)^x$     c)  $y = (7k - 63)^x$

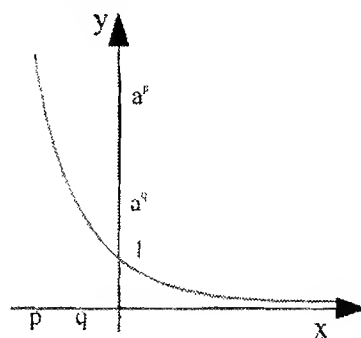
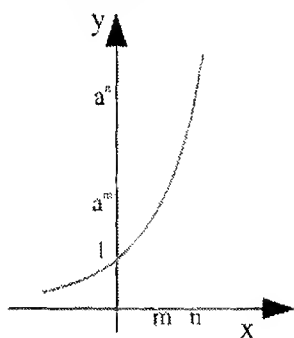
**6. Inequação exponencial** A inequação exponencial caracteriza-se pela presença da incógnita no expoente e de um dos sinais de desigualdade:  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  ou  $\leq$ . São exemplos de inequações exponenciais:

$$3^x < 9 \qquad 2^{x+4} \geq 32 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} < \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

Antes de resolvê-las, vamos analisar os gráficos abaixo.

$f(x)$  é crescente  $\Rightarrow a > 1$

$f(x)$  é decrescente  $\Rightarrow 0 < a < 1$



Observando o gráfico, temos que:

→ na *função crescente*, conservamos o sinal da desigualdade para comparar os expoentes:

$$\boxed{a^n > a^m \Leftrightarrow n > m \text{ e } a^m < a^n \Leftrightarrow m < n}$$

→ na função decrescente, “invertemos” o sinal da desigualdade para comparar os expoentes:

$$a^p > a^q \Leftrightarrow p < q \text{ e } a^q < a^p \Leftrightarrow q > p$$

Desde que as bases sejam iguais.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva as inequações:

a)  $2^x > 32$

**Resolução:** Para comparar os expoentes, é necessário reduzir os dois membros da inequação à mesma base, lembrando que  $2^5 = 32$ . Temos:  $2^x > 32 \Rightarrow 2^x > 2^5$

Como  $a = 2$  (função crescente), conservamos o sinal:  $x > 5$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{8}{27}$

**Resolução:** Substituímos  $\frac{8}{27}$  por  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$  reduzindo os dois membros

à mesma base:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Como  $0 < \frac{2}{3} < 1$  (função decrescente), invertamos o sinal:  $x \geq 3$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

c)  $16^{x+1} \geq 64^{x-1}$

**Resolução:** Note que 16 e 64 são potências de base 2, então:

$$16^{x+1} = (2^4)^{x+1} = 2^{4x+4} \text{ e } 64^{x-1} = (2^6)^{x-1} = 2^{6x-6}$$

Substituindo na inequação, temos:  $16^{x+1} \geq 64^{x-1}$  e  $2^{4x+4} \geq 2^{6x-6}$

Como  $a = 2 > 1$  (função crescente), conservamos o sinal:

$$4x + 4 \geq 6x - 6 \Rightarrow 4x - 6x \geq -6 - 4 \Rightarrow -2x \geq -10 \cdot (-1)$$

$$2x \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{10}{2} \Rightarrow x \leq 5$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

d)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \leq \frac{25}{4}$

**Resolução:** Observe que  $\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ .

Substituindo na inequação temos:  $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2$

Para reduzir os dois membros à mesma base, podemos "inverter" uma das frações, lembrando de "trocar" o sinal do expoente de acordo com a propriedade  $\frac{1}{a} = a^{-1}$ :  $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

Substituindo na inequação:  $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

Como  $0 < 2/5 < 1$  (função decrescente), invertemos o sinal:

$$x + 1 \geq -2 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}}$$

e)  $2^{x-1} > \sqrt[3]{16}$

**Resolução:** Lembre que toda raiz pode ser transformada em potência, então:  $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

Substituindo, temos:  $2^{x-1} > 2^{\frac{4}{3}}$

$$\text{Então, } x - 1 > \frac{4}{3} \Rightarrow x > \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow x > \frac{4+3}{3} \Rightarrow x > \frac{7}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}\right\}}$$

f)  $0,1^{x-2} \leq 0,0001$

**Resolução:** Os números decimais podem ser transformados em frações onde o denominador é uma potência de base 10. Temos

$$\text{então: } 0,1^{x-2} \leq 0,0001 \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

Como  $0 < \frac{1}{10} < 1$ , invertemos o sinal de desigualdade

$$x - 2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 6$$

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

15. Resolva em  $\mathbb{R}$  as inequações exponenciais:

a)  $3^x < 81$

d)  $25^x < 625$

g)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+9} < \left(\frac{4}{3}\right)^5$

b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 243$

e)  $2^{x+1} \geq \sqrt[5]{64}$

h)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \geq \frac{32}{243}$

c)  $0,1^{x+4} < 0,001$

f)  $7^{-x+1} < \frac{1}{343}$

**16.** (UFPI) Seja  $S$  o conjunto solução de  $\left(\frac{5}{3}\right)^{-x+2} > \left(\frac{3}{5}\right)^{1-2x}$ . Então

- a)  $S = \mathbb{R}^*$ ; b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ ; c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ ;  
 d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ ; e)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

**17.** (PUC-SP) Determine  $x$  tal que  $\frac{1}{8} \leq 2^{-x}$

### Exercícios resolvidos:

**1. Resolva as inequações exponenciais:**

a)  $2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^x \leq 18$

**Resolução:** Neste exercício, o primeiro membro da inequação é composto por três exponenciais, portanto, deve-se aplicar outro método de resolução. Inicialmente utilizamos as propriedades de potências:  $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{2^x}{2^1} = \frac{2^x}{2}$

Substituindo, temos:  $2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^x \leq 18 \Rightarrow 4 \cdot 2^x - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18$

Façamos uma mudança de variável:  $2^x = t$

Então:  $4t - \frac{t}{2} + t \leq 18 \Rightarrow \frac{8t - t + 2t}{2} \leq \frac{36}{2} \Rightarrow 9t \leq 36 \Rightarrow t \leq 4$

Como  $2^x = t$  e  $t \leq 4$ , temos que:  $2^x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^2 \Rightarrow x \leq 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

b)  $3 \cdot 9^x + 8 \cdot 3^x - 3 > 0$

**Resolução:** Aplicando propriedades de potências, temos:

$9^x = (3^2)^x = 3^{2 \cdot x} = 3^{x \cdot 2} = (3^x)^2$

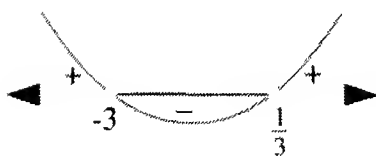
Substituindo:  $3 \cdot 9^x + 8 \cdot 3^x - 3 > 0 \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + 8 \cdot 3^x - 3 > 0$

Façamos uma mudança de variável:  $3^x = m \Rightarrow 3m^2 + 8m - 3 > 0$

Igualamos a zero para determinar as raízes:

$3m^2 + 8m - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 + 36 = 100$

$m = -\frac{8 \pm 10}{6} \Rightarrow m = \frac{1}{3} \text{ ou } m = -3$



Como estamos resolvendo uma inequação de segundo grau em  $m$ , devemos fazer um esboço do gráfico para determinar o(s) intervalo(s) da solução.

Como, na inequação, queremos os valores de  $m$  para que  $3m^2 + 8m - 3 > 0$ , os intervalos que nos interessam são os que

possuem sinal positivo. Então:  $m < -3$  ou  $m > \frac{1}{3}$

Como  $3^x = m$ , temos:  $3^x < -3 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$  ou  $3^x > \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x > 3^{-1}$

$$x > -1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

18. Resolva as inequações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} > 165$  c)  $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 > 0$

b)  $2^{x-1} + 2^x - 2^{x+1} \leq -\frac{1}{8}$

19. (UFRS) O conjunto solução da inequação  $3^{2-x} + 3^{2+x} > 18$ , é:

a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$  c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$  e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$  d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

20. (UFAC) A quantidade de números inteiros  $n$  que satisfazem a

desigualdade  $\frac{1}{8} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 8$  é igual a: a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

**7. O número  $e$**  O número  $e$  tem grande importância em diversos ramos das ciências, pois está presente em vários fenômenos naturais, por exemplo:

- ⇒ crescimento populacional;
- ⇒ crescimento de populações de bactérias;
- ⇒ desintegração radioativa.

Na área de Economia, é aplicado no cálculo de juros.

Foi o matemático inglês John Napier (1550–1617) o responsável pelo desenvolvimento da teoria logarítmica utilizando o número  $e$  como base. O número  $e$  é irracional, ou seja, não pode ser escrito sob forma de fração, e vale:

$$e = 2,71828182...$$

Como o número  $e$  é encontrado em diversos fenômenos naturais, a função  $f(x) = e^x$  é considerada uma das funções mais importantes da matemática, merecendo atenção especial de cientistas de diferentes áreas do conhecimento humano.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolva a equação  $e^{2x} - e^{x+1} = 0$

**Resolução:** Resolvemos, como qualquer outra função exponencial, aplicando as propriedades de potências conhecidas:

$$e^{2x} - e^{x+1} = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - e^x \cdot e = 0$$

$$\text{Seja } e^x = t \Rightarrow t^2 - e \cdot t = 0$$

Colocamos  $t$  em evidência para determinar as raízes:

$$t \cdot (t - e) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t - e = 0 \Rightarrow t = e$$

$$\text{Como } e^x = t, \text{ temos } \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \\ e^x = e \Rightarrow e^x = e^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{1\}}$$

2. Uma substância radioativa desintegra-se de modo que, no instante  $t$ , a quantidade *não desintegrada* é:  $m(t) = m_0 \cdot 2^{-et}$ . Qual o valor de  $t$  para que metade da quantidade inicial  $m_0$  se desintegre?

**Resolução:** Queremos calcular o tempo  $t$  para que  $m(t) = \frac{m_0}{2}$ .

Substituímos este valor de  $m(t)$  na fórmula dada:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot 2^{-et} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-et}$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes

$$-et = -1 \Rightarrow et = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{e}$$

Como  $e$  vale aproximadamente 2,7 ( $e \cong 2,7$ ), temos:

$$t \cong \frac{1}{2,7} \Rightarrow \boxed{t \cong 0,37}$$

### Exercícios propostos:

21. (PUC-SP) Sobre a função  $t(x) = e^x$  definida em  $\mathbb{R}$ , podemos afirmar que:

a) tem um único zero no intervalo  $[0, 2]$

b)  $e^x < a^x$ , qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}^*$  d) assume valores de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+$

c)  $e^x > a^x$ , qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e) assume valores apenas em  $\mathbb{R}_+$

22. (UFCE) Meia vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Tomemos, hoje, 16 gramas de uma substância radioativa cuja meia-vida é de 5 anos. Se daqui a  $n$  anos sua massa for  $2^{-11}$  gramas, o valor de  $n$  é igual a:

a) 525 b) 550 c) 565 d) 575 e) 595

**23.** (UFAL) Devido à desintegração radioativa, a massa de certa substância diminui em função do tempo. A massa restante é dada pela lei:  $f(t) = q \cdot 2^{\frac{-t}{5.000}}$ , na qual  $t$  é o tempo em anos e  $q$  é a quantidade inicial da substância em gramas. Quantos anos deverão se passar para que reste apenas  $\frac{1}{4}$  da massa inicial da substância?

- a) 5 000   b) 10 000   c) 15 000   d) 20 000   e) 25 000

### Exercícios complementares:

**24.** (UFPB) Sendo  $x^3 = 25$  e  $y^2 = 27$ , calcular o módulo de  $x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{4}{3}}$ .

**25.** (Unicamp-SP)

- a) Calcule as seguintes potências:  $a = 3^3$ ,  $b = (-2)^3$ ,  $c = 3^{-2}$  e  $d = (-2)^{-3}$ .  
b) Escreva os números  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  em ordem crescente.

**26.** (UFMG) O valor de

$$m = \frac{\sqrt{(-2)^2} \cdot (0,333... - 1)}{2^{-1}} \text{ é:}$$

- a)  $-\frac{8}{3}$    b)  $-\frac{4}{3}$    c)  $-\frac{2}{3}$    d)  $\frac{5}{2}$    e)  $\frac{8}{3}$

**27.** (UFMG) Em relação aos números reais, a alternativa correta é

a)  $3^{5^2} : 3^5 = 3^5$    d)  $\frac{8^{3^2}}{8^3} = 8^6$

b)  $\left(3^{3^9}\right)^{\frac{1}{9}} = 3^3$    e)  $(5^{-3} \cdot 7)^2 = 5^9 \cdot 49$

c)  $\sqrt[8]{10^{2^6}} = 10^{2^{\frac{3}{4}}}$

**28.** (Cesgranrio-RJ) Se  $a^2 = 99^6$ ,  $b^3 = 99^7$  e  $c^4 = 99^8$  então  $(abc)^{12}$  vale:

a)  $99^{12}$    c)  $99^{28}$    e)  $99^{99}$

b)  $99^{\frac{21}{2}}$    d)  $99^{88}$

**29.** (UFMS) Calcular  $x$  na igualdade:

$$\left(\frac{0}{0,125}\right)^0 \cdot (0,5)^{2x} = (0,25)^{84-x}$$

**30.** (UFRR) Seja  $x$  a raiz da equação  $(0,1)^{x-5} = 10$ . Calcule o valor de  $10x$ .

**31.** (UFSC) O valor de  $x$  que satisfaz

a equação:  $\frac{5^{4x-12}}{5^{3x+8}} = \frac{1}{125}$  é:

**32.** (UFES) Se  $9^x - 9^{x-1} = 216$ , então  $(2x)^x$  é igual a:

a) 3   b)  $3\sqrt{3}$    c) 9   d) 25   e)  $25\sqrt{5}$

**33.** (Mack-SP) A solução da equação

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{x-3} = \left(\frac{12}{9}\right)^x$$

é um número racional  $x$ , tal que:

a)  $-1 \leq x < 0$    d)  $2 \leq x < 3$

b)  $0 \leq x < 1$    e)  $3 \leq x < 4$

c)  $1 \leq x < 2$

**34.** (UFPA) Se  $V$  é o conjunto solução da equação  $2^x + \frac{4}{2^x} = 5$ , então:

a)  $V = \{1, 4\}$    d)  $V = \{1, 2\}$

b)  $V \subset \mathbb{Z}_+^*$    e)  $V \supset \{0\}$

c)  $V$  é unitário

**35.** (UFPI) Se  $2^{x+1} - 2^{3-x} = 6$ , então  $x^2 + 20$  é igual a:

a) 20   b) 21   c) 24   d) 29   e) 36

**36.** (UFRN) A solução da equação:

$$9^{x-1} + 3^{x-1} = 6$$

é um número:

a) entre 2 e 3   d) entre 1 e 2

b) menor que 0   e) maior que 3

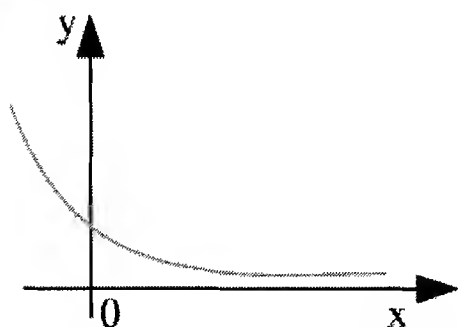
c) entre 0 e 1

**37.** (UFMS) Calcule o valor de  $x$  que satisfaz a equação  $9^x = 729\sqrt{3^x}$ .

**38.** (FGV-SP) Se  $x$  é raiz da equação:  $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = \frac{13}{27}$ , então  $x^{-1}$  vale:

- a)  $\frac{1}{4}$    b)  $-\frac{1}{4}$    c)  $\frac{1}{8}$    d)  $\frac{1}{2}$    e)  $-\frac{1}{2}$

**39.** (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, está representado o gráfico da função:  $f(x) = b^x$ ,  $b > 0$ .

Se  $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$ ,

a única afirmativa VERDADEIRA sobre o valor de  $b$  é:

- a)  $0 < b < \frac{1}{9}$    d)  $1 < b < 4$   
 b)  $\frac{2}{9} < b < \frac{4}{9}$    e)  $4 < b < 9$   
 c)  $\frac{8}{9} < b < 1$

**40.** (UFMS) Dada a função  $y = f(x) = a^x$ , com  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. O domínio da função  $f$  é  $\mathbb{R}$ .  
 02. A função  $f$  é crescente em seu domínio quando  $0 < a < 1$ .

04. Se  $a = 2$ , então  $f(-1) = \frac{1}{2}$ .

08. O gráfico de  $f$  passa pelo ponto  $P(0, 1)$ .

16. Se  $a = \frac{1}{3}$  e  $f(x) = 243$ , então  $x = -81$ .

**41.** (U. F. Alagoas) Seja a função  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2^x$ . Para que valor de  $x$  tem-se  $f(f(x)) = 256$ ?

- a) 3   b) 4   c) 5   d) 6   e) 7

**42.** (PUC-RS) O conjunto solução da inequação  $(0,1)^{x^2-5x} - \frac{1}{(0,1)^6} > 0$  é:

- a)  $[2, 3]$   
 b)  $]2, 3[$    d)  $[3, +\infty[$   
 c)  $] -\infty, 2]$    e)  $] -\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

**43.** (F. C. Chagas - BA) A soma de todos os números inteiros que satisfaz a desigualdade

$$\frac{1}{64} < 4^{n-1} < 16 \text{ é:}$$

- a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) 5

**44.** (FGV-SP) Com relação à função

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

podemos afirmar que:

- a) é crescente em todo o domínio;  
 b) é crescente somente no intervalo  $] -\infty ; 0 ]$ ;  
 c) é decrescente em todo domínio;  
 d) é decrescente somente no intervalo  $[ 0, \infty [$ ;  
 e) o gráfico intercepta o eixo das abscissas.



# Capítulo VII

## FUNÇÃO LOGARÍTMICA

**1. Introdução** Durante o Renascimento, com o advento da astronomia e das grandes navegações, foi necessário simplificar os cálculos, transformando multiplicações e divisões em somas ou subtrações.

A idéia inicial é simples. Suponha, por exemplo, que se queira determinar o valor de  $x$  tal que:  $10^x = 5$

O que faziam os matemáticos era encontrar um valor aproximado de  $x$ , em geral um número irracional, tal que fosse verdadeira a igualdade. Procediam da mesma forma para outras equações exponenciais e tabelavam os valores determinados. Quando necessário, bastava consultar a tabela.

Por mais de dois séculos as tabelas logarítmicas representaram um poderoso instrumento de cálculo e somente deixaram de ser utilizadas com a invenção das calculadoras eletrônicas. Por outro lado, ainda hoje a teoria logarítmica tem importância fundamental no estudo das ciências, onde surgem os *logaritmos naturais*. A base destes logaritmos é o número  $e$ , e foram tabelados por Neper, por isso são também conhecidos por *logaritmos neperianos*. Os logaritmos naturais são utilizados, por exemplo, para calcular o crescimento populacional, taxas de juros de aplicações financeiras, desintegração radioativa etc.

### **2. Logaritmo**

**Definição:** O logaritmo de um número  $b$ , na base  $a$ , onde  $a$  e  $b$  são positivos e  $a$  é diferente de um, é um número  $x$ , tal que  $x$  é o expoente de  $a$  para se obter  $b$ , então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \text{ sendo } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

$b$  é chamado de **logaritmando**,  $a$  é chamado de **base** e  $x$  é o **logaritmo**.

Conclui-se que:

→ se  $2^4 = 16$ , então 4 é o logaritmo de 16 na base 2, ou:

$$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

→ se  $9^2 = 81$ , então 2 é o logaritmo de 81 na base 9, ou:

$$\log_9 81 = 2 \Leftrightarrow 9^2 = 81$$

Note que, sendo  $2^1 = 2$ ,  $3^1 = 3$  e  $5^1 = 5$ , temos então:  $\log_2 2 = 1$ ,

$$\log_3 3 = 1 \text{ e } \log_5 5 = 1$$

De forma geral,  $\log_a a = 1$ , sendo  $a > 0$  e  $a \neq 1$

**Observação:** Nos *logaritmos decimais*, ou seja, aqueles em que a base é 10, esta freqüentemente é omitida. Por exemplo:

logaritmo de 2 na base 10, notação:  $\log 2$

logaritmo de 3 na base 10, notação:  $\log 3$

logaritmo de 45 na base 10, notação:  $\log 45$

#### Exercícios resolvidos:

1. Calcule os seguintes logaritmos:

a)  $\log_2 32$

**Resolução:** Chamamos de  $x$  o logaritmo e aplicamos a definição:

$$\log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

b)  $\log_{25} \sqrt{5}$

**Resolução:** Chamamos de  $x$  o logaritmo e aplicamos a definição.

Resolvemos a exponencial obtida recorrendo às propriedades:

$$\begin{aligned} \log_{25} \sqrt{5} = x &\Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \\ (5^2)^x = 5^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow 5^{2x} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

c)  $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8}$

**Resolução:** Resolvemos aplicando a definição de logaritmo e as propriedades de exponenciais:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = x &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \\ &\Rightarrow \boxed{x = -3} \end{aligned}$$

d)  $\log_{10} 0,0001$

Resolução:  $\log_{10} 0,0001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0,0001 \Rightarrow 10^x = 10^{-4} \Rightarrow \boxed{x = -4}$

### ⇒ Exercícios propostos:

1. Calcule o valor numérico dos seguintes logaritmos:

a)  $\log_2 128$       c)  $\log_7 343$       e)  $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4}$       g)  $\log_4 2\sqrt{2}$   
 b)  $\log_4 64$       d)  $\log_3 \frac{1}{81}$       f)  $\log_{49} \sqrt{7}$       h)  $\log_{\frac{3}{5}} \frac{81}{625}$

2. (UFAM) O logaritmo de  $\sqrt{8}$  na base 2 é:

a)  $\frac{3}{2}$     b) 3    c)  $\frac{2}{3}$     d)  $\frac{1}{2}$     e)  $\frac{1}{3}$

### 3. Propriedades decorrentes da definição

**Domínio (condição de existência):** Segundo a definição, o logaritmando e a base devem ser positivos, e a base deve ser diferente de 1. Portanto, sempre que encontramos incógnitas no logaritmando ou na base devemos garantir a existência do logaritmo. Observe o procedimento nos exemplos seguintes:

Exemplo 1: a)  $\log_2 (x + 1)$

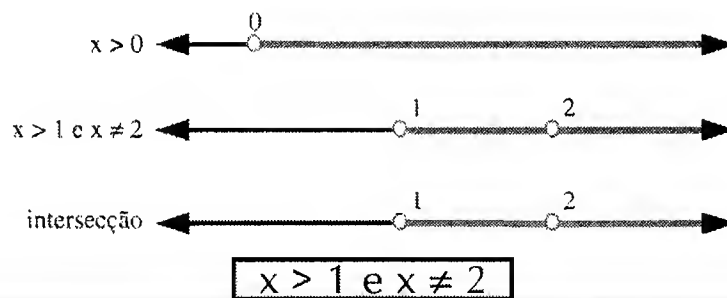
Este logaritmo existe se  $x + 1$  for positivo, então  $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Concluindo, este logaritmo existe se  $x > -1$ .

b)  $\log_{x-1} 2x$

O logaritmando e a base devem ser positivos, e a base não deve ser 1:  $2x > 0 \Rightarrow x > 0$  e  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ , então  $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

Como existem três condições sobre o valor de  $x$ , devemos determinar a intersecção



### ⇒ Exercício proposto:

3. Determinar as condições de existência dos logaritmos:

a)  $\log_2 (x + 3)$       c)  $\log_{x+1} (x - 5)$   
 b)  $\log_x (2x - 4)$       d)  $\log_x (3x - 1)$

**Propriedade 1** Observe a igualdade:  $\log_2 16 = \log_2 2^4$

Vamos calcular o valor numérico do logaritmo, recorrendo à definição:  $\log_2 2^4 = x \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4 \therefore \log_2 2^4 = 4$

Vejam os outro exemplo:  $\log_3 243 = \log_3 3^5$

Aplicando a definição temos:

$$\log_3 3^5 = x \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5 \therefore \log_3 3^5 = 5$$

De forma geral:  $\log_a a^m = m, a > 0 \text{ e } a \neq 1$

Exemplos:  $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

$$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

$$\log_{25} 625 = \log_{25} 25^2 = 2$$

**Propriedade 2** Vamos calcular os seguintes logaritmos, aplicando a definição:  $\log_2 1 = x \Leftrightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$ ,  $\log_3 1 = x \Leftrightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$  e  $\log_{10} 1 = x \Leftrightarrow 10^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Concluimos que o logaritmo de 1 tem valor numérico igual a zero, qualquer que seja a base:  $\log_a 1 = 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$

**Propriedade 3** Calculemos o logaritmo:  $a^{\log_a b}$

Neste caso, o logaritmo é o expoente de  $a$ . Chamamos de  $x$  e aplicamos a definição:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

$$\left. \begin{array}{l} x = \log_a b \\ \text{e} \\ a^x = b \end{array} \right\} \Rightarrow a^{\log_a b} = b$$

De forma geral:  $a^{\log_a b} = b$ , sendo  $b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule: a)  $2^{\log_2 7}$  b)  $\log_4 \log_3 81$

Resolução: a) Segundo a terceira propriedade:  $2^{\log_2 7} = 7$

b) Neste exercício, calculamos o logaritmo, de 81 na base 3, e substituímos na expressão dada:  $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

$$\text{Portanto: } \log_4 \log_3 81 = \log_4 4 = 1$$

2. Calcular o valor de A, sendo:

$$A = \log_3 27 - 2 \log_5 \frac{1}{25} + 4 \log_3 1$$

Resolução: Fatoramos os logaritmandos e aplicamos as propriedades necessárias, calculando o valor numérico de cada logaritmo:

$$A = \log_3 27 - 2 \log_5 \frac{1}{25} + 4 \log_3 1$$

$$A = \log_3 3^3 - 2 \log_5 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4 \cdot 0 \Rightarrow A = 3 - 2 \log_5 5^{-2} + 0$$

$$A = 3 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow A = 3 + 4 \Rightarrow \boxed{A = 7}$$

3. Calcular  $x$  em cada caso:

a)  $\log_2 x = \frac{1}{3}$

b)  $\log_x \frac{1}{343} = 3$

c)  $\log_5 x = 0$

*Resolução:* a) Inicialmente, note que  $x$  é o logaritmando, portanto deve ser positivo ( $x > 0$ ). Para resolver, basta aplicar a definição:

$$\log_2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{3}} = x \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{2}}$$

b) Como  $x$  é a base, deve ser maior que zero e diferente de 1 ( $x > 0$  e  $x \neq 1$ ), então:

$$\log_x \frac{1}{343} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{343} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{7}}$$

c) Aplicando a definição ou utilizando a segunda propriedade, sempre que o logaritmo for igual a zero, o logaritmando é 1:

$$\log_5 x = 0 \Leftrightarrow 5^0 = x \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

4. Calcule o valor dos logaritmos utilizando as propriedades:

a)  $\log_2 64$

d)  $\log \frac{1}{\frac{1}{3} 27}$

h)  $\log_9 81$

l)  $3^{\log_3 9}$

b)  $\log_7 343$

e)  $\log_5 125$

i)  $\log_7 1$

c)  $\log_2 1$

f)  $2^{\log_2 5}$

j)  $7^{\log_7 20}$

5. Determinar  $x$  em cada caso:

a)  $\log_4 x = 3$

c)  $\log_x 10 = \frac{1}{2}$

e)  $\log_3 (x + 1) = 5$

b)  $\log_2 \frac{x}{2} = 4$

d)  $\log_x \sqrt{3} = -1$

6. Calcular o valor de  $K$ , dado:  $K = 3 \cdot \log_4 64 - \frac{1}{2} \cdot \log_5 \sqrt{5} + \log_{10} 0,1$

7. O valor do logaritmo  $\log \sqrt[6]{0,1}$  é:

a)  $-\frac{1}{2}$    b)  $-\frac{1}{6}$    c)  $\frac{1}{6}$    d)  $\frac{1}{2}$    e) 1

8. (UFSC) O valor da expressão,

$$3 \log_a a^5 + \log_a 1 - 4 \log_a \sqrt{a}, \text{ onde } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ é:}$$

#### 4. Propriedades operatórias dos logaritmos

a) **Logaritmo do produto:** Vamos calcular o logaritmo na base  $a$  ( $a > 0$  e  $a \neq 1$ ) do produto  $m \cdot n$ , aplicando a definição de logaritmo:

$$\textcircled{1} \log_a (m \cdot n) = x \Rightarrow a^x = m \cdot n$$

$$\textcircled{2} \log_a m = y \Rightarrow a^y = m$$

$$\textcircled{3} \log_a n = z \Rightarrow a^z = n$$

Substituindo  $\textcircled{2}$  e  $\textcircled{3}$  em  $\textcircled{1}$ , temos:  $a^x = a^y \cdot a^z \Rightarrow a^x = a^{y+z} \therefore \boxed{x = y + z}$

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n, \text{ sendo } m > 0, n > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplos: a)  $\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

b)  $\log_3 10 = \log_3 (2 \cdot 5) = \log_3 2 + \log_3 5$

c)  $\log_2 30 = \log_2 (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5$

b) **Logaritmos do quociente:**  $\log_a \frac{m}{n} = x \Rightarrow a^x = \frac{m}{n}$

$$\log_a m = y \Rightarrow a^y = m$$

$$\log_a n = z \Rightarrow a^z = n$$

Substituindo,  $a^x = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z} \therefore \boxed{x = y - z}$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n, \text{ sendo } m > 0, n > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplos: a)  $\log_5 \frac{3}{2} = \log_5 3 - \log_5 2$ ; b)  $\log_8 \frac{2}{5} = \log_8 2 - \log_8 5$ ;

c)  $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$ .

c) **Logaritmo de potência:**  $\log_a m^p = x \Rightarrow a^x = m^p$

$$\log_a m = y \Rightarrow a^y = m$$

Substituindo:  $a^x = (a^y)^p = a^{py} \therefore \boxed{x = p \cdot y}$

$$\log_a m^p = p \cdot \log_a m, \text{ sendo } p \in \mathbb{R}, m > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplos:  $\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2$  e  $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \log_2 5$

**Cologaritmo:** Define-se o cologaritmo como o oposto do logaritmo, portanto:  $\boxed{\text{colog}_a b = -\log_a b, \text{ sendo } b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1}$

Exemplos:  $\text{colog}_5 125 = -\log_5 125 = -\log_5 5^3 = -3$

$$\text{colog}_7 \frac{1}{343} = -\log_7 \frac{1}{343} = -\log_7 \left(\frac{1}{7}\right)^3 = -\log_7 7^{-3} = -(-3) = 3$$

### Exercícios resolvidos:

1. Desenvolver admitindo satisfeitas as condições de existência:

$$\log_3 \frac{\sqrt{y}}{x^2 z^3}$$

*Resolução:* Observando o logaritmando, notamos que:

1) o quociente pode ser desmembrado em uma subtração de

dois logaritmos:  $\log_3 \frac{\sqrt{y}}{x^2 z^3} = \log_3 \sqrt{y} - \log_3 x^2 z^3$

2) transformamos a raiz em potência,  $\log_3 \frac{\sqrt{y}}{x^2 z^3} = \log_3 y^{\frac{1}{2}} - \log_3 x^2 z^3$

3) o produto  $x^2 z^3$  pode ser transformado em soma de dois logaritmos e, posteriormente, aplicamos a propriedade de logaritmo de potências a cada parcela:

$$\log_3 \frac{\sqrt{y}}{x^2 z^3} = \log_3 y^{\frac{1}{2}} - (\log_3 x^2 + \log_3 z^3) = \boxed{\frac{1}{2} \log_3 y - 2 \log_3 x - 3 \log_3 z}$$

2. Determinar A, dado:  $\log_2 A = \frac{1}{3} \log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 t$

*Resolução:* Neste exercício, aplicamos as propriedades operatórias de forma a reduzir o segundo membro da equação a um único logaritmo de base 2. Note que:

1) todos os números que multiplicam os logaritmos podem ser expoentes dos correspondentes logaritmandos:  $\log_2 A = \log_2 x^{\frac{1}{3}} - \log_2 y - \log_2 t^3$

2) colocando - 1 em evidência obtemos uma soma que será transformada em produto;  $\log_2 A = \log_2 \sqrt[3]{x} - (\log_2 y + \log_2 t^3)$

$$\log_2 A = \log_2 \sqrt[3]{x} - \log_2 y t^3$$

3) a subtração será transformada em quociente;  $\log_2 A = \log_2 \frac{\sqrt[3]{x}}{y t^3}$

4) tendo um único logaritmo no segundo membro com base 2, igualamos os logaritmandos, obtendo a expressão que representa A:

$$\therefore \boxed{A = \frac{\sqrt[3]{x}}{y t^3}}$$

3. Dado que  $\log 2 = 0,301$  e  $\log 3 = 0,477$ , calcule o valor numérico de cada um dos logaritmos: (Lembre-se que, quando for omitida a base, consideramos que a base utilizada é 10)

a)  $\log 6$  b)  $\log 12$  c)  $\log 5$  d)  $\log 15$

**Resolução:** Para resolver este tipo de exercício, fatoramos o logaritmando e aplicamos as propriedades necessárias, de forma que se tenha apenas  $\log 2$  ou  $\log 3$ , substituindo pelos valores dados: a)  $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,301 + 0,477 = 0,778$   
 $\therefore \boxed{\log 6 = 0,778}$

b)  $\log 12 = \log (2^2 \cdot 3) = \log 2^2 + \log 3 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0,301 + 0,477 = 0,602 + 0,477 = 1,079$   
 $\therefore \boxed{\log 12 = 1,079}$

c) Neste caso o logaritmando é um número primo e, portanto, não pode ser fatorado. Procuramos, então, aplicar a propriedade do quociente, substituindo 5, por exemplo, por  $\frac{10}{2}$ , lembrando que  $\log 10 = 1$ , pois a base utilizada também é 10:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699$$

$$\therefore \boxed{\log 5 = 0,699}$$

d) Um dos fatores da decomposição do número 15 é o número 5. Aplicamos, portanto, o mesmo raciocínio do exercício anterior, porque somente podemos utilizar os valores do  $\log 2$  ou  $\log 3$ :

$$\log 15 = \log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = \log 3 + \log \frac{10}{2} =$$

$$\log 3 + \log 10 - \log 2 = 0,477 + 1 - 0,301 = 1,176 \therefore \boxed{\log 15 = 1,176}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

9. Desenvolva admitindo satisfeitas as condições de existência:

a)  $\log \frac{m^5 n^2}{\sqrt[3]{p^2}}$  b)  $\log \frac{\sqrt{r}}{s^4 t}$

10. Determine  $k$ , admitindo satisfeitas as condições de existência:

$$\log_5 k = 2\log_5 a - \log_5 b - \frac{1}{3}\log_5 c$$

11. (UFSC) Determinar o valor do quociente  $\frac{a}{b}$ , com  $a > 0$  e  $b > 0$ , na equação:  $\log_3 b - \log_3 a = -4$

12. (Fuvest-SP) Se  $\log 8 = a$ , então  $\log 5$  vale:

a)  $a^3$  b)  $5a - 1$  c)  $\frac{2a}{3}$  d)  $1 + \frac{a}{3}$  e)  $1 - \frac{a}{3}$



13. Dado que  $\log 2 = 0,301$  e  $\log 3 = 0,477$  calcule:

a)  $\log 30$ ; b)  $\log 18$ ; c)  $\log 24$ ; d)  $\log 45$

**5. Mudança de base** Até o momento, trabalhamos com expressões logarítmicas em que as bases são iguais; agora, observe o seguinte produto:

$$\begin{array}{ccc} P = \log 3 & \cdot & \log_{27} 10 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{base } 10 & & \text{base } 27 \end{array}$$

Como calcular P neste caso?

Para resolver questões deste tipo, utilizaremos uma propriedade que nos permite mudar a base do logaritmo para outra que for mais conveniente:

$$\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}, \text{ sendo } m > 0, n > 0, n \neq 1, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } \log_n m = x &\Leftrightarrow n^x = m \\ \log_a m = y &\Leftrightarrow a^y = m \\ \log_a n = z &\Leftrightarrow a^z = n \end{aligned}$$

$$\text{Substituindo, } (a^z)^x = a^y \Rightarrow a^{x \cdot z} = a^y \therefore \boxed{x = \frac{y}{z}}$$

$$\text{Logo, } \log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}$$

No exemplo, em  $\log_{27} 10$ , sendo 27 um múltiplo de 3 é conveniente mudar a base deste logaritmo. Utilizaremos base 10, pois esta é a base de  $\log 3$ . Temos então:

$$\log_{27} 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 27} = \frac{1}{\log_{10} 3^3} = \frac{1}{3 \log_{10} 3}$$

Substituindo na expressão dada:  $P = \log 3 \cdot \log_{27} 10$

$$P = \cancel{\log 3} \cdot \frac{1}{3 \cancel{\log_{10} 3}} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{3}}$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Simplifique a expressão e determine o valor de A, dado:

$$A = \log_3 8 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_2 5$$

**Resolução:** Notamos que todos os logaritmos têm bases diferentes, portanto a simplificação só é possível se efetuarmos uma mudan-

ça de base. Utilizaremos, por exemplo, base 10. Observe:

$$A = \log_3 8 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_2 5$$

$$A = \frac{\log 8}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow A = \frac{\log 8}{\log 2} \Rightarrow A = \log_2 8$$

$$A = \log_2 2^3 \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

2. Dados  $\log 2 = 0,301$  e  $\log 3 = 0,477$ , calcule: a)  $\log_2 3$  b)  $\log_2 30$

*Resolução:* a) Mudaremos a base pois os dados do problema tra-

zem base 10, então:  $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477}{0,301} \therefore \boxed{\log_2 3 = 1,585}$

b) Neste caso, além de mudar a base (para base 10), temos que aplicar as propriedades operatórias para calcular o logaritmo de 30, lembrando que o logaritmo de 5 é obtido através de um

quociente  $\left(\frac{10}{2}\right)$ :

$$\log_2 30 = \frac{\log 30}{\log 2} = \frac{\log(2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log 2} =$$

$$= \frac{\log 2 + \log 3 + \log \frac{10}{2}}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 10 - \log 2}{\log 2} = \frac{0,477 + 1}{0,301}$$

$$\therefore \boxed{\log_2 30 \cong 4,907}$$

3. (Fuvest-SP) Sendo  $a^2 + b^2 = 70ab$ , calcular  $\log \frac{(a+b)^2}{ab}$  em função de  $m = \log_5 2$  e  $n = \log_5 3$ .

*Resolução:* Inicialmente, desenvolvemos  $(a+b)^2$ :

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab} = \log \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} = \log \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab}$$

Podemos substituir  $a^2 + b^2$  por  $70ab$  conforme o enunciado do problema, efetuamos as operações necessárias e aplicamos as propriedades de logaritmos para determinar o logaritmo de 72:

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab} = \log \frac{70ab + 2ab}{ab} = \log \frac{72ab}{ab} = \log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) =$$

$$= \log 2^3 + \log 3^2 = 3\log 2 + 2\log 3$$

Devemos escrever o logaritmo obtido em função de  $m$  e  $n$ , porém  $m$  e  $n$  são logaritmos de base 5. Mudaremos, então, os logaritmos de base 10 para base 5, poderemos, assim, utilizar  $m$  e  $n$ :

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab} = 3\log 2 + 2\log 3 =$$

$$= 3 \left( \frac{\log_5 2}{\log_5 10} \right) + 2 \left( \frac{\log_5 3}{\log_5 10} \right) = \frac{3m}{\log_5 10} + \frac{2n}{\log_5 10} = \frac{3m+2n}{\log_5 10}$$

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{3m+2n}{\log_5(2 \cdot 5)} = \frac{3m+2n}{\log_5 2 + \log_5 5} = \frac{3m+2n}{m+1}$$

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab} = \boxed{\frac{3m+2n}{m+1}}$$

### Exercícios propostos:

**14.** (UFAL) Dado que  $\log_{10} 2 = 0,30$ , o valor de  $\log_5 2$  é:

- a)  $\frac{3}{50}$    b)  $\frac{3}{10}$    c)  $\frac{3}{8}$    d)  $\frac{3}{7}$    e)  $\frac{3}{5}$

**15.** (UFPA) Dadas as afirmações

I –  $\log_3(a \cdot b) = \log_3 a \cdot \log_3 b$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$

II –  $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$

III –  $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3 = 1$

IV –  $\log_3 \frac{a}{b} = \frac{\log_3 a}{\log_3 b}$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$

pode-se afirmar que:

- a) todas são verdadeiras.  
b) somente I, II e IV são verdadeiras.  
c) apenas II e III são verdadeiras.  
d) apenas II, III e IV são verdadeiras.  
e) todas são falsas.

**16.** (Fuvest-SP) Sabendo-se que  $5^p = 2$ , podemos concluir que  $\log_2$

100 é igual a: a)  $\frac{2}{p}$    b)  $2p$    c)  $2 + p^2$    d)  $2 + 2p$    e)  $\frac{2 + 2p}{p}$

**17.** (PUC-SP) Se  $a = \log_8 225$  e  $b = \log_2 15$ , então:

- a)  $a = \frac{2b}{3}$    c)  $a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \log_2 15$    e)  $b = \frac{a}{3}$   
b)  $b = \frac{2a}{3}$    d)  $a = \frac{b}{3}$

**18.** (FGV-SP) Sabendo-se que  $\log 2 = m$  e  $\log 3 = n$ , podemos afirmar que  $\log 108$  vale:

- a)  $m^2 + n^3$    b)  $m^3 + n^2$    c)  $2m + 3n$    d)  $3m + 2n$    e)  $6mn$

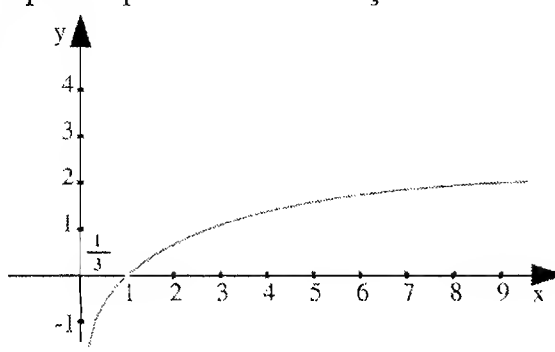
**6. Função logarítmica** Função logarítmica é a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}_+^*$  e contradomínio  $\mathbb{R}$ , que associa cada número real e positivo  $x$  ao logaritmo de  $x$  na base  $a$ , onde  $a$  é um número real, positivo e diferente de 1.

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow x \rightarrow y = \log_a x, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

**Gráfico da função logarítmica:** Vamos construir o gráfico de duas funções logarítmicas:  $y = \log_3 x$  e  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

a)  $y = \log_3 x$ : Atribuímos valores convenientes a  $x$ , calculamos  $y$ , conforme mostra a tabela abaixo. Localizamos os pontos no plano cartesiano obtendo a curva que representa a função.

x	y
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



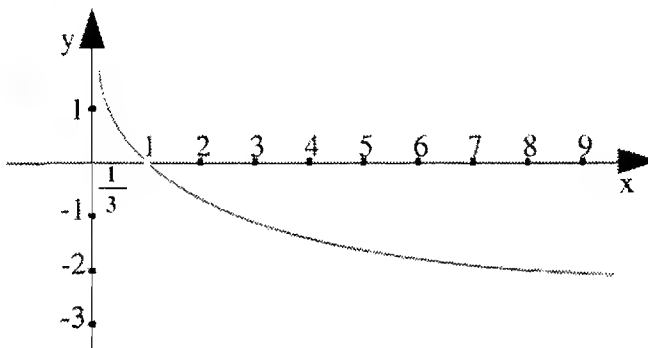
Observe que:

- 1) a curva não intercepta o eixo Oy, pois a função logarítmica não se anula;
- 2) a curva intercepta o eixo Ox no ponto (1, 0), pois  $\log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1$ ;
- 3) a função é crescente, ou seja, aumentando o valor de  $x$ , aumentamos o valor de  $\log_3 x$ .

b)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ : Vamos tabular valores convenientes de  $x$ , calculando  $y$ .

Localizamos os pontos no plano cartesiano, determinando a curva correspondente à função:

x	y
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



Observe que:

- 1) a curva não intercepta o eixo Oy;
- 2) a curva intercepta o eixo Ox no ponto (1, 0)

3) a função é decrescente, ou seja, aumentando o valor de  $x$ , diminui o valor de  $\log_{\frac{1}{3}} x$ .

Basicamente, as funções diferem em relação ao crescimento:

$y = \log_3 x$  é função crescente,  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  é função decrescente.

Concluimos, então, que o comportamento da curva está relacionado ao valor numérico da base. De modo geral, dada a função:  $y = \log_a x$

→ se  $a > 1$  a função é crescente

→ se  $0 < a < 1$  a função é decrescente

### Exercícios resolvidos:

1. Classificar as funções em crescente ou decrescente:

a)  $\log_2 x$  b)  $\log_{\frac{1}{2}} x$  c)  $\ln x$  d)  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$  e)  $\log_{12} x$

Resolução:

a) Como a base é 2 (portanto maior que 1), a função é crescente;

b) Como a base é  $\frac{1}{2}$  (portanto entre 0 e 1), a função é decrescente;

c)  $\ln x$  é o *logaritmo natural* de  $x$ , ou seja é  $\log_e x$ , como  $e$  é maior que 1 então a função é crescente;

d) Como  $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  então a função é decrescente;

e) Sendo  $12 > 1$ , a função é crescente.

2. Determine  $m$  para que a função  $y = \log_{m+3} 57$  seja crescente.

Resolução: Para que a função seja crescente a base deve ser maior que 1, então:  $m + 3 > 1 \Rightarrow m > -2$

3. Determine  $p$  para que a função  $y = \log_{2p-3} 21$  seja decrescente.

Resolução: Para que a função seja decrescente a base deve ser um número compreendido entre zero e 1, então:

$$0 < 2p - 3 < 1 \Rightarrow 3 < 2p < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < p < 2$$

### Exercícios propostos:

19. Determine  $k$  para que:

a)  $y = \log_{k+4} 3$  seja crescente; c)  $y = \log_{3k+12} 7$  seja crescente;

b)  $y = \log_{-k+9} 12$  seja decrescente; d)  $y = \log_{5k-1} 2$  seja decrescente.

**7. Equações logarítmicas** A equação logarítmica caracteriza-se pela presença do sinal de igualdade e da incógnita no logaritmando.

$$\log_6 2x = 2; \log_3 (x - 1) = 3; \log_x (6 - 5x) = 2;$$

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3; \log_5 x - \log_5(2x-1) = 1$$

Para resolver uma equação, antes de mais nada devemos estabelecer a *condição de existência* do logaritmo, determinando os valores da incógnita para que o logaritmando e a base sejam positivos, e a base diferente de 1.

### Exercícios resolvidos:

1.  $\log_6 2x = 2$

*Resolução: Condição de existência:* o logaritmando,  $2x$ , deve ser positivo, assim  $2x > 0 \Rightarrow x > 0$

Na resolução de equações logarítmicas podemos proceder de dois modos: *1º modo:* aplicamos a definição de logaritmo:

$$\log_6 2x = 2 \Leftrightarrow 6^2 = 2x \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$$

*2º modo:* substituímos o número 2 por um logaritmo de base 6, que equivale a 2, ou seja,  $\log_6 6^2 = 2$ . Substituindo na equação,

$$\text{temos: } \log_6 2x = 2 \Rightarrow \log_6 2x = \log_6 6^2$$

Encontramos, portanto, uma igualdade de logaritmos de mesma base, então os logaritmandos também são iguais:

$$2x = 6^2 \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$$

Observe que o valor encontrado,  $x = 18$ , satisfaz a condição de existência  $x > 0$ . Portanto:  $S = \{18\}$

2.  $\log_3(x-1) = 3$

*Resolução: Condição de existência:*  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Substituímos o número 3 por um logaritmo de base 3; obtendo logaritmos de mesma base; igualamos os logaritmandos, resolvendo a equação obtida:  $\log_3(x-1) = 3$

$$\log_3(x-1) = \log_3 3^3 \Rightarrow x-1 = 3^3 \Rightarrow x-1 = 27 \Rightarrow x = 28$$

Como  $x = 28$  satisfaz a condição de existência ( $x > 1$ ),

$$\text{temos: } S = \{28\}$$

3.  $\log_x(6-5x) = 2$

*Resolução: Condição de existência:* neste caso, a incógnita aparece no logaritmando e na base, por isso devemos impor as condições sobre os dois: logaritmando  $\rightarrow 6 - 5x \Rightarrow 6 - 5x > 0 \Rightarrow$

$$-5x > -6(-1) \Rightarrow 5x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{5}$$

$$\text{base} \rightarrow x \Rightarrow x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

$$\text{Portanto, } 0 < x < \frac{6}{5} \text{ e } x \neq 1$$

Resolvendo a equação temos:  $\log_x (6 - 5x) = 2$

$$\log_x (6 - 5x) = \log_x x^2 \Rightarrow 6 - 5x = x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -6$$

Note que nenhum dos valores encontrados satisfaz a condição de existência, portanto a equação não tem solução dentro dos números reais:  $\boxed{S = \emptyset}$

4.  $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 3$

*Resolução: Condição de existência:* os logaritmandos devem ser positivos, assim  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$  e  $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Tendo duas condições sobre o valor de  $x$ , devemos procurar a intersecção das duas para obter uma única condição:



A condição de existência é, portanto,  $x > 1$ .



Na resolução desta equação, aplicamos a propriedade do produto para reduzir o primeiro membro a um único logaritmo:

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 3 \Rightarrow \log_2 (x - 1) (x + 1) = 3 \Rightarrow \log_2 (x^2 - 1) = \log_2 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

De acordo com a condição de existência, somente são convenientes os valores de  $x$  maiores que 1, portanto  $-3$  não é elemento do conjunto solução:  $\boxed{S = \{3\}}$

5.  $\log_5 x - \log_5 (2x - 1) = 1$

*Resolução:* Estabelecemos a condição de existência para os dois logaritmandos:  $x > 0$  e  $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ . Efetuando a intersecção, temos:



A condição de existência é:  $x > \frac{1}{2}$



Na resolução, aplicamos a propriedade do quociente para reduzir o primeiro membro a um único logaritmo:



$$\log_5 x - \log_5 (2x - 1) = 1 \Rightarrow \log_5 \frac{x}{2x - 1} = \log_5 5 \rightarrow \frac{x}{2x - 1} = 5$$

$$x = 10x - 5 \Rightarrow 9x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

Para saber se  $\frac{5}{9}$  é maior ou menor que  $\frac{1}{2}$ , reduzimos as duas frações ao mesmo denominador.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{10}{18} \\ \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{9}{18} \end{array} \right\} \frac{10}{18} > \frac{9}{18} \Rightarrow \frac{5}{9} > \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{5}{9} \right\}$$

### Exercício proposto:

20. Resolva as equações:

- a)  $\log_2 4x = 5$                       d)  $\log_{10} (x + 2) + \log_{10} (x - 2) = \log_{10} 12$   
 b)  $\log_3 (2x + 7) = 1$                 e)  $\log_2 (-2x - 36) - \log_2 (1 - 3x) = 2$   
 c)  $\log_x (-2x + 3) = 2$

### Exercícios resolvidos:

1.  $\log_3 \sqrt{x} + \log_9 x = 3$

*Resolução:* Condição de existência:  $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$ .

Nesta equação, os logaritmos têm bases diferentes, portanto devemos tê-los na mesma base para poder aplicar as propriedades. Mudaremos para base 3, o logaritmo de base 9:

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 x = \log_3 x^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{x}$$

Substituindo na equação, temos:  $\log_3 \sqrt{x} + \log_9 x = 3$

$$\log_3 \sqrt{x} + \log_3 \sqrt{x} = \log_3 3^3 \Rightarrow 2 \cdot \log_3 \sqrt{x} = \log_3 27$$

$$\log_3 (\sqrt{x})^2 = \log_3 27 \Rightarrow \log_3 x = \log_3 27 \Rightarrow x = 27$$

Como  $x = 27$ , satisfaz a condição de existência:  $S = \{27\}$

2.  $\log_x 25 + \log_5 x = 3$

*Resolução:* Condição de existência:  $x > 0$  e  $x \neq 1$ .

Devemos fazer uma mudança de base para resolver a equação, e escolhemos base 5 por ser mais conveniente:

$$\log_x 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 x} = \frac{\log_5 5^2}{\log_5 x} = \frac{2}{\log_5 x}$$

Substituindo na equação, temos:  $\log_x 25 + \log_5 x = 3 \Rightarrow$

$$\frac{2}{\log_5 x} + \log_5 x = 3$$



Para facilitar a resolução, faremos uma mudança de variável, por exemplo:  $\log_5 x = m$  ( $m \neq 0$ )

$$\text{Portanto: } \frac{2}{m} + m = 3 \Rightarrow \frac{2 + m^2}{m} = \frac{3m}{m} \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow m = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow m = 2 \text{ ou } m = 1$$

$$\text{como } \log_5 x = m \begin{cases} \log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x \Rightarrow x = 25 \\ \log_5 x = 1 \Leftrightarrow 5^1 = x \Rightarrow x = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{5, 25\}}$$

$$3. 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 21 = 0$$

**Resolução:** Trata-se de uma equação exponencial. Resolvemos fazendo uma mudança de variável, obtendo uma equação de segundo grau:  $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 21 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 21 = 0$

$$\text{Seja } 2^x = t \Rightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 84 = 16$$

$$t = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow t = 7 \text{ ou } t = 3$$

$$\text{Como } 2^x = t \text{ temos } \begin{cases} 2^x = 7 \\ 2^x = 3 \end{cases}$$

Note que não é possível obter bases iguais nos dois membros da equação. Nestes casos a solução é dada em forma de logaritmo. Observe:  $2^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7$  e  $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$

$$\boxed{S = \{\log_2 3, \log_2 7\}}$$

### Exercícios propostos:

**21.** Resolva as equações:

- a)  $\log_3(x + 1) - \log_9(x + 1) = 1$       c)  $\log_3(x - 2) - \log_9(x - 2) = 2$   
b)  $\log_4 x + \log_{16} x = 3$       d)  $2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 3 = 0$

**22.** (UFSC) O valor de  $x$  compatível para a equação  $\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = 2$ , é: (lembre-se que a base é 10)

**23.** (UFBA) O logaritmo de  $y = 24 - 2x$  na base  $x$  é 2. Calcule o valor de  $x$ .

**24.** (UFMG) Seja  $f$  uma função real de variável real dada por  $f(x) = x + \sqrt{x^2} - \log_{10} x^2$ . Então,  $f(-10)$ :

- a) é igual a  $-22$       d) é igual a 2  
b) é igual a  $-18$       e) não está definido  
c) é igual a  $-2$

**25.** (UFMS) Determine o conjunto solução da equação  $\log_4 x + \log_2 x + \log_8 x = 11$ ; após resolvê-la, verifique a condição de existência.

**8. Inequações logarítmicas** Identificamos as inequações logarítmicas pela presença da incógnita no logaritmando e de um dos sinais de desigualdade:  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  ou  $\leq$ . São exemplos de inequações:

$$\log_2 4x < 3; 2 \log_3 x < 4; \log_{\frac{1}{2}} (2x + 5) \geq \log_{\frac{1}{2}} (1 - x);$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (x + 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 3) \geq 0; \log_3 (x - 1) - \log_9 (x - 1) \leq 1$$

Assim como nas equações, devemos garantir a existência do logaritmo impondo as seguintes condições: o logaritmando e a base devem ser positivos e a base deve ser diferente de 1.

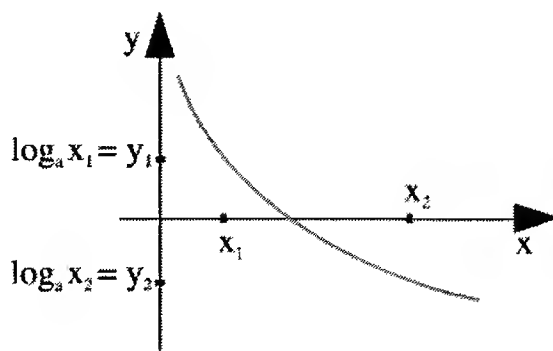
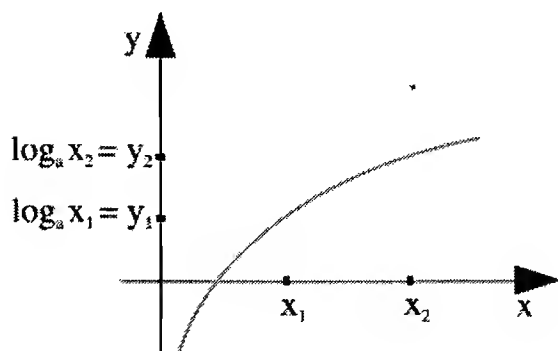
Na resolução de inequações logarítmicas, procuramos obter logaritmos de bases iguais nos dois membros da inequação, para poder comparar os logaritmandos. Porém, para que não ocorram distorções, devemos verificar se as funções envolvidas são crescentes ou decrescentes. A justificativa será feita através da análise gráfica de duas funções:

1ª) crescente ( $a > 1$ ) :  $y = \log_a x$

2ª) decrescente ( $0 < a < 1$ ) :  $y = \log_a x$

função crescente

função decrescente



Na função *crescente*, note que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \text{ ou } x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$$

Na função *decrescente*, note que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \text{ ou } x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$$

Na função crescente, os sinais coincidem na comparação dos logaritmandos e, posteriormente, dos respectivos logaritmos, porém o mesmo não ocorre na função decrescente.

De forma geral, quando resolvemos uma inequação logarítmica, temos de observar o valor numérico da base pois, estando os dois membros da inequação compostos por logaritmos de mesma base, para comparar os respectivos logaritmandos temos dois casos a considerar:

*se a base é um número maior que 1 (função crescente),  
utilizamos o mesmo sinal da inequação;  
se a base é um número entre zero e 1 (função decrescente),  
utilizamos o “sinal inverso” da inequação.*

Concluindo, dada a função  $y = \log_a x$  e dois números reais  $x_1$  e  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Se } a > 1, \text{ temos } & \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \\ x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1 \end{cases} \\ \text{Se } 0 < a < 1, \text{ temos } & \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \\ x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

### Exercícios resolvidos:

1.  $\log_2 4x < 3$ .

*Resolução: Condição de existência:*  $4x > 0 \Rightarrow x > 0$ .

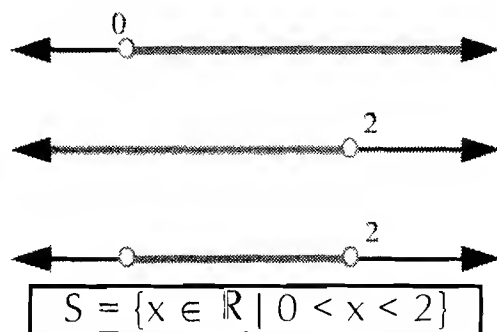
Devemos substituir o segundo membro da inequação por um logaritmo de base 2 que equivale a 3, ou seja:  $3 = \log_2 2^3$

Portanto,  $\log_2 4x < 3 \Rightarrow \log_2 4x < \log_2 2^3$

Os dois membros são compostos por logaritmos de mesma base. Para comparar os logaritmandos devemos analisar o valor da base. Sendo a base 2 (função crescente), utilizamos o mesmo sinal da inequação. Observe:

$$\log_2 4x < \log_2 2^3 \Rightarrow 4x < 2^3 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$$

Devemos fazer a intersecção entre a solução encontrada e a condição de existência para determinar o conjunto solução:



2.  $2 \cdot \log_3 x < 4$

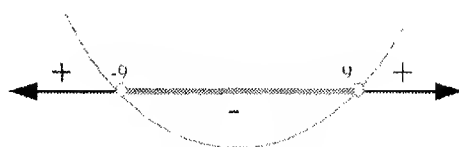
*Resolução: Condição de existência:*  $x > 0$ .

Inicialmente utilizamos a propriedade da potência e substituímos 4 por  $\log_3 3^4$ :  $2 \log_3 x < 4 \Rightarrow \log_3 x^2 < \log_3 3^4$

Sendo a base maior que 1, mantemos o sinal da desigualdade:

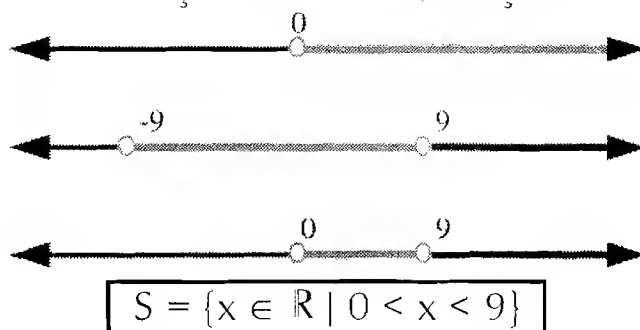
$$x^2 < 3^4 \Rightarrow x^2 < 81 \Rightarrow x^2 - 81 < 0$$

Devemos fazer um esboço do gráfico da função  $y = x^2 - 81$  para resolver a inequação de segundo grau acima. As raízes são  $-9$  e  $+9$  e a concavidade da parábola está voltada para cima, então:



Os valores que nos interessam estão entre  $-9$  e  $9 \Rightarrow -9 < x < 9$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:



$$3. \log_{\frac{1}{2}}(2x + 5) \geq \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$$

Resolução: Condição de existência:  $-\frac{5}{2} < x < 1$ .

$$2x + 5 > 0 \Rightarrow 2x > -5 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$$

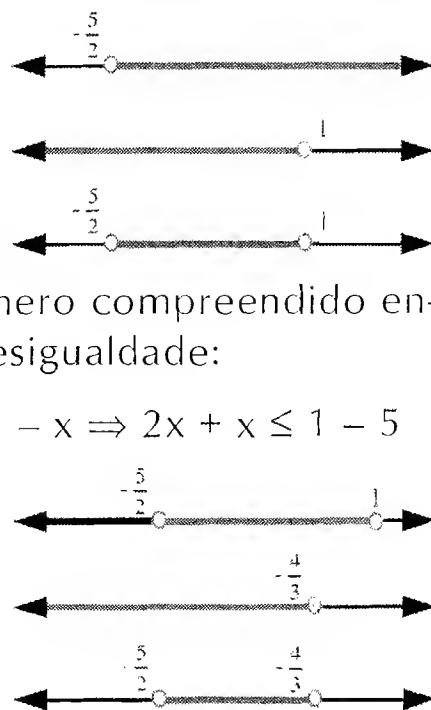
Note que os dois membros da inequação possuem logaritmos de mesma base, então podemos comparar os logaritmandos; porém, como a base é um número compreendido entre 0 e 1, devemos "inverter" o sinal da desigualdade:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x + 5) \geq \log_{\frac{1}{2}}(1 - x) \Rightarrow 2x + 5 \leq 1 - x \Rightarrow 2x + x \leq 1 - 5$$

$$3x \leq -4 \Rightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

Fazendo a intersecção com a condição de

existência:  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} < x < -\frac{4}{3}\right\}$



$$4. \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq 0.$$

Resolução: Condição de existência:  $\begin{cases} x > -3 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$

Aplicamos a propriedade do produto e substituímos 0

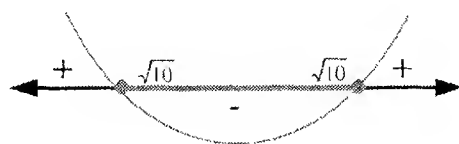
$$\text{por } \log_{\frac{1}{3}} 1: \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+3)(x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

Como  $0 < \frac{1}{3} < 1$ , "invertemos" o sinal da desigualdade para comparar os logaritmandos:  $(x+3)(x-3) \leq 1$

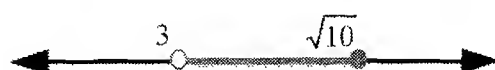
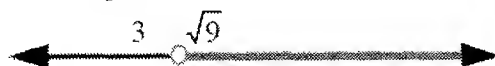
$$x^2 - 9 \leq 1 \Rightarrow x^2 - 10 \leq 0$$

Tratando-se de uma inequação de segundo grau, façamos um esboço do gráfico; as raízes são  $+\sqrt{10}$  e  $-\sqrt{10}$ , a parábola tem concavidade voltada para cima:



$$\text{Então: } -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq \sqrt{10}\}$$

$$5. \log_3(x-1) - \log_9(x-1) \leq 1.$$

Resolução: Condição de existência:  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ .

Note que os logaritmos têm bases diferentes. Faremos, então, uma mudança de base:

$$\log_9(x-1) = \frac{\log_3(x-1)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(x-1)}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3(x-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_3(x-1)$$

Substituindo na inequação, temos:  $\log_3(x-1) - \log_9(x-1) \leq 1$

$$\log_3(x-1) - \frac{1}{2} \cdot \log_3(x-1) \leq 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \log_3(x-1) \leq 1$$

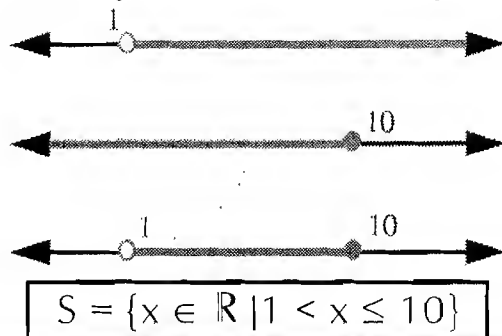
$$\frac{1}{2} \cdot \log_3(x-1) \leq 1 \Rightarrow \log_3(x-1) \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_3(x-1) \leq 1 \cdot \frac{2}{1}$$

$$\log_3(x-1) \leq 2 \Rightarrow \log_3(x-1) \leq \log_3 3^2$$

Sendo a base maior que 1, mantemos o sinal da desigualdade:

$$x-1 \leq 9 \Rightarrow x \leq 10$$

Façamos a intersecção com a condição de existência:



### Exercício proposto:

26. Resolva as inequações:

a)  $\log_2(x-3) < \log_2 4$

d)  $\log_{\frac{1}{5}}(2x-4) \leq 0$

b)  $\log_5(3x-1) > -1$

e)  $\log_{\frac{5}{4}}(x-3) - \log_{16}(x-3) \leq 1$

c)  $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3$

### Exercícios complementares:

27. (UFRS) O valor para  $x$  que verifica a equação  $3^x = 6$  é:

a) 1,5

b) 2

c) o logaritmo de 3 na base 10

d) o logaritmo de 6 na base 3

e) o logaritmo de 3 na base 6

28. (UFMG) Seja  $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$ ,  $a > 0$ .

O valor da base de  $a$  é:

a)  $\frac{1}{16}$  b)  $\frac{1}{8}$  c) 2 d) 10 e) 16

29. (UFES) O valor da expressão abaixo é:

$$\left[ \frac{\sqrt{0,25} + \frac{1}{3}}{\log_2\left(\frac{1}{64}\right)} \cdot (-6^2) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

a) 1 b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{1}{25}$  d)  $2\sqrt{5}$  e)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

30. (UFSC) Se  $x = \sqrt[3]{360}$ ,  $\log_{10} 2 = 0,301$  e  $\log_{10} 3 = 0,477$ , determine a PARTE INTEIRA do valor de  $20 \cdot \log_{10} x$ .

31. (PUC-SP) Determinar

$\log_{10} 350$ , supondo que

$\log_{10} 0,35 = -0,456$ :

a) 1,456 c) 1,544 e) 3,649

b) 2,456 d) 2,544

32. (UFRS) O valor de  $\log(217,2) - \log(21,72)$  é:

a) -1 d)  $\log(217,2 - 21,72)$

b) 0 e)  $\frac{\log(217,2)}{\log(21,72)}$

c) 1

**33.** (UFES) Simplificando a expressão  $2^{(2 \log_2 3 - 3 \log_2 2)}$ , obtemos:

- a)  $\frac{8}{9}$  b)  $\frac{9}{8}$  c)  $\frac{3}{2}$  d)  $\frac{2}{3}$  e) 1

**34.** (UFPI) O pH de uma solução é definido por

$$\text{pH} = \log \left( \frac{1}{H^+} \right)$$

onde  $H^+$  é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. O pH de uma solução onde  $H^+ = 1,0 \cdot 10^{-8}$  é:

- a) 0 b)  $10^{-8}$  c) 1,0 d) 7 e) 8

**35.** (UFPB) Se  $m = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log 4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\log 3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\log 5}$ , então o valor de  $\log m$  é:

- a) 1 d)  $\log \left(\frac{15}{4}\right)$   
b) -1 e) 0  
c)  $\log 60$

**36.** (UFAC) O inteiro positivo  $n$  solução da equação  $\log 2^n + \log 2^{n+1} + \log 2^{n+2} = \log 2^{n(n+1)}$  é o número:

- a) 2 b) -3 c) 3 d) -1 e) 1

**37.** (FGV-SP) Se  $\log 2 = m$  e  $\log 3 = n$ , então a raiz da equação  $2^{2x-1} = 3$  é:

- a)  $\frac{m+n}{2m}$  c)  $\frac{m+n}{2n}$  e)  $\frac{n}{m} + \frac{1}{2}$   
b)  $\frac{m-n}{2n}$  d)  $\frac{n}{m} + 2$

**38.** (UFRN) Se o logaritmo de 10 000 na base  $x$  é 5, então o logaritmo decimal de  $x$  é igual a:

- a) 1,25 c) 0,60 e) 0,80  
b) 1,00 d) 2,00

**39.** (Fuvest-SP) Se  $x = \log_4 7$  e  $y = \log_{16} 49$ , então  $x - y$  é igual a:

- a)  $\log_4 7$  b)  $\log_{16} 7$  c) 1 d) 2 e) 0

**40.** (UFRJ) Determine o conjunto  $D$  dos números inteiros positivos  $x$  para os quais a função

$$y = \frac{\log \left( \frac{5-x}{10+x} \right)}{x-2}$$
 está definida.

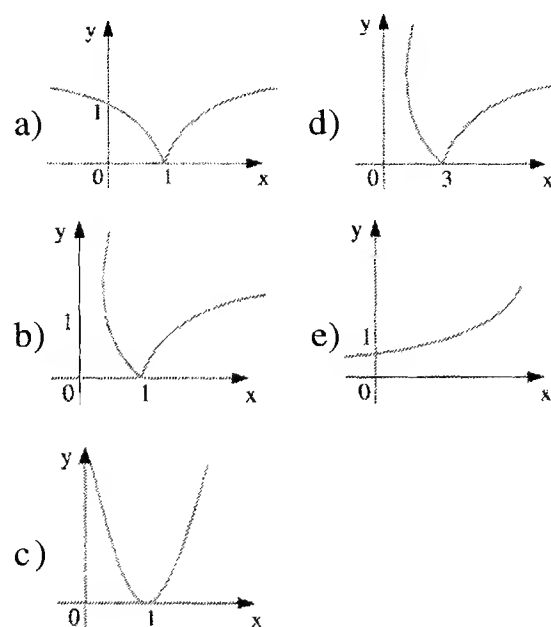
**41.** (UFPA) Represente por  $D$  o domínio da função

$$y = \log_{(x-3)}(15-2x).$$

É verdade afirmar que

- a)  $4 \in D$  d)  $D = \left] 3, \frac{15}{2} \right[$   
b)  $\left\{ 3, 4, \frac{15}{2} \right\} \subset D$  e)  $D = \left[ 3, \frac{15}{2} \right]$   
c)  $D \subset \left] 3, \frac{15}{2} \right[$

**42.** (UFSE) O gráfico da função definida por  $f(x) = |\log_3 x|$ , para todo  $x > 0$ , é:



**43.** (UFMS) Determine o valor de  $x$

na equação: 
$$\frac{1 - \frac{\log x}{2}}{\log x^2} = \frac{\log x}{\log x^4}$$

**44.** (Cesgranrio) Na solução do sistema

$$\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 3 \log 2 \\ x - 4y = 7 \end{cases},$$

o valor de  $x$  é:

a) 15 b) 13 c) 8 d) 5 e) 2

**45.** (UFSC) Determine o valor de  $x$  que satisfaz a equação

$$\log_{10}(x+5) + \log_{10}(x-6) = 1 + \log_{10}(x-4).$$

a) 5 b) 4 c) 1 d) 6 e) 10

**46.** (UFMG) O valor de  $x$  que satisfaz à equação  $2 \log x + \log b - \log 3 = \log \left( \frac{9b}{x^4} \right)$ , onde  $\log$  representa o logaritmo decimal, pertence ao intervalo:

- a)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  d)  $[2, 3]$   
b)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  e)  $[3, 4]$   
c)  $[1, 2]$

**47.** (UFPB) O conjunto solução da equação

$$\log_{10} x + \log_{10}(x-3) = 1 \text{ está contido no intervalo:}$$

- a)  $[-6, -2]$  c)  $[0, 2]$  e)  $[3, 6]$   
b)  $[-1, 0]$  d)  $[2, 3]$

**48.** (UFRR) Sejam  $x$  e  $y$  números reais que satisfazem a equação:

$$2 \log(x-2y) = \log x + \log y.$$

Determinar o valor de  $\frac{x}{y}$ .

**49.** (Fuvest-SP) Se  $\log_{10} x \leq \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 - 1$ , então:

- a)  $0 < x \leq 10^2$   
b)  $10^2 < x \leq 10^4$   
c)  $10^4 < x \leq 10^6$   
d)  $10^6 < x \leq 10^8$   
e)  $x > 10^8$

**50.** (Mack - SP) A solução de  $\log_x(2x-1) \leq 2$  é:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$   
b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$   
d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$   
e)  $\mathbb{R}$



# Capítulo VIII

## FUNÇÕES CIRCULARES

### TRIGONOMETRIA

**1. Introdução** A trigonometria teve seu desenvolvimento relacionado aos estudos de astronomia, na medida em que surgiu a necessidade de se estudarem as fases da lua, eclipses, distância entre planetas etc. O conhecimento científico e preciso de todos esses fenômenos facilitava a determinação de rotas de navegação e, conseqüentemente, a expansão territorial.

Com o desenvolvimento da matemática, a trigonometria tornou-se independente da astronomia e passou a ser aplicada em outras áreas da ciência, destacando-se na física, por exemplo, nos movimentos circulatorios, no movimento de oscilação de um pêndulo, na óptica, na cinemática vetorial etc.

A palavra trigonometria tem origem grega e significa medida de três ângulos. Basicamente, o que se estuda na trigonometria é a relação entre ângulos e distâncias. Por conta disso é imprescindível o conhecimento das relações entre ângulos e lados do triângulo retângulo.

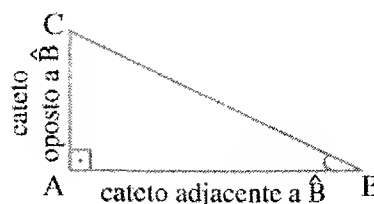
**2. Triângulo retângulo** Chamamos de *triângulo retângulo* àquele que possui *ângulo reto* (ângulo de  $90^\circ$ ). Dizemos que os outros ângulos são *agudos* (menores que  $90^\circ$ ). Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , no triângulo retângulo os *ângulos agudos são complementares*, pois somam  $90^\circ$ .

No triângulo retângulo, os lados recebem nomes específicos: *catetos* e *hipotenusa*. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos são os lados opostos aos ângulos agudos.

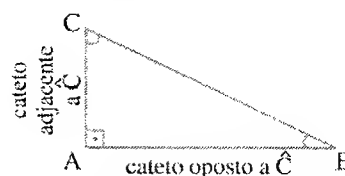
Os *vértices* são identificados com letras maiúsculas.



Consideremos o ângulo  $\hat{B}$ . Dizemos que  $\overline{AC}$  é o cateto oposto a  $\hat{B}$  e  $\overline{AB}$  é o cateto adjacente a  $\hat{B}$ :



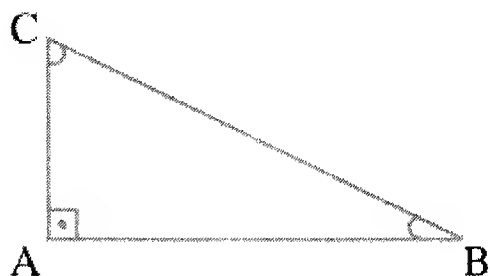
Fixando o ângulo  $\hat{C}$ ,  $\overline{AB}$  é o cateto oposto a  $\hat{C}$  e  $\overline{AC}$  é o cateto adjacente a  $\hat{C}$ :



**a) Razões trigonométricas:** Sabendo identificar os catetos, podemos definir as razões trigonométricas: seno (sen), co-seno (cos) e tangente (tg).

seno de um ângulo =	$\frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$
co-seno de um ângulo =	$\frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$
tangente de um ângulo =	$\frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$

Por exemplo, no triângulo retângulo da figura, temos:



$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{B} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} & \text{sen } \hat{C} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \\ \text{cos } \hat{B} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} & \text{cos } \hat{C} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \\ \text{tg } \hat{B} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} & \text{tg } \hat{C} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \end{aligned}$$

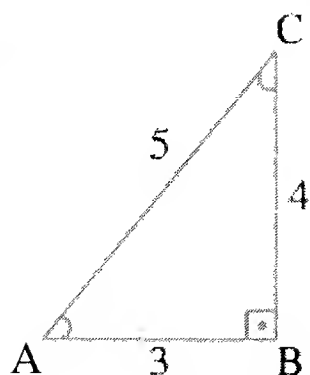
A primeira constatação importante relaciona-se aos ângulos complementares:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \hat{B} = \cos \hat{C} \\ \cos \hat{B} = \text{sen } \hat{C} \\ \text{tg } \hat{B} = \frac{1}{\text{tg } \hat{C}} \end{array} \right\} \therefore \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

Se dois ângulos são complementares então o seno de um deles é igual ao co-seno do complementar. As tangentes de ângulos complementares são inversas.

### 🔗 Exercícios resolvidos:

1. Determinar as razões trigonométricas do triângulo



*Resolução:* Basta aplicar as definições das razões trigonométricas:

$$\begin{array}{ll} \text{sen } \hat{A} = \frac{4}{5} & \text{sen } \hat{C} = \frac{3}{5} \\ \cos \hat{A} = \frac{3}{5} & \cos \hat{C} = \frac{4}{5} \\ \text{tg } \hat{A} = \frac{4}{3} & \text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4} \end{array}$$

*Observação:* note que a tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o co-seno desse ângulo.

De forma geral temos que:  $\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$

2. Determine  $\text{sen } 20^\circ$ ,  $\cos 20^\circ$  e  $\text{tg } 20^\circ$ , sabendo que  $\text{sen } 70^\circ = 0,94$  e  $\cos 70^\circ = 0,34$ .

*Resolução:* Sabendo que  $20^\circ$  e  $70^\circ$  são ângulos complementares, pois  $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ , temos:  $\text{sen } 20^\circ = \cos 70^\circ = 0,34$  e  $\cos 20^\circ = \text{sen } 70^\circ = 0,94$

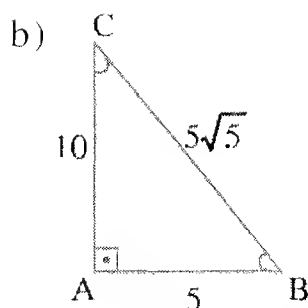
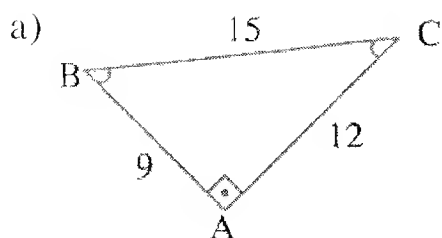
Para encontrar a tangente, aplicamos a definição:

$$\text{tg } 20^\circ = \frac{\text{sen } 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{0,34}{0,94} = 0,36$$

$$\text{tg } 70^\circ = \frac{\text{sen } 70^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{0,94}{0,34} = 2,76$$

### ⇒ Exercícios propostos:

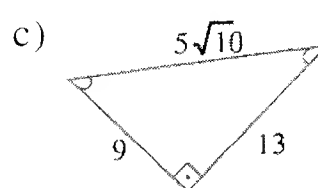
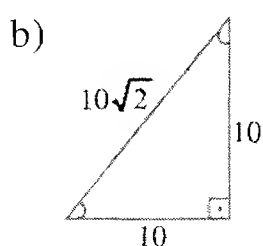
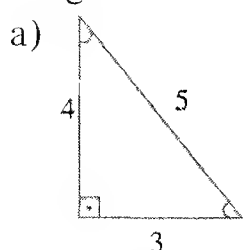
1. Determine as razões trigonométricas nos triângulos:



2. Determine  $\sin 15^\circ$ ,  $\cos 15^\circ$  e  $\operatorname{tg} 15^\circ$ , sabendo que:  $\sin 75^\circ = 0,97$  e  $\cos 75^\circ = 0,26$ .

3. Determine  $\sin 27^\circ$  e  $\sin 63^\circ$ , dados  $\cos 27^\circ = 0,89$  e  $\cos 63^\circ = 0,45$ .

b) **Teorema de Pitágoras:** Observe os seguintes triângulos retângulos.



Observe a relação entre os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa:

a)  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$25 = 5^2$

5 é a hipotenusa

b)  $10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$200 = (10\sqrt{2})^2$

$10\sqrt{2}$  é a hipotenusa

c)  $9^2 + 13^2 = 81 + 169 = 250$

$250 = (5\sqrt{10})^2$

$5\sqrt{10}$  é a hipotenusa

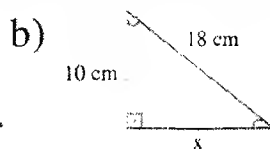
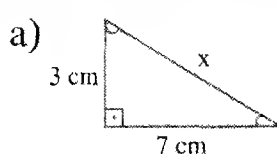
Pitágoras observou essa relação em triângulos retângulos e formulou o teorema mais conhecido da matemática:

### Teorema de Pitágoras:

em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

### Exercícios resolvidos:

1. Determine a medida  $x$  em cada triângulo:



**Resolução:** a) Aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 7^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 49 \Rightarrow x^2 = 58 \Rightarrow x = \pm\sqrt{58}$$

$$-\sqrt{58} \text{ não convém} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{58} \text{ cm}}$$

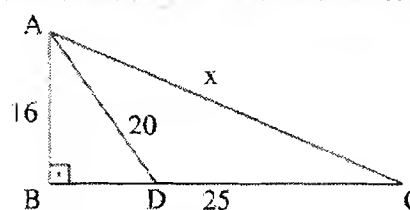
A raiz negativa não convém porque estamos trabalhando com medidas de comprimento. Nos exercícios seguintes consideraremos somente as raízes positivas.

b) Aplicamos o teorema de Pitágoras:

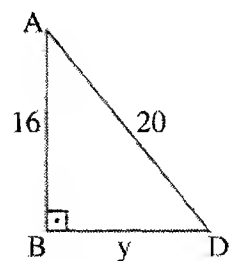
$$18^2 = x^2 + 10^2 \Rightarrow x^2 = 324 - 100 \Rightarrow x^2 = 224 \Rightarrow x = \sqrt{224}$$

$$x = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 7} \Rightarrow \boxed{x = 4\sqrt{14} \text{ cm}}$$

**2. Calcular o valor de  $x$  na figura:**



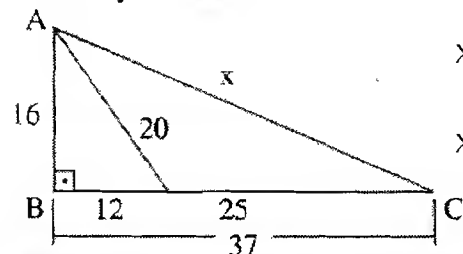
**Resolução:** O triângulo ABC é retângulo e  $x$  é a hipotenusa. Para podermos aplicar o teorema de Pitágoras, é necessário determinar a medida do segmento  $\overline{BD}$ , pois o cateto  $\overline{BC} = \overline{BD} + 25$ . Aplicamos, então, o teorema ao triângulo ABD, chamando de  $y$  o segmento  $\overline{BD}$ :



$$20^2 = 16^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 400 - 256 = 144$$

$$y = \sqrt{144} \Rightarrow y = 12$$

Portanto, no triângulo ABC encontramos  $\overline{BC} = 12 + 25 = 37$ . Aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC:

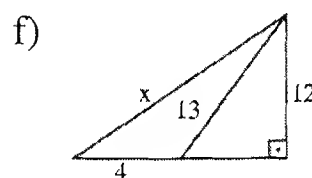
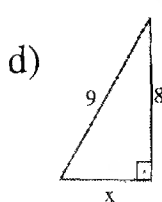
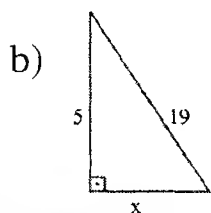
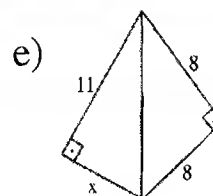
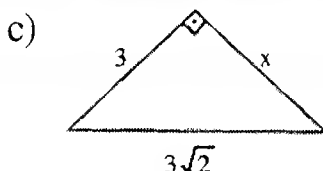
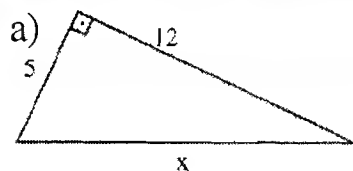


$$x^2 = 16^2 + 37^2 \Rightarrow x^2 = 256 + 1369$$

$$x^2 = 1625 \Rightarrow x = \sqrt{5^2 \cdot 5 \cdot 13} \Rightarrow \boxed{x = 5\sqrt{65}}$$

### Exercícios propostos:

**4. Calcule o valor de  $x$  nas figuras:**

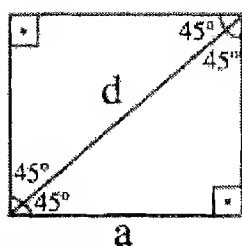


5. Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 25 cm e a soma dos catetos é 35 cm. Determine a medida de cada cateto.

6. Os catetos de um triângulo retângulo têm a mesma medida. Se a hipotenusa mede  $5\sqrt{2}$  cm, determine a medida dos catetos.

c) **Ângulos notáveis:** Os ângulos notáveis são:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . O conhecimento do seno, cosseno e tangente desses ângulos constitui-se em uma importante ferramenta no estudo da trigonometria.

O ângulo de  $45^\circ$  é obtido quando traçamos a diagonal de um quadrado:



Ao traçar a diagonal, determinamos dois triângulos retângulos. Consideramos um deles e aplicamos o teorema de Pitágoras para determinar a medida da diagonal  $d$  em função de  $a$ . Temos então:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

Vamos deduzir seno, cosseno e tangente de  $45^\circ$  recorrendo à definição:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \boxed{\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

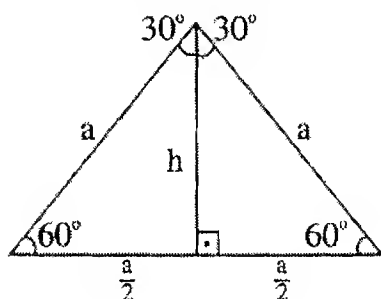
$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\therefore \boxed{\text{tg } 45^\circ = 1}$$

Para determinar seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , vamos utilizar um triângulo equilátero (os três lados iguais):



Traçando a altura  $h$  desse triângulo, determinamos dois triângulos retângulos, e utilizamos um deles para aplicar o teorema de Pitágoras. Deste modo encontramos o valor do cateto  $h$  em função da hipotenusa  $a$ :

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Fixando o ângulo de  $60^\circ$ , aplicamos as definições de seno, cosseno e tangente:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\text{cos } 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}}$$

Como  $30^\circ$  e  $60^\circ$  são ângulos complementares ( $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ ), temos que:

$$\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ \Rightarrow \boxed{\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \text{sen } 60^\circ \Rightarrow \boxed{\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

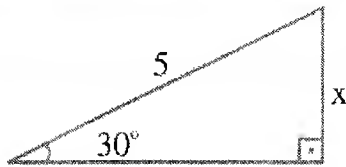
$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{cos } 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Os valores determinados são de grande utilidade na resolução de exercícios e, para facilitar sua memorização, costuma-se colocá-los em uma tabela. Chamamos esta de *tabela trigonométrica de ângulos notáveis*:

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen $\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos $\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg $\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

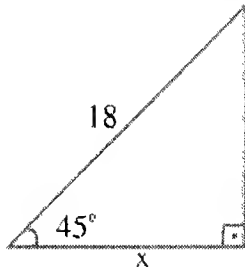
## Exercícios resolvidos:

1. Calcular o valor de  $x$  nas figuras:



a) *Resolução:*  $x$  é o *cateto oposto* ao ângulo de  $30^\circ$ . Aplicamos, portanto, a definição de seno:

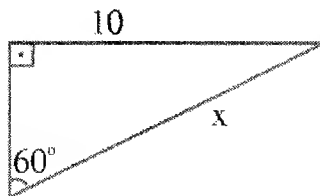
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$



b) *Resolução:*  $x$  é o *cateto adjacente* ao ângulo de  $45^\circ$ , portanto aplicamos a definição de cosseno:

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{18} \Rightarrow 2x = 18\sqrt{2}$$

$$\boxed{x = 9\sqrt{2}}$$

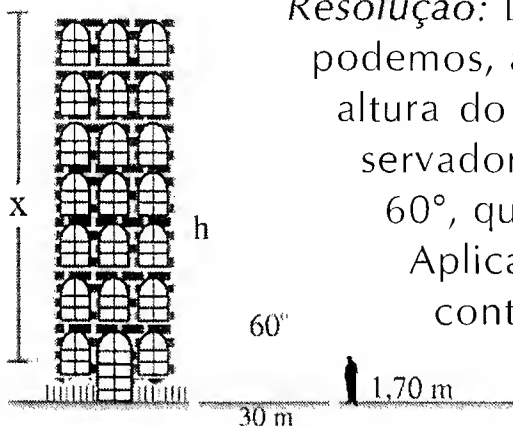


c) *Resolução:*  $x$  é a *hipotenusa* do triângulo. Como temos o valor do cateto oposto ao ângulo de  $60^\circ$ , aplicamos a definição de seno:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow \sqrt{3} x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{x = \frac{20\sqrt{3}}{3}}$$

2. Um observador de 1,70 m vê um pássaro no alto de um prédio sob um ângulo de  $60^\circ$ . Sabendo que o observador está a 30 m do prédio, determine a altura do prédio.



*Resolução:* De acordo com os dados do problema, podemos, através de um desenho, verificar que a altura do prédio ( $h$ ) é a soma da altura do observador com o cateto oposto ao ângulo de  $60^\circ$ , que chamamos de  $x$ :  $h = x + 1,70$

Aplicamos a definição de tangente para encontrarmos o valor de  $x$ :

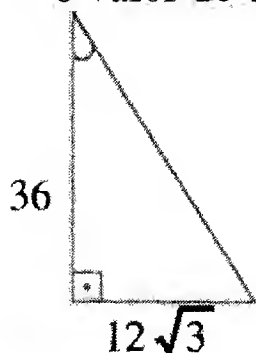
$$\text{tg } 60^\circ = \frac{x}{30} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{30}$$

$$\boxed{x = 30\sqrt{3} \text{ m.}} \text{ Então: } h = x + 1,70 \rightarrow h = 30\sqrt{3} + 1,70$$

$$\text{Utilizando } \sqrt{3} \cong 1,73 \rightarrow h \cong 51,9 + 1,70 \Rightarrow \boxed{h \cong 53,6 \text{ m}}$$



3. Num triângulo retângulo, os catetos medem  $12\sqrt{3}$  cm e 36 cm. Sendo  $\alpha$  o menor ângulo interno deste triângulo, determine  $\text{tg } \alpha$  e o valor de  $\alpha$ .



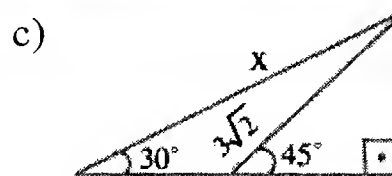
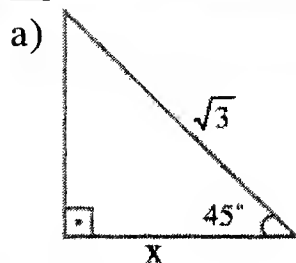
**Resolução:** Observe a figura que representa a situação do problema. Aplicando a definição de tan-

$$\text{gente: } \text{tg } \alpha = \frac{12\sqrt{3}}{36} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Consultando a tabela trigonométrica de ângulos notáveis, observamos que o ângulo cuja tangente é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  é  $30^\circ$ , portanto  $\boxed{\alpha = 30^\circ}$

### Exercícios propostos:

7. Calcule o valor de  $x$  nas figuras:



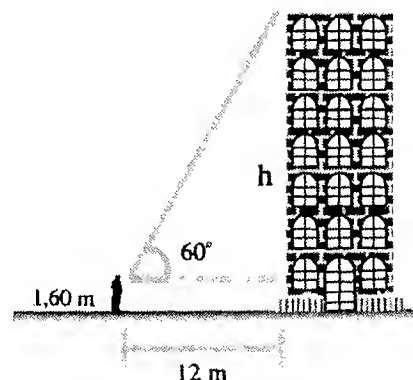
8. (Cesgranrio-RJ) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de  $30^\circ$  com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente de:

a)  $6\sqrt{3}$  m   b) 12 m   c) 13,6 m   d)  $9\sqrt{3}$  m   e) 18 m

9. (UFMG) Num triângulo retângulo, um dos ângulos mede  $60^\circ$ . Se a hipotenusa mede  $a$ , o menor cateto mede:

a)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$    b)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$    c)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$    d)  $\frac{a}{2}$    e)  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

10. (UFAL) Um observador se encontra a 12 m de um edifício e vê o seu topo sob um ângulo de  $60^\circ$ , conforme a figura ao lado. Se o piso da rua é horizontal e os olhos do observador se acham a 1,60 m acima desse piso, a altura  $h$  do edifício é de, aproximadamente: a) 25 m   b) 24,8 m   c) 23,4 m   d) 22,8 m   e) 22 m

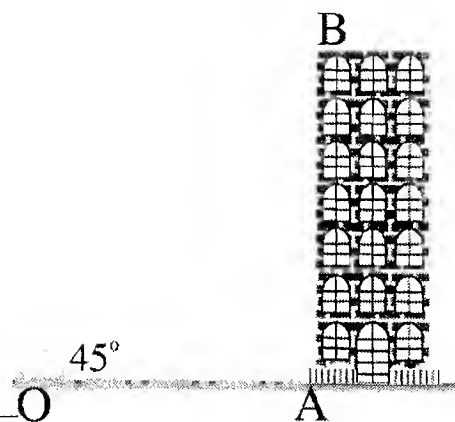


11. (UFPB) O observador O vê o topo de um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de  $45^\circ$ . Para vê-lo sob um ângulo de  $30^\circ$ , deve afastar-se dele mais 100 metros no sentido AO.

Qual a altura, em metros, do edifício?

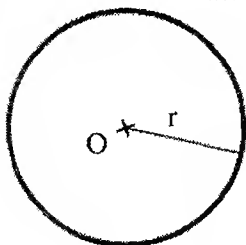
a)  $50(1 + \sqrt{3})$  b)  $25(1 + \sqrt{3})$

c)  $50(1 + \sqrt{2})$  d)  $25(1 + \sqrt{2})$  e)  $50\frac{\sqrt{3}}{3}$



### 3. O ciclo trigonométrico

a) **Circunferência:** Circunferência é o conjunto de pontos que estão a mesma distância de um ponto fixo do plano; esse ponto é o centro da circunferência e a distância é o raio. Diâmetro é o segmento que tem extremidades na circunferência e que passa pelo centro.



O = centro da circunferência

r = raio da circunferência

b) **Comprimento da circunferência:** Faça o seguinte experimento: contorne uma moeda com um pedaço de linha, corte o excesso, fazendo com que as extremidades coincidam. Estique a linha e veja seu comprimento. A medida encontrada é o comprimento da circunferência da moeda.



Por exemplo, para uma moeda de 1 real temos aproximadamente 7,55 cm de comprimento. O seu raio é aproximadamente 1,2 cm, portanto o diâmetro é 2,4 cm. Simbolizamos o comprimento por C e o diâmetro por d. Vamos determinar o quociente entre o comprimento da circunferência da moeda e

$$\text{seu diâmetro: } \frac{C}{d} = \frac{7,55}{2,4} = 3,146$$

Podemos determinar esse quociente para diversas circunferências, variando o comprimento e tomando o respectivo diâmetro. Utilizando métodos mais precisos para medir o comprimento, verificamos que esse

quociente é constante para qualquer circunferência. Essa constante é o número irracional  $\pi$ .

$$\pi = 3,141592... \Rightarrow \boxed{\pi \cong 3,14}$$

$$\text{Temos, então: } \pi = \frac{C}{d}. \text{ Como } d = 2r \Rightarrow \pi = \frac{C}{2r} \Rightarrow \boxed{C = 2 \cdot \pi \cdot r}$$

Essa é a fórmula para determinar o comprimento de qualquer circunferência de raio  $r$ .

### **Exercícios resolvidos:**

1. Determine o comprimento da circunferência de raio 5 cm.

*Resolução:* Basta substituir na fórmula:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow C = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi \Rightarrow C \cong 10 \cdot 3,14$$
$$\boxed{C \cong 31,4 \text{ cm}}$$

2. João caminha numa pista circular todos os dias. O raio da pista é 100 m.

Se João costuma caminhar aproximadamente 10 km por dia, quantas voltas inteiras ele percorre por dia?

*Resolução:* Se o raio da pista é  $r = 100$  m, então o comprimento da circunferência é:  $C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2\pi \cdot 100 \Rightarrow C = 200\pi$  m

Ou seja,  $200\pi$  metros é o equivalente a uma volta; sendo 10 km = 10000 m, então o número de voltas é o quociente entre a distância percorrida por dia e a distância equivalente a uma volta:

$$n = \frac{10000}{200\pi} = \frac{50}{\pi}$$
$$n \cong \frac{50}{3,14}$$
$$n \cong 15,9$$

Como é pedido o número de voltas inteiras, então ele

$$\boxed{\text{percorre 16 voltas por dia.}}$$

### **Exercícios propostos:**

**12.** Determine, aproximadamente, o comprimento da circunferência de raio: a)  $r = 7$  cm      b)  $r = 12$  cm      c)  $r = \sqrt{3}$  m

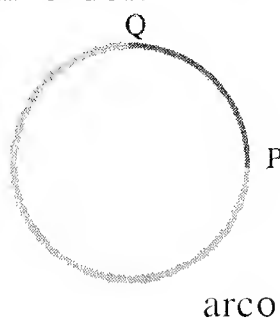
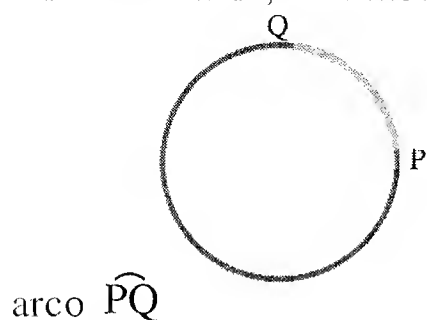
**13.** Determine o raio da circunferência que tem 12,56 cm de comprimento.

**14.** Determine o diâmetro da circunferência que tem comprimento de  $9\pi$  m.

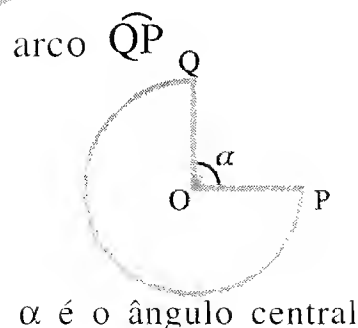
**15.** Quantas voltas dá a roda de uma bicicleta que possui 30 cm de raio para percorrer 37,68 m?

**16.** Suponha que uma prova de fórmula Indy será realizada numa pista circular de 800 m de raio. A prova é composta de 200 voltas. Qual a distância percorrida durante a prova? Se um carro tem velocidade média de 250 km/h, em quanto tempo, aproximadamente, concluirá a prova?

**c) Arco de circunferência:** Tomando dois pontos distintos sobre uma circunferência, estamos determinando dois arcos:



Um ângulo com vértice no centro de uma circunferência é chamado *ângulo central*. Portanto, unindo as extremidades dos arcos ao centro da circunferência encontramos o *ângulo central*  $\alpha$  correspondente ao arco  $\widehat{QP}$ .

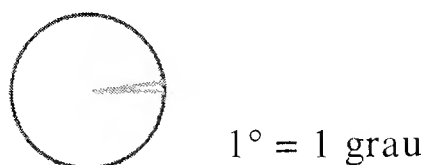


Como cada arco possui um ângulo central correspondente, dizemos que o ângulo e o arco possuem medidas iguais. Portanto, o número que exprime a medida do ângulo  $\widehat{QOP}$  é o mesmo que exprime a medida do arco  $\widehat{QP}$ .

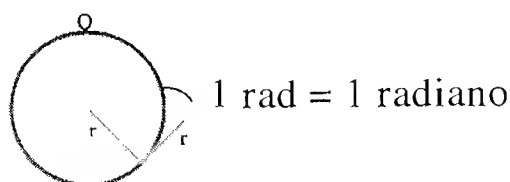
$$\text{medida } \widehat{QP} = \text{medida } \widehat{QOP} = \alpha$$

Utilizam-se duas unidades de medidas para arcos de circunferência: o *grau* ou o *radiano*.

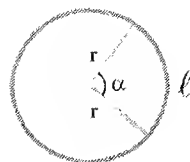
Obtém-se *1 grau* dividindo a circunferência em 360 partes iguais:



Obtém-se *1 radiano* tomando sobre a circunferência um arco que tenha a mesma medida que o raio.



Então, para um arco de medida  $\ell$ , se quisermos saber a quantos radianos corresponde, basta dividi-lo pelo raio:



$$\alpha = \frac{\ell}{r} \text{ rad}$$

Numa circunferência de raio 1, temos que o comprimento é:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 1 \Rightarrow C = 2\pi$$

Em outras palavras, uma volta completa ( $360^\circ$ ) sobre a circunferência de raio 1 equivale ao arco de  $2\pi \text{ rad}$ .



$$1 \text{ volta} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, meia volta equivale a:



$$\frac{1}{2} \text{ volta} = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Utilizamos a relação destacada para converter arcos de radianos para graus e vice-versa.

### Exercícios resolvidos:

1. Transformar  $150^\circ$  em radianos.

*Resolução:* Basta utilizar uma regra de três simples.

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$150^\circ \leftrightarrow x$$

$$180x = 150\pi$$

$$x = \frac{150\pi}{180} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

2. Transformar  $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$  em graus.

*Resolução:* Utilizamos a regra de três.

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$x \leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow x = 120^\circ$$

3. Em uma circunferência de 5 cm de raio, determine o arco cujo ângulo central mede  $60^\circ$ .

*Resolução:* De acordo com o enunciado  $r = 5 \text{ cm}$  e  $\alpha = 60^\circ$ , determinar  $\ell$ .

Recorremos à fórmula:  $\alpha = \frac{\ell}{r} \rightarrow \ell = \alpha \cdot r$

Porém é importante lembrar que, para utilizar essa fórmula, o ângulo deve estar em radianos, portanto, temos que transformar  $60^\circ$  em radianos:

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$60^\circ \leftrightarrow \alpha$$

$$\alpha = \frac{60\pi}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Substituindo na fórmula:  $\ell = \alpha \cdot r \rightarrow \ell = \frac{\pi}{3} \cdot 5 \cong \frac{3,14 \cdot 5}{3}$

$$\ell \cong 5,23 \text{ cm}$$

### Exercícios propostos:

17. Converter em radianos:

a)  $120^\circ$  b)  $310^\circ$  c)  $230^\circ$  d)  $135^\circ$

18. Converter em graus: a)  $\frac{7\pi}{6}$  rad b)  $\frac{5\pi}{4}$  rad c)  $\frac{4\pi}{3}$  rad d)  $\frac{11\pi}{6}$  rad

19. Determine o raio da circunferência cujo ângulo central de  $150^\circ$  corresponde ao arco de  $\pi$  cm.

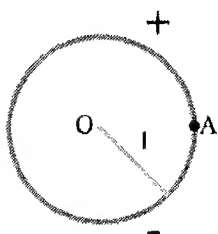
20. Determine o arco de circunferência que corresponde ao ângulo central de  $\frac{7\pi}{4}$  rad numa circunferência de raio 7 cm.

21. (UFMG) A medida, em graus, de um ângulo que mede 4,5 radianos é: a)  $\frac{4,5}{\pi}$  b)  $4,5\pi$  c)  $\frac{810}{\pi}$  d) 810 e)  $810\pi$

22. (Fuvest-SP) Uma arco de circunferência mede  $300^\circ$ , e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

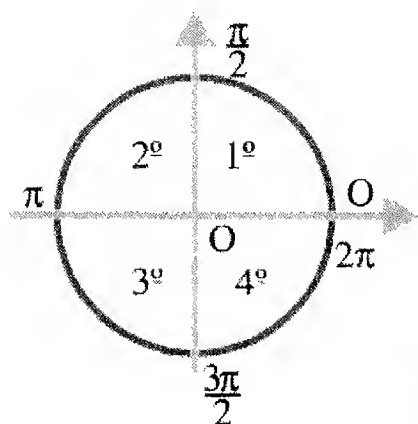
a) 157 b) 284 c) 382 d) 628 e) 764

**d) Ciclo trigonométrico:** O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio 1. A orientação é:



*positiva*  $\rightarrow$  no sentido anti-horário.  
*negativa*  $\rightarrow$  no sentido horário.

O ciclo trigonométrico é dividido em *quadrantes* determinados pelos eixos cartesianos:



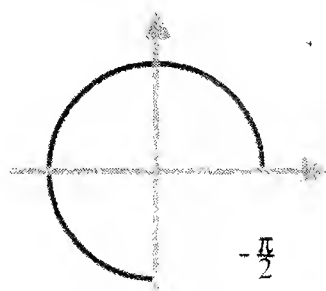
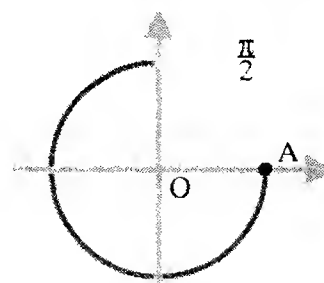
O primeiro quadrante contém a extremidade dos arcos entre  $0$  e  $90^\circ$  ou  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  rad.

O segundo quadrante contém a extremidade dos arcos entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$  ou  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$  rad.

O terceiro quadrante contém a extremidade dos arcos entre  $180^\circ$  e  $270^\circ$  ou  $\pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$  rad.

O quarto quadrante contém a extremidade dos arcos entre  $270^\circ$  e  $360^\circ$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$  rad.

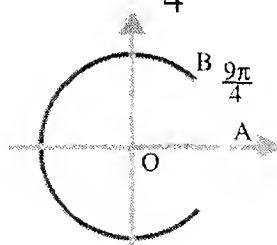
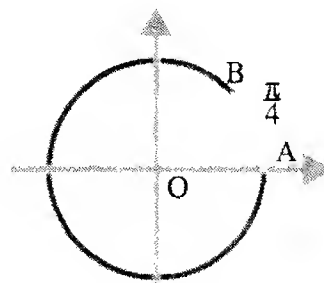
A origem dos arcos no ciclo trigonométrico é o ponto A, que corresponde a 0. Caminhando no sentido positivo, encontramos os arcos positivos, por exemplo o arco  $\frac{\pi}{2}$  rad:



Para localizar os arcos negativos, caminhamos, a partir de A, no sentido negativo. Observe a localização do arco de  $-\frac{\pi}{2}$  rad.

### e) Arcos cômgruos

Na figura, temos o arco que tem origem em A e extremidade em B correspondente a  $\frac{\pi}{4}$  rad.

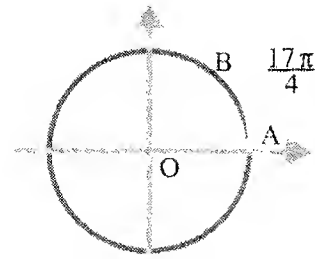


Podemos dar uma volta completa no ciclo, parando novamente em B.

Como a partir de  $\frac{\pi}{4}$  rad demos uma volta completa no ciclo ( $360^\circ$  ou  $2\pi$  rad), então o valor desse arco será:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi + 8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \text{ rad}$$

Podemos, a partir de  $\frac{\pi}{4}$  rad,



efetuar duas voltas completas:

Então, como duas voltas correspondem a  $2 \cdot 360^\circ$  ou  $2 \cdot 2\pi$  rad, temos que esse arco vale:  $\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi + 16\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$  rad

Concluindo, podemos dar quantas voltas quisermos sobre a circunferência, obtendo arcos com extremidades em B. Dizemos que os arcos assim obtidos (no exemplo, são  $\frac{9\pi}{4}$  e  $\frac{17\pi}{4}$  rad) são côngruos a  $\frac{\pi}{4}$  rad.

Podemos expressar os arcos com extremidades em  $\frac{\pi}{4}$  rad da seguinte forma:  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , onde  $k$  é o número de voltas a partir do arco de  $\frac{\pi}{4}$  rad, então:

se  $k = 0$  temos  $x = \frac{\pi}{4}$  rad

se  $k = 1$  temos  $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$  rad

se  $k = 2$  temos  $x_2 = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$  rad

se  $k = 3$  temos  $x_3 = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4}$  rad, e assim sucessivamente.

Dizemos que  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é a expressão geral dos arcos com extremidades em  $\frac{\pi}{4}$  rad.

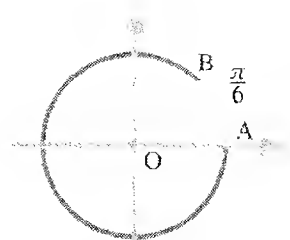
### **Exercícios resolvidos:**

1. Obter a expressão geral dos arcos com extremidades em  $\frac{\pi}{6}$  rad.

**Resolução:** A partir de  $\frac{\pi}{6}$  rad, podemos obter outro arco com extremidade nesse ponto da circunferência se efetuarmos uma vol-



ta completa, ou seja,  $2\pi$  rad. Portanto, a expressão geral é:  $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$



2. Determinar o menor arco não-negativo cômruo a  $1000^\circ$

*Resolução:* O menor arco não-negativo está sempre entre 0 e  $360^\circ$  e, se é cômruo a  $1000^\circ$  então sua extremidade é a mesma que  $1000^\circ$ . Para determinarmos esse arco, dividimos  $1000^\circ$  por  $360^\circ$  e assim saberemos quantas voltas foram dadas sobre a circunferência, sendo que o resto da divisão corresponde ao arco

cômruo procurado:  $1000^\circ \begin{array}{l} 360^\circ \\ 280^\circ \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array}$ , então  $1000^\circ = \underbrace{2 \cdot 360^\circ}_{\text{duas voltas}} + 280^\circ$

Portanto, o menor arco não-negativo cômruo a  $1000^\circ$  é  $280^\circ$ .

3. Encontrar a primeira determinação positiva do arco de  $\frac{28\pi}{3}$  rad.

*Resolução:* A primeira determinação positiva é o mesmo que o menor arco não-negativo. Nesse caso, como o arco está em radianos, dividimos por  $2\pi$  rad, que equivale a uma volta completa. Porém, como temos uma divisão de frações, é conveniente que os denominadores sejam iguais. Procuramos, então, uma fração equivalente a  $2\pi$  rad com denominador 3, isto é:  $2\pi = \frac{6\pi}{3}$

$\frac{28\pi}{3} \begin{array}{l} 6\pi \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 4 \end{array}$  então:  $\frac{28\pi}{3} = \underbrace{4 \cdot \frac{6\pi}{3}}_{\text{4 voltas}} + \frac{4\pi}{3}$   
A primeira determinação positiva é  $\frac{4\pi}{3}$  rad.

4. Encontrar a primeira determinação positiva de  $\frac{53\pi}{6}$  rad.

*Resolução:* Efetuamos a divisão em que o divisor é uma fração equivalente a  $2\pi$  rad com denominador 6, ou seja:  $2\pi = \frac{12\pi}{6}$

$$\begin{array}{r} 53\pi \mid 12\pi \\ 6 \quad 6 \\ \hline 48\pi \quad 4 \\ \hline 6 \\ \hline 5\pi \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\frac{53\pi}{6} = 4 \cdot \underbrace{\frac{12\pi}{6}}_{4 \text{ voltas}} + \frac{5\pi}{6}$$

$\frac{5\pi}{6}$  rad é a primeira determinação positiva procurada.

### ⇒ Exercícios propostos:

**23.** Determinar o menor arco não-negativo cômgruo a:

- a)  $5\,000^\circ$       b)  $1\,212^\circ$       c)  $\frac{61\pi}{4}$  rad      d)  $100\pi$  rad

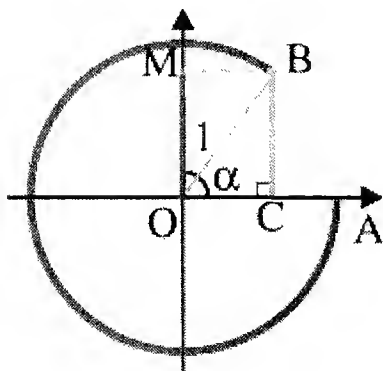
**24.** Encontrar a primeira determinação positiva dos arcos:

- a)  $\frac{91\pi}{6}$  rad      b)  $\frac{34\pi}{3}$  rad      c)  $\frac{35\pi}{3}$  rad      d)  $\frac{43\pi}{4}$  rad

**25.** Determinar a expressão geral dos arcos de:

- a)  $\frac{5\pi}{4}$  rad      b)  $\frac{7\pi}{6}$  rad      c)  $\frac{5\pi}{3}$  rad

**4. Seno** Observe a figura:



Ao arco  $\widehat{AB}$  está associado ao ângulo  $\alpha$ ; sendo o triângulo OBC retângulo, podemos determinar o seno de  $\alpha$ :

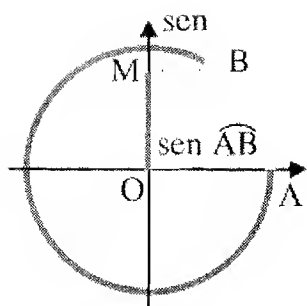
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{1}$$

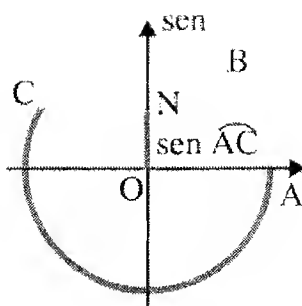
$$\text{sen } \alpha = \overline{BC}$$

Note que  $\overline{BC} = \overline{OM}$ , portanto podemos substituir  $\overline{BC}$  por  $\overline{OM}$ , obtendo assim:  **$\text{sen } \alpha = \overline{OM}$**

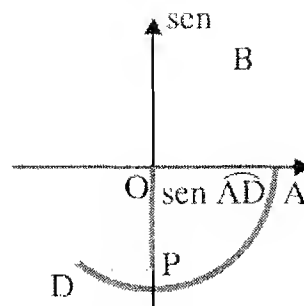
De forma geral, se quisermos determinar o seno de um arco, basta projetar sua extremidade sobre o eixo Oy, que chamaremos de *eixo dos senos*.



$$\text{sen } \widehat{AB} = \overline{OM}$$



$$\text{sen } \widehat{AC} = \overline{ON}$$

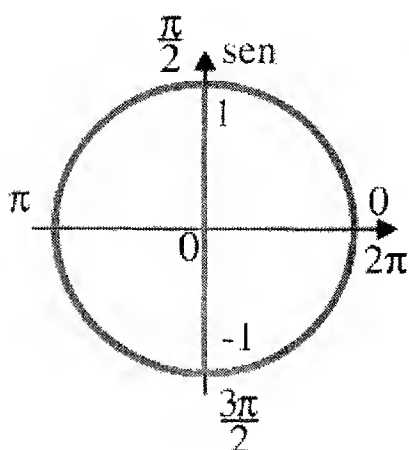


$$\text{sen } \widehat{AD} = \overline{OP}$$

Como o ciclo trigonométrico tem raio 1, para qualquer arco  $\alpha$ , temos que:

$$\boxed{-1 \leq \text{sen } a \leq 1}$$

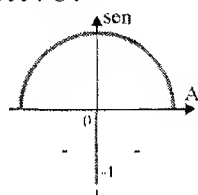
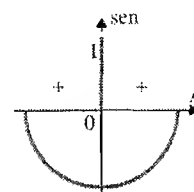
Observe que:



$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \text{sen } \frac{3\pi}{2} &= -1 \\ \text{sen } 0 &= \text{sen } \pi = \text{sen } 2\pi = 0 \end{aligned}$$

**a) Sinais:** O eixo dos senos possui a mesma orientação que o eixo Oy acima do zero, o sinal é positivo e, abaixo do zero, o sinal é negativo. Temos, então:

arcos com extremidades no *primeiro* ou *segundo* quadrantes têm seno *positivo*.



arcos com extremidades no *terceiro* ou *quarto* quadrantes têm seno *negativo*.

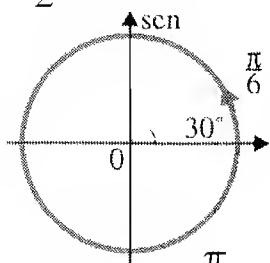
**b) Seno de ângulos notáveis:** Em trigonometria, frequentemente usamos os arcos em radianos, então, através de uma regra de três simples, obtemos os ângulos notáveis em radianos:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad } (180^\circ \div 6 = 30^\circ); 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad } (180^\circ \div 4 = 45^\circ) \text{ e}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad } (180^\circ \div 3 = 60^\circ)$$

Da tabela trigonométrica de ângulos notáveis sabemos que  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , portanto:  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ portanto: } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



Vamos localizar os arcos múltiplos de  $\frac{\pi}{6}$  rad na primeira volta do ciclo trigonométrico. Para isso, inicialmente, localizamos o arco de  $\frac{\pi}{6}$  rad ( $30^\circ$ ).

Os múltiplos de  $\frac{\pi}{6}$  rad são:

Note a simetria do polígono e dos arcos. O nome do polígono é dodecágono regular.

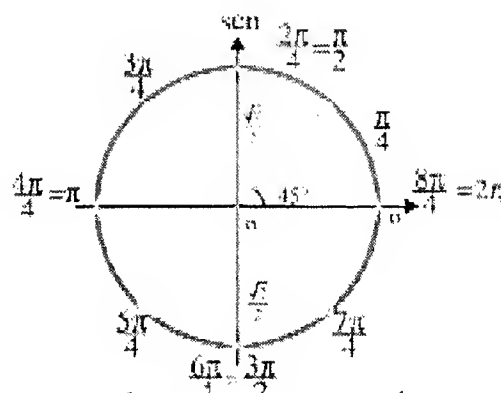
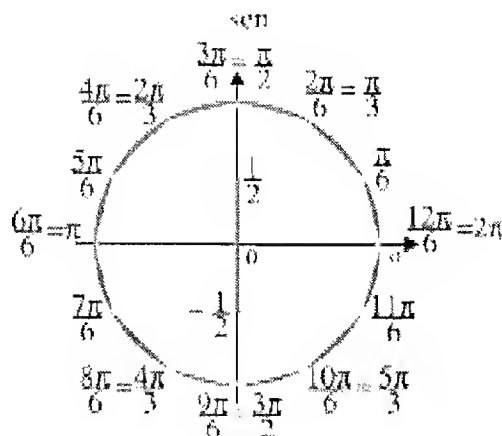
Repetimos o processo para os arcos múltiplos de  $45^\circ$ , utilizando o seno de  $45^\circ$  da tabela trigonométrica:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Localizamos os arcos

múltiplos de  $\frac{\pi}{4}$  rad,

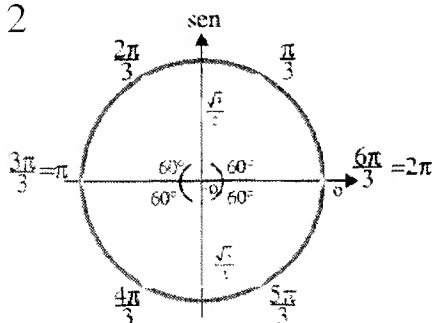
somando  $\frac{\pi}{4}$  rad a cada arco obtido:



Unindo as extremidades de cada arco obtemos um octógono regular. Note que podemos encontrar os arcos utilizando a simetria em relação ao ponto 0.

Procedemos da mesma forma para obter os arcos múltiplos de  $60^\circ$ , de acordo com a tabela trigonométrica de ângulos notáveis:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Inicialmente, encontramos o arco de  $\frac{\pi}{3}$  rad e somamos  $\frac{\pi}{3}$  rad à extremidade de cada arco para obter o seguinte.

Unindo as extremidades dos arcos, forma-se um hexágono regular.

Na figura anterior, note que:  $\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Observe ainda que  $\frac{2\pi}{3}$  tem extremidade no segundo quadrante, e que para chegar em  $\pi$  devemos somar  $60^\circ$  ou  $\frac{\pi}{3}$  rad. Temos então:

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Portanto: } \text{sen} \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = \text{sen } \frac{\pi}{3}$$

De forma geral, se quisermos o seno de um arco com extremidade no *segundo quadrante*, sabendo o valor de  $\text{sen } \alpha$ , onde  $\alpha$  é um arco do primeiro quadrante:

$$\text{sen} (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No *terceiro quadrante* temos:  $\text{sen } \frac{4\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Note que para chegar nesse arco, somamos  $\frac{\pi}{3}$  rad ao arco de  $\pi$  rad.

Podemos escrever que:  $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$

$$\text{Portanto: } \text{sen} \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\text{sen } \frac{\pi}{3}$$

De forma geral, se  $\alpha$  é um arco do primeiro quadrante então  $\pi + \alpha$  estará no terceiro quadrante. Nesse caso o seno do arco do terceiro quadrante é igual ao seno do arco do primeiro quadrante, porém com sinal negativo. Portanto, conhecido o  $\text{sen } \alpha$ , temos:

$$\text{sen} (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No *quarto quadrante* observamos que:

$$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Note que para chegar em  $2\pi$  rad é necessário somar  $\frac{\pi}{3}$  ao arco de  $\frac{5\pi}{3}$  rad.

Podemos, então escrever que:  $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

Portanto:  $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$

Concluindo, sendo  $\alpha$  um arco do primeiro quadrante então  $2\pi - \alpha$  será arco do quarto quadrante. Observamos que os valores de seus senos são iguais, porém têm sinais contrários, ou seja:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

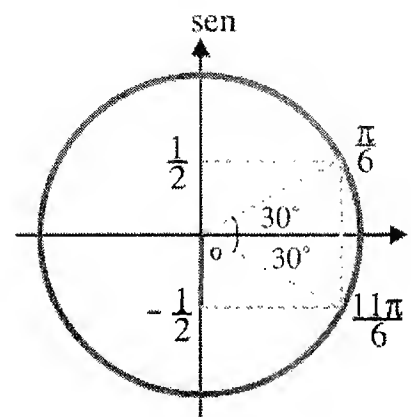
Portanto, devemos identificar o quadrante onde está o arco cujo seno queremos calcular. Feito isso, procuramos o seu simétrico no primeiro quadrante, pois conhecemos o valor do seno dos arcos do primeiro quadrante. *Se o arco está no segundo quadrante, seu seno é positivo. Se o arco está no terceiro ou quarto quadrantes, seu seno é negativo.*

Exemplo 1:  $\sin \frac{11\pi}{6}$

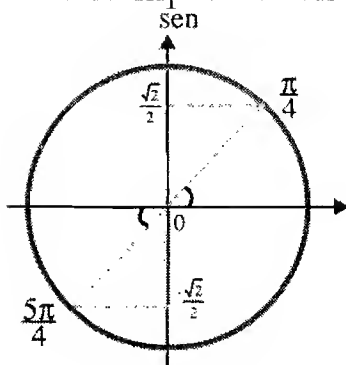
Note que o arco é simétrico a  $\frac{\pi}{6}$  rad e está

no quarto quadrante:  $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

então:  $\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$



Exemplo 2:  $\sin \frac{5\pi}{4}$



O arco está no terceiro quadrante e é simétrico a  $\frac{\pi}{4}$  rad:

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

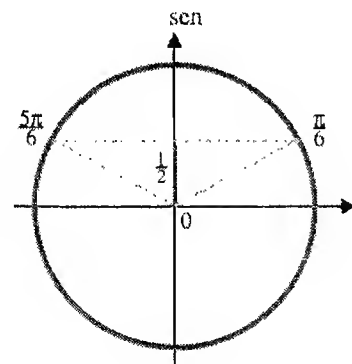
portanto,  $\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemplo 3:  $\sin \frac{5\pi}{6}$

Note que o arco é simétrico a  $\frac{\pi}{6}$  rad e está no

segundo quadrante:  $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



### Exercícios resolvidos:

1. Calcular  $\sin \frac{29\pi}{6}$ .

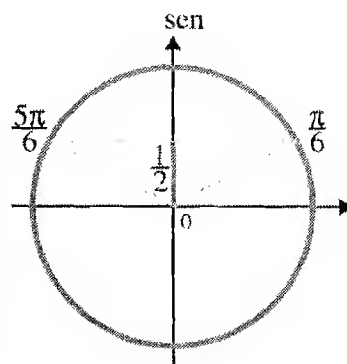
*Resolução:* É necessário determinar o arco côngruo entre 0 e  $2\pi$  rad:

$$\begin{array}{r} \frac{29\pi}{6} \left| \frac{12\pi}{6} \right. \\ - \frac{24\pi}{6} \quad 2 \\ \hline \frac{5\pi}{6} \end{array}$$

Então  $\frac{5\pi}{6}$  rad é côngruo a  $\frac{29\pi}{6}$  rad, portanto  $\sin \frac{29\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$ .

Observando o ciclo trigonométrico concluímos que  $\frac{5\pi}{6}$  é simétrico a  $\frac{\pi}{6}$ , então, temos

que:  $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin \frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}}$



2. Sendo  $\sin x = \frac{k-2}{7}$ , determine  $k$  para que exista  $\sin x$ .

*Resolução:* De acordo com o que vimos, sabemos que o  $\sin x$  é um número entre  $-1$  e  $1$ :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\text{Portanto: } -1 \leq \frac{k-2}{7} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq k-2 \leq 7 \Rightarrow \boxed{-5 \leq k \leq 9}$$

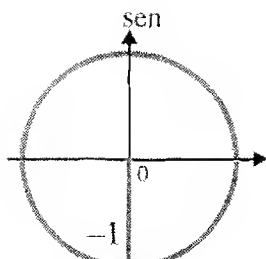
3. Calcular o valor de  $M$ , satisfeitas as condições de existência.

$$M = \frac{\sin \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{11\pi}{4}}{\left(\sin \frac{37\pi}{6}\right)^2 + \sin \pi}$$

*Resolução:* Determinamos, separadamente, o valor numérico do seno de cada arco da expressão. Se necessário, devemos calcular os arcos côngruos na primeira volta do ciclo.

Procuramos as soluções no ciclo trigonométrico utilizando a simetria entre os arcos:

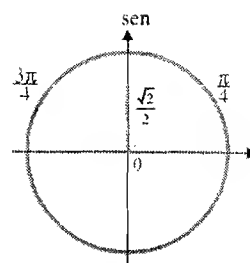
$$\boxed{\sin \frac{3\pi}{2} = -1}$$



$$\begin{array}{r|l} \frac{11\pi}{4} & \frac{8\pi}{4} \\ \hline \frac{3\pi}{4} & 1 \end{array}$$

$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4},$$

por simetria temos:

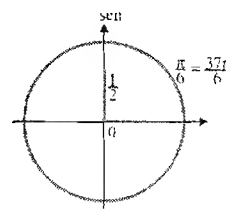


$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\sin \frac{11\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{37\pi}{6} & \frac{12\pi}{6} \\ \hline \frac{36\pi}{6} & 3 \\ \hline \frac{\pi}{6} & \end{array}$$

Portanto, temos:

$$\sin \frac{37\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



Portanto

$$\boxed{\sin \frac{37\pi}{6} = \frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{\sin \pi = 0}$$

Substituímos todos os valores encontrados na expressão:

$$M = \frac{\sin \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{11\pi}{4}}{\left( \sin \frac{37\pi}{6} \right)^2 + \sin \pi} = \frac{-1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + 0} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{\frac{1}{4}} = (-1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{4}{1}$$

$$\boxed{M = 4\sqrt{2} - 4}$$

### Exercícios propostos:

26. Determine:

- a)  $\sin \frac{2\pi}{3}$    b)  $\sin \frac{5\pi}{3}$    c)  $\sin \frac{7\pi}{4}$    d)  $\sin \frac{7\pi}{6}$    e)  $\sin \frac{21\pi}{4}$   
 f)  $\sin \frac{19\pi}{6}$    g)  $\sin \frac{8\pi}{3}$    h)  $\sin \frac{17\pi}{4}$    i)  $\sin \frac{31\pi}{6}$    j)  $\sin 7\pi$

27. Calcule o valor da expressão:  $P = \frac{\left( \sin \frac{3\pi}{2} \right)^2 \cdot \sin \frac{25\pi}{4} + \frac{7\pi}{3}}{\sin 9\pi + \sin \frac{17\pi}{6}}$

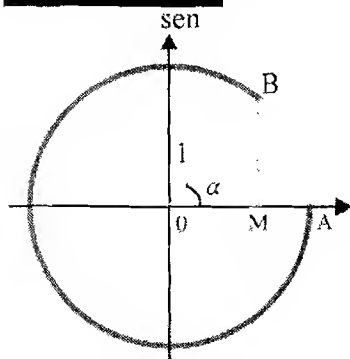


**28.** Definir as condições sobre  $m$  para que exista  $\sin x$ , em cada caso:

a)  $\sin x = \frac{2m + 3}{3}$

b)  $\sin x = \frac{4 - m}{5}$

**5. Cosseno** Observe a figura:

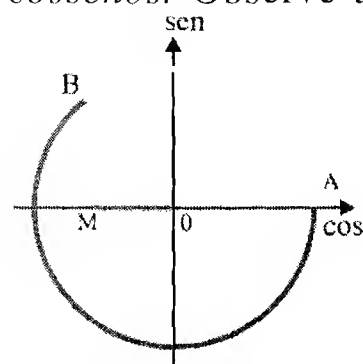


O ângulo  $\alpha$  está associado ao arco  $\widehat{AB}$ . No triângulo retângulo OMB, calculamos o cosseno de  $\alpha$ :

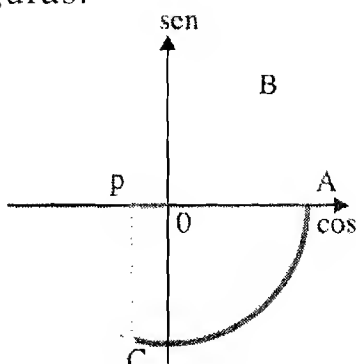
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OM}}{1}$$

$$\cos \alpha = \overline{OM}$$

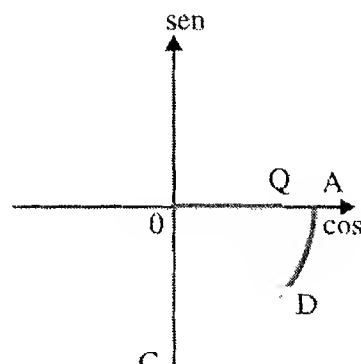
Portanto, para determinar o cosseno de um arco, basta projetar sua extremidade sobre o eixo Ox, que chamaremos de *eixo dos cossenos*. Observe as figuras:



$$\cos \widehat{AB} = \overline{OM}$$



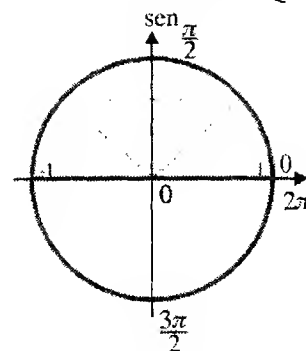
$$\cos \widehat{AC} = \overline{OP}$$



$$\cos \widehat{AD} = \overline{OQ}$$

Como o raio do ciclo trigonométrico é 1, para qualquer arco  $\alpha$ , temos:

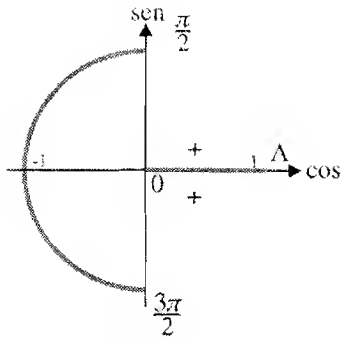
$$\boxed{-1 \leq \cos \alpha \leq 1}$$



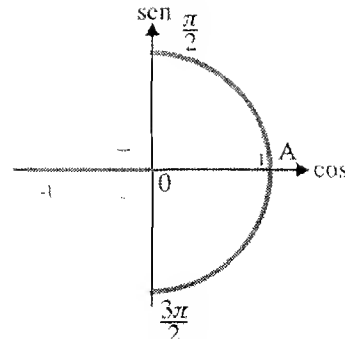
Observe os valores do cosseno para os arcos que têm a extremidade sobre os eixos:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 0 &= \cos 2\pi = 1 \\ \cos \pi &= -1 \\ \cos \frac{\pi}{2} &= \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \end{aligned}}$$

**a) Sinais:**



Os arcos que têm extremidades no *primeiro ou quarto quadrantes* possuem *cosseno positivo*.

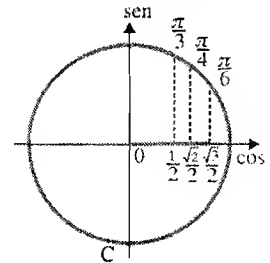


Os arcos que têm extremidades no *segundo ou terceiro quadrantes* possuem *cosseno negativo*.

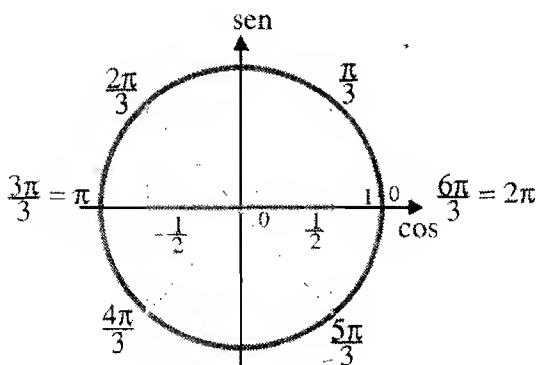
**b) Cosseno de ângulos notáveis:** Da tabela trigonométrica, temos que:

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{e } \cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



Vamos analisar o ciclo trigonométrico dividido em seis partes iguais, onde as extremidades dos arcos são múltiplos de  $\frac{\pi}{3}$  rad.



No segundo quadrante, observamos que o arco de  $\frac{2\pi}{3}$  rad é simétrico a  $\frac{\pi}{3}$  rad. Desta forma, podemos escrever que:

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Por outro lado, observando as projeções desses arcos sobre o eixo dos cossenos, temos:  $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Considerando as duas igualdades acima, concluímos que:

$$\cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

De forma geral, se  $\alpha$  é um arco com extremidade no primeiro quadrante, o seu simétrico no segundo quadrante é  $\pi - \alpha$ , suas projeções sobre o eixo dos cossenos têm o mesmo valor em módulo, porém os sinais são diferentes:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No terceiro quadrante o arco com extremidade em  $\frac{4\pi}{3}$  rad é simétrico a  $\frac{\pi}{3}$  rad. Podemos escrever que:

$$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{4} = \frac{4\pi}{3}$$

Analisando as projeções das extremidades desses arcos no eixo dos cossenos, verificamos que têm o mesmo valor em módulo e sinais diferentes, então:  $\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$\text{Portanto, temos: } \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Sendo dado um arco  $\alpha$  no primeiro quadrante então  $\pi + \alpha$  tem extremidade no terceiro quadrante; os valores dos cossenos desses arcos são:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No quarto quadrante, o arco de  $\frac{5\pi}{3}$  rad é simétrico a  $\frac{\pi}{3}$  rad.

$$\text{Podemos escrever que: } 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Observe que as projeções desses dois arcos sobre o eixo dos cossenos têm o mesmo valor e o mesmo sinal:

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Considerando as duas igualdades anteriores, temos:

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

De forma geral, sendo  $\alpha$  um arco com extremidade no primeiro quadrante então  $2\pi - \alpha$  tem extremidade no quarto quadrante, obser-

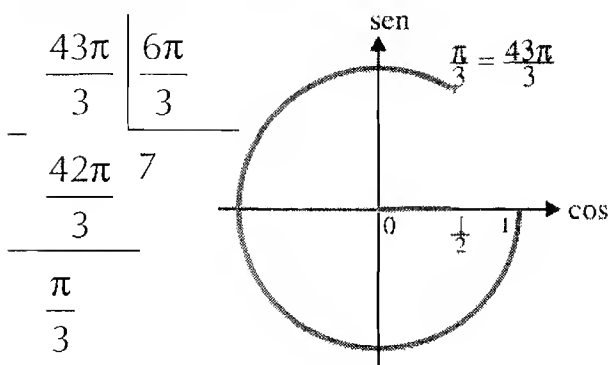
vamos que suas projeções no eixo dos cossenos são iguais em módulo e sinal:

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule  $\cos \frac{43\pi}{3}$ .

*Resolução:* Inicialmente, procuramos o arco côngruo entre 0 e  $2\pi$ :



Então  $\frac{\pi}{3}$  rad é côngruo a  $\frac{43\pi}{3}$  rad, portanto seus cossenos são iguais (veja a figura):

$$\cos \frac{43\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

2. Calcule  $\cos \frac{29\pi}{4}$  rad.

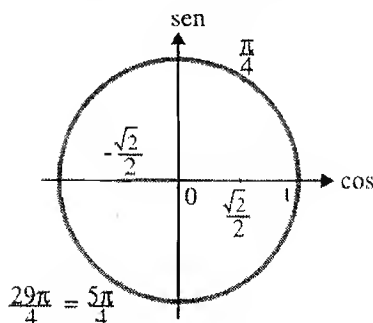
*Resolução:* Determinamos o arco côngruo.

$$\begin{array}{r} \frac{29\pi}{4} \left| \frac{8\pi}{4} \right. \\ - \frac{24\pi}{4} \quad 3 \\ \hline \frac{5\pi}{4} \end{array}$$

Portanto,  $\frac{5\pi}{4}$  rad é côngruo a  $\frac{29\pi}{4}$  rad, então seus cossenos são iguais. Na figura, observe que  $\frac{5\pi}{4}$  é simétrico a  $\frac{\pi}{4}$  rad e está

no terceiro quadrante:  $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Seus cossenos então têm sinais diferentes (veja a figura):



$$\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:  $\cos \frac{29\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Determine as condições sobre  $m$  para que exista  $\cos a = \frac{3-m}{7}$ .

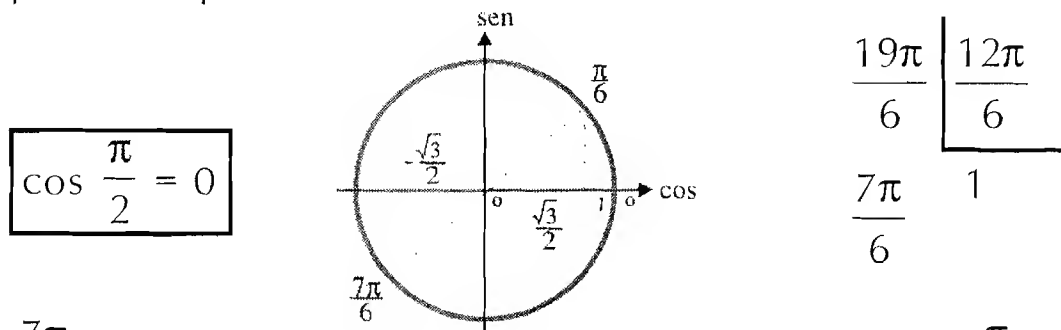
**Resolução:** Sabemos que o valor mínimo do cosseno é  $-1$  e o valor máximo é  $1$ , então:  $-1 \leq \cos a \leq 1$

$$\text{Portanto: } -1 \leq \frac{3-m}{7} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq 3-m \leq 7 \Rightarrow -10 \leq -m \leq 4$$

$$\boxed{10 \geq m \geq -4 \text{ ou } -4 \leq m \leq 10}$$

4. Determine o valor de A, sendo:  $A = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \cos \frac{19\pi}{6}}{(\cos \pi)^2 - \cos \frac{19\pi}{4}}$

**Resolução:** Para determinar o valor de A, é necessário encontrar o valor de cada cosseno separadamente. Quando necessário determinar o arco côngruo entre  $0$  e  $2\pi$ , procuramos no ciclo trigonométrico as projeções de cada arco e seu simétrico no primeiro quadrante.

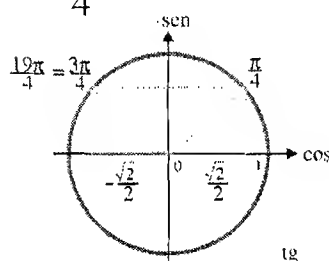


$\frac{7\pi}{6}$  rad está no terceiro quadrante e é simétrico a  $\frac{\pi}{6}$  rad.

No ciclo trigonométrico observamos que os sinais são

$\frac{19\pi}{4}$   $\frac{8\pi}{4}$  diferentes, então:  $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{16\pi}{4}$   $2$   
 $\frac{3\pi}{4}$   
 $\cos \frac{19\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4}$ . Sendo  $\frac{3\pi}{4}$  rad um arco com extremidade no segundo quadrante simétrico a  $\frac{\pi}{4}$  rad, seus cossenos são iguais, porém os sinais são diferentes (veja no ciclo). Portanto:



$$\boxed{\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$A = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \cos \frac{19\pi}{6}}{(\cos \pi)^2 - \cos \frac{19\pi}{4}} = \frac{0 + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(-1)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{3} \cdot \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$$

$$A = \frac{-2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{4 - 2} = \frac{2(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})}{2}$$

$$A = \sqrt{6} - 2\sqrt{3}$$

### Exercícios propostos:

29. Determine:

- a)  $\cos \frac{2\pi}{3}$  b)  $\cos \pi$  c)  $\cos \frac{3\pi}{2}$  d)  $\cos \frac{7\pi}{6}$  e)  $\cos \frac{7\pi}{4}$  f)  $\cos \frac{11\pi}{4}$   
g)  $\cos \frac{25\pi}{3}$  h)  $\cos \frac{31\pi}{6}$  i)  $\cos \frac{35\pi}{3}$  j)  $\cos \frac{23\pi}{4}$  l)  $\cos \frac{19\pi}{2}$  m)  $\cos 12\pi$

30. Dar o sinal de:

- a)  $\cos \frac{7\pi}{4}$  b)  $\cos \frac{4\pi}{3}$  c)  $\cos \frac{5\pi}{6}$  d)  $\cos \frac{41\pi}{6}$  e)  $\cos \frac{13\pi}{4}$  f)  $\cos \frac{29\pi}{3}$

31. Determine o valor das expressões:

a)  $P = \frac{2 \cdot \cos \frac{19\pi}{6} + \left(\cos \frac{15\pi}{4}\right)^2}{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{11\pi}{3}}$  b)  $M = \frac{\left(\cos \frac{29\pi}{6}\right)^2 - \cos \frac{22\pi}{3}}{2 \cdot \cos 10\pi + \cos \frac{15\pi}{2}}$

32. O menor valor de  $\frac{1}{3 - \cos x}$ , com x real é:

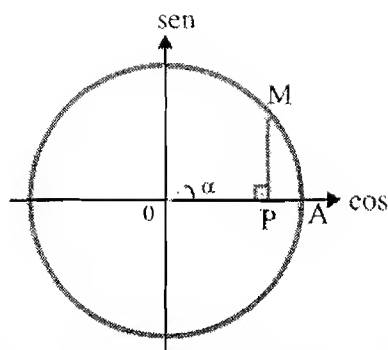
- a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{4}$  c)  $\frac{1}{2}$  d) 1 e) 3 (Sugestão: lembre-se que, quanto maior é o denominador, menor será a fração, portanto o numerador tem valor máximo para  $\cos x = -1$ .)

33. (UFAC) Sabendo que  $x = \sin \frac{\pi}{4}$ ,  $y = \sin \frac{\pi}{6}$  e  $z = \cos \frac{\pi}{4}$ , então é correto afirmar que:

- a)  $x > y > z$  c)  $x = z$  e  $y < z$  e)  $y = z$   
b)  $x < y < z$  d)  $x = y$  e  $y < z$

### 6. Relação fundamental da trigonometria

Na figura, no ciclo trigonométrico o arco  $\widehat{AM}$  tem ângulo central  $\alpha$ .



No triângulo retângulo OPM, sendo o raio 1, temos que:

$$\text{sen } \alpha = \overline{PM}$$

$$\text{cos } \alpha = \overline{OP}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = 1$$

$$\text{Substituindo: } \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Essa igualdade é a *relação fundamental da trigonometria*.

### **Exercícios resolvidos:**

1. Dado que  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ , determine a  $\text{tg } \alpha$ , sabendo que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

*Resolução:* Sabendo que  $\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a}$ , precisamos determinar o valor de  $\text{cos } a$ . Dado o  $\text{sen } a = \frac{3}{5}$ , recorremos à relação funda-

$$\text{mental: } \text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \text{cos}^2 a = 1$$

$$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , tem extremidade no primeiro quadrante,

nesse caso o cosseno é positivo:  $\text{cos } \alpha = \frac{4}{5}$

$$\text{Portanto: } \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \boxed{\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}}$$

2. Determine  $m$  para que se tenha simultaneamente

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{m}}{m} \text{ e } \text{cos } \alpha = \frac{m+1}{m}.$$

*Resolução:* Inicialmente, estabelecemos a condição de existência das frações, ou seja, os denominadores não podem ser zero:  $m \neq 0$ . Para  $\sqrt{m}$ , temos que  $m \geq 0$ ; efetuando a intersecção das condições,  $m$  deve ser estritamente positivo, ou  $m > 0$ .

Utilizamos a relação fundamental, pois ela estabelece uma condição simultânea para seno e cosseno do mesmo ângulo:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 = 1$$

$$\frac{m}{m^2} + \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2} = 1$$

$$\frac{m^2 + 3m + 1}{m^2} = 1$$

$$m^2 + 3m + 1 = m^2 \Rightarrow m^2 + 3m + 1 - m^2 = 0 \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

De acordo com a condição de existência, somente são convenientes valores estritamente positivos para  $m$ . Como encontramos um valor negativo, o conjunto solução é vazio.

$$S = \emptyset$$

### ⇒ Exercícios propostos:

34. Calcule  $\sin x$ , sabendo que  $\cos x = \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

35. Calcule  $\cos \alpha$ , sabendo que  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ .

36. Calcule  $\tan \alpha$ , sabendo que  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ .

37. (PUC-SP) Sendo  $\cos x = \frac{1}{m}$  e  $\sin x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$ , determinar  $m$ .

38. (U. Gama Filho-RJ) Calcular os valores de  $k$  que verificam simultaneamente as igualdades:  $\sin x = k - 1$  e  $\cos x = \sqrt{3 - k^2}$

a) 1 b) 0 c)  $\frac{3}{2}$  d) 2 e) -1

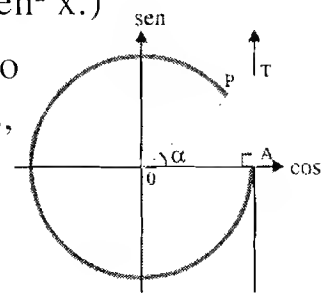
39. (UFPI) Se  $90^\circ < x < 180^\circ$  e  $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$  então  $\tan x$  é

igual a: a)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  c)  $\frac{1}{2}$  d)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  e)  $-\sqrt{3}$  (Sugestão: utilizando a

relação fundamental faça a substituição  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ .)

**7. Tangente** Na figura ao lado traçamos, no ciclo trigonométrico, uma reta paralela ao eixo dos senos, tangente ao ciclo no ponto A.

No triângulo retângulo OAT temos:  $\tan \alpha = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$



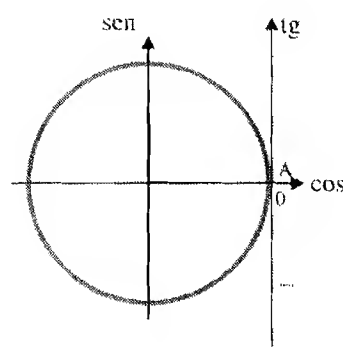
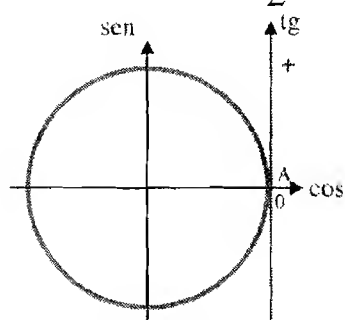


Como o raio é 1, então  $\overline{OA} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{tg } \alpha = \overline{AT}}$

Essa reta é chamada de *eixo das tangentes*. Observe que a tangente de  $\alpha$  é obtida prolongando o raio  $\overline{OP}$  até interceptar o eixo das tangentes.

Nas figuras seguintes, observe o que acontece com a tangente de um arco que se aproxima de  $\frac{\pi}{2}$  rad e  $\frac{3\pi}{2}$  rad. Para esses arcos, o prolongamento do raio é paralelo ao eixo das tangentes. Dizemos, então, que não existe tangente para os arcos com extremidades em:

$$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ e } \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$



**a) Sinais:** Na figura anterior, note que:

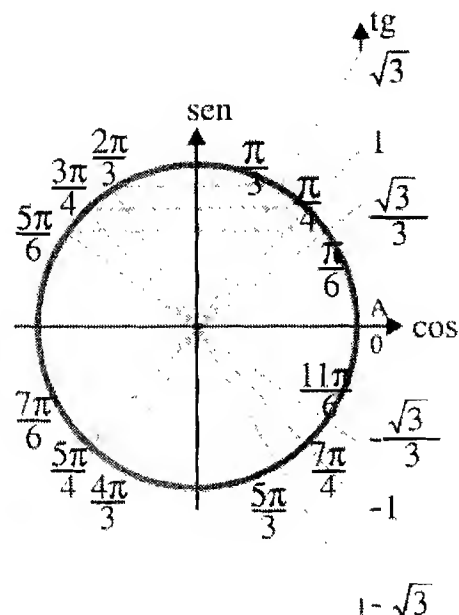
no *primeiro e terceiro quadrantes*, a tangente é *positiva*;  
no *segundo e quarto quadrantes*, a tangente é *negativa*.

Verificamos ainda que:  $\boxed{\text{tg } 0 = \text{tg } \pi = \text{tg } 2\pi = 0}$

**b) Tangente de ângulos notáveis:** Da tabela trigonométrica temos que:

$$\begin{aligned} \text{tg } 30^\circ &= \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{tg } 45^\circ &= \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \\ \text{tg } 60^\circ &= \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Observe a distribuição desses arcos, a simetria e o valor de suas respectivas tangentes no ciclo trigonométrico:



No *segundo quadrante* vamos considerar o arco de  $\frac{3\pi}{4}$  rad. Note que ele é simé-

trico a  $\frac{\pi}{4}$  rad: o valor das tangentes em módulo é o mesmo, porém os

sinais são diferentes:  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$

De forma geral, dado um arco  $\alpha$  no primeiro quadrante, então  $\pi - \alpha$  é um arco do segundo quadrante: suas tangentes são iguais em módulo, mas têm sinais diferentes:

$$\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No *terceiro quadrante*, temos o arco de  $\frac{5\pi}{4}$  rad simétrico a  $\frac{\pi}{4}$  rad. Note que suas tangentes são iguais em módulo e sinais:

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

Portanto, dado um ângulo  $\alpha$  no primeiro quadrante, seu simétrico no terceiro quadrante é  $\pi + \alpha$  e suas tangentes são iguais:

$$\operatorname{tg} (\pi + a) = \operatorname{tg} a, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

No *quarto quadrante*, temos o arco de  $\frac{7\pi}{4}$  rad simétrico a  $\frac{\pi}{4}$  rad. Observe que, em módulo, suas tangentes são iguais, porém os sinais

são diferentes:  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$

Portanto, dado um arco  $\alpha$  no primeiro quadrante e seu arco simétrico  $2\pi - \alpha$  no quarto quadrante, temos:

$$\operatorname{tg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

### Exercícios resolvidos:

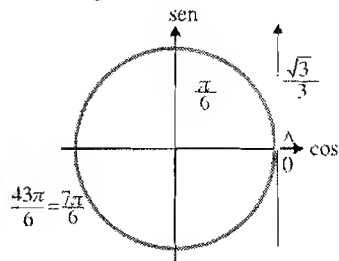
1. Determine  $\operatorname{tg} \frac{43\pi}{6}$ .

*Resolução:* Inicialmente determinamos o arco côngruo entre 0 e  $2\pi$ :

$$\begin{array}{r|l} 43\pi & 12\pi \\ -6 & 6 \\ \hline 36\pi & 3 \\ -6 & \\ \hline 7\pi & \\ -6 & \end{array}$$

$$\text{Portanto, } \operatorname{tg} \frac{43\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}.$$

Veja no ciclo trigonométrico que o simétrico de  $\frac{7\pi}{6}$  rad no primeiro quadrante é o arco de  $\frac{\pi}{6}$  rad, portanto suas tangentes são iguais:



Como  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , então  $\boxed{\operatorname{tg} \frac{43\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

2. Determine  $k$  para que exista a tangente:  $\operatorname{tg}\left(k - \frac{\pi}{4}\right)$ , na primeira volta do ciclo trigonométrico.

**Resolução:** Sabemos que não existe tangente para arcos com extremidades em  $\frac{\pi}{2}$  rad e  $\frac{3\pi}{2}$  rad, então:

$$k - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } k - \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2}$$

$$k \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \text{ e } k \neq \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\boxed{k \neq \frac{3\pi}{4} \text{ rad}} \text{ e } \boxed{k \neq \frac{7\pi}{4} \text{ rad}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

40. Determine:

a)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$  b)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$  c)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$  d)  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$  e)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$

f)  $\operatorname{tg} \frac{33\pi}{4}$  g)  $\operatorname{tg} \frac{29\pi}{6}$  h)  $\operatorname{tg} \frac{41\pi}{3}$  i)  $\operatorname{tg} \frac{39\pi}{2}$

41. Determine  $m$  para que exista cada uma das tangentes na 1ª volta do ciclo trigonométrico.

a)  $\operatorname{tg} \left(m - \frac{\pi}{3}\right)$  b)  $\operatorname{tg} (2m + \pi)$

42. Determine o valor de A na expressão:  $A = \frac{\operatorname{tg} 7\pi - \left(\operatorname{tg} \frac{31\pi}{6}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{25\pi}{3}\right)}{2 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{17\pi}{4}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right)}$

43. (FGV-SP) O valor de  $\log \left( \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \right)$  é: a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

**8. Cotangente – secante – cossecante** Define-se a *cotangente* como a razão entre o cosseno e o seno de um arco:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ sendo } \sin \alpha \neq 0 \text{ e, portanto, } \alpha \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A *secante* de um arco é:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ sendo } \cos \alpha \neq 0, \text{ então } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A *cossecante* de um arco é:

$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \text{ sendo } \sin \alpha \neq 0 \text{ e, portanto, } \alpha \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

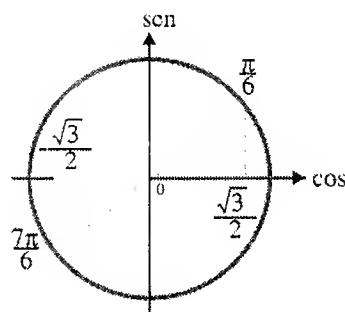
### **Exercícios resolvidos:**

1. Determine: a)  $\sec \frac{7\pi}{6}$

*Resolução:* Basta aplicar a definição e determinar o valor do cosseno do arco pedido:

$$\sec \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\sec \frac{7\pi}{6} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}}$$



b)  $\operatorname{cotg} \frac{11\pi}{4}$

*Resolução:* Inicialmente, determinamos o arco cômruo entre 0 e  $2\pi$ :

$$\frac{11\pi}{4} \left| \frac{8\pi}{4} \right.$$

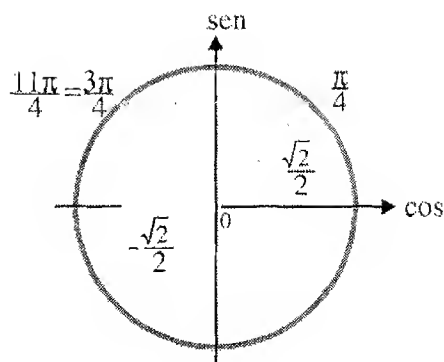
$$\frac{3\pi}{4}$$

Portanto:

$$\boxed{\operatorname{cotg} \frac{11\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{4}}$$

Aplicamos a definição de cotangente, determinando, no ciclo trigonométrico,

o seno e cosseno de  $\frac{3\pi}{4}$  rad.



$$\cotg \frac{3\pi}{4} = \frac{\cos \frac{3\pi}{4}}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\boxed{\cotg \frac{11\pi}{4} = -1}$$

c)  $\operatorname{cosec} \frac{25\pi}{3}$

*Resolução:* Determinamos o arco cômruo entre 0 e  $2\pi$  rad e, a seguir, aplicamos a definição de cosecante:

$$\frac{25\pi}{3} \left| \frac{6\pi}{3} \right.$$

$$\frac{\pi}{3} \quad 4$$

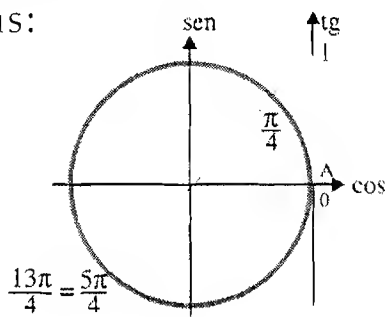
$$\operatorname{cosec} \frac{25\pi}{3} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec} \frac{25\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

2. (UFPA) O valor da expressão

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{13\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4} \text{ é: a) } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ b) } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ c) } 0 \text{ d) } -1 \text{ e) } 1$$

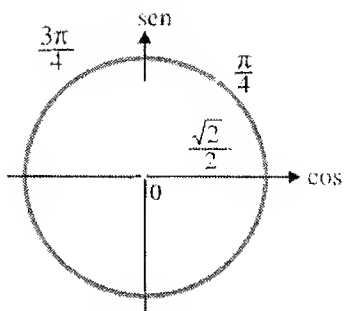
*Resolução:* Determinamos, separadamente, cada uma das funções pedidas:



$$\frac{13\pi}{4} \left| \frac{8\pi}{4} \right.$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = 1}$$



$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cossec} \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{cossec} \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}}$$

Substituímos os valores na expressão:

$$3 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{13\pi}{4} - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cossec} \frac{3\pi}{4} = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 3 - 2 = 1$$

Alternativa correta: E

### ⇒ Exercícios propostos:

44. Determine:

a)  $\cotg \frac{27\pi}{4}$

b)  $\sec \frac{35\pi}{3}$

c)  $\operatorname{cossec} \frac{21\pi}{6}$

d)  $\cotg \frac{19\pi}{4}$

e)  $\sec \frac{41\pi}{3}$

f)  $\operatorname{cossec} \frac{19\pi}{6}$

45. (UFRR) Seja  $x$  um ângulo do 3º quadrante tal que  $\operatorname{tg} x = 1$ . Calcular o valor da expressão  $-\cotg x \cdot \sqrt{2} \operatorname{sen} x$ .

46. (UFSC) O valor da expressão  $\frac{4 \operatorname{tg} x \cdot 7 \cotg x}{\operatorname{cossec}^2 x - 1}$  para  $x = 60^\circ$ .

47. (FGV-RJ) A função trigonométrica equivalente a

$$\frac{\sec x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x + \cos x} \text{ é: a) } \operatorname{sen} x \text{ b) } \cotg x \text{ c) } \sec x \text{ d) } \operatorname{cossec} x \text{ e) } \operatorname{tg} x$$

**9. Relações derivadas** Utilizando as definições de cotangente, secante e cossecante associadas à relação fundamental da trigonometria, podemos deduzir fórmulas que auxiliam na simplificação de expressões trigonométricas.

Inicialmente, observe as definições de tangente e cotangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Podemos, então, concluir que:

$$\boxed{\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

A partir da relação fundamental, dividimos os dois membros por  $\cos^2 \alpha$  obtendo, assim, os quadrados da tangente e a secante de  $\alpha$ , observe:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

A partir da relação fundamental, dividimos os dois membros por  $\sin^2 \alpha$ , obtendo os quadrados da cotangente e cossecante de  $\alpha$ :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad \alpha \neq k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Simplifique:  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha}$

**Resolução:** Basta substituir as funções dadas de forma conveniente:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha} = \\ &= \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{\frac{\sec^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}}{\sec \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \boxed{\sec \alpha} \end{aligned}$$

2. Calcular  $\operatorname{cotg} \alpha$  dado que  $2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$ .

**Resolução:** Resolvemos a equação de segundo grau com incógnita  $\operatorname{tg} \alpha$ , aplicando a definição de cotangente quando for determinado o valor da tangente:

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ ou } \operatorname{tg} \alpha = -2$$

$$\text{Como } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{cotg} \alpha = 2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{-2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{1}{2}}$$

### Exercícios propostos:

48. Simplifique as expressões:

a)  $\frac{\operatorname{cosec} \alpha \cdot \sec \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}$

b)  $\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{cosec}^2 x - 1)$

49. Determinar  $\sin x$ , se  $4 \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x - 5 = 0$ .

50. Determinar  $\cos x$ , se  $\sec^2 x - \sec x - 2 = 0$ .

51. (UFCE) Para todo  $x \in I$  quadrante, a expressão

$(\sec x - \operatorname{tg} x)(\sec x + \operatorname{tg} x) - \sin^2 x$  é igual a:

a)  $\cos^2 x$                       c)  $\cos x - \sin x$                       e) n. d. a.

b)  $1 + \sin^2 x$                       d)  $\sec x + \cos x$

52. (PUC-RS) Sendo  $x$  um arco com extremidade no segundo qua-

drante e  $\sec x = -\frac{5}{3}$ , então  $5 \sin^2 x - 3 \operatorname{tg} x$  é igual a:

a)  $-\frac{32}{15}$    b)  $-\frac{36}{5}$    c)  $-\frac{4}{5}$    d)  $\frac{4}{5}$    e)  $\frac{36}{5}$

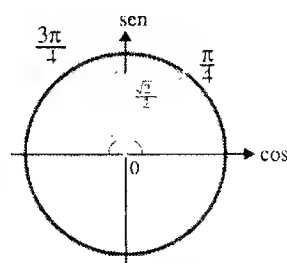
**10. Equações e inequações trigonométricas** Equação trigonométrica é toda equação em que a incógnita é uma função trigonométrica, porém nem todos os arcos satisfazem essas equações. Para determinar esses arcos, recorreremos ao ciclo trigonométrico sempre que necessário. As inequações se caracterizam pela presença de algum dos sinais de desigualdade.

### Exercícios resolvidos:

1. Defina os valores de  $x$  para  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Resolução:** Queremos encontrar os arcos que tenham seno igual a

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ . No eixo dos senos do ciclo trigonométrico procuramos este valor e, traçando uma reta paralela ao eixo dos cossenos, temos as extremidades dos arcos procurados. Veja a figura.





Note que entre 0 e  $2\pi$  rad existem dois arcos, sendo que no primeiro quadrante o arco é  $\frac{\pi}{4}$  rad e, utilizando a simetria do ciclo, no segundo quadrante o arco será:

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Como existem infinitos arcos com essas extremidades e no enunciado não é dado um intervalo para  $x$ , temos que dar a solução através de uma expressão geral. Assim:

para  $\frac{\pi}{4}$  rad temos:  $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$  e para  $\frac{3\pi}{4}$  rad temos:  $\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

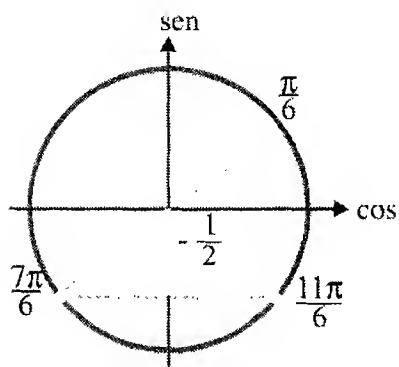
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Defina os valores de  $x$  para  $2 \sin x + 1 = 0$ , sendo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

*Resolução:* Inicialmente, isolamos  $\sin x$ :  $2 \sin x + 1 = 0$

$$2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

Marcamos no eixo dos senos o valor encontrado. Traçando a paralela, encontramos a extremidade dos arcos que procuramos, que estão no terceiro e quarto quadrantes. Da tabela trigonométrica sabemos que:



$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, utilizando a simetria, no terceiro quadrante temos:

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

e, no quarto quadrante:  $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

Observe que, no enunciado, os valores procurados para  $x$  devem estar entre 0 e  $2\pi$  rad. Então a solução está restrita aos dois

valores encontrados:  $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

Observação:

O processo para se obter os arcos *por simetria*, que estão no 2º, 3º ou 4º quadrantes a partir de um arco  $\alpha$  do 1º quadrante é o seguinte:

→ no 2º quadrante, subtraímos de  $\pi$ , ou seja, o arco será:  $\pi - \alpha$

→ no 3º quadrante, somamos a  $\pi$  e o arco será:  $\pi + \alpha$

→ no 4º quadrante, subtraímos de  $2\pi$  e o arco será:  $2\pi - \alpha$

### ⇒ Exercícios propostos:

53. Resolva as equações:

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e)  $-2 \sin x = \sqrt{3}$

b)  $\sin x = \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 2\pi$

f)  $\sin x = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

c)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g)  $\sin^2 x = 1$

d)  $2 \sin x + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

h)  $2 \sin^2 x - 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

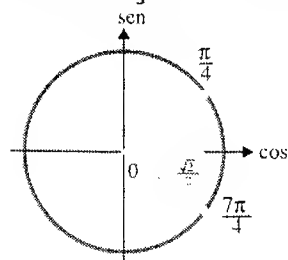
54. (UFMT) Determine o menor valor positivo de  $\theta$  que satisfaz a

equação  $(0,333\dots)^{\sin \theta} \doteq \frac{\sqrt{3}}{3}$ . (Sugestão: a fração geratriz de 0,333... é  $\frac{1}{3}$ ; reduza os dois membros da equação à mesma base e iguale os expoentes.)

### ⇒ Exercícios resolvidos:

1. Defina os valores de  $x$  para  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Resolução: No eixo dos cossenos, marcamos o valor do cosseno



dos arcos que estamos procurando,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Traçando uma paralela ao eixo dos senos, encontramos as extremidades dos arcos. Veja a figura.

No primeiro quadrante sabemos que o arco é  $\frac{\pi}{4}$  rad. No quarto quadrante o arco procurado é:

$$2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Como não existe um intervalo para o valor de  $x$ , a solução deve ser uma expressão geral para esses arcos:

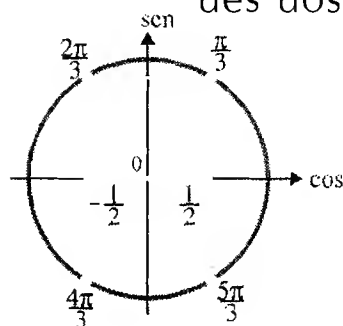
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Defina os valores de  $x$  para  $4 \cos^2 x - 1 = 0$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**Resolução:** Inicialmente, isolamos o  $\cos x$ :  $4 \cos^2 x - 1 = 0$

$$4 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{\cos x = \pm \frac{1}{2}}$$

Procuramos no eixo dos cossenos os valores  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  e, traçando as paralelas ao eixo dos senos, determinamos as extremidades dos arcos que procuramos. Veja a figura.



No 1º quadrante sabemos que:  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

No 2º quadrante o arco é:  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

No 3º quadrante o arco é:  $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

No 4º quadrante o arco é:  $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$

Como as soluções devem estar entre 0 e  $2\pi$ , temos:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

3. (UFBA) Seja  $S$  a soma das raízes da equação  $\cos x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x = 0$

que pertencem ao intervalo  $[0, 2\pi]$ . Determine  $\frac{S}{\pi}$ .

**Resolução:** Observe que na equação existem três incógnitas. Devemos reduzi-las, aplicando as transformações necessárias.

Inicialmente, substituímos  $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ :

$$\cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = 0$$

$$\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = 0$$

Como  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , temos que  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ .

$$\text{Substituindo: } \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos x} = 0$$

Devemos garantir que o denominador seja diferente de zero, estabelecendo, assim, uma condição para o valor de  $x$ :

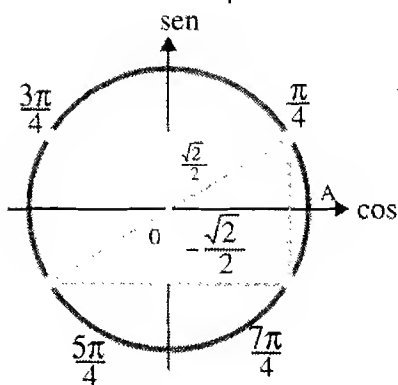
$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}$$

Se uma fração é zero, somente seu numerador pode ser zero; a equação a ser resolvida é:

$$1 - 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Determinamos os valores de  $x$ , a partir de seu seno, no ciclo trigonométrico:



Sabemos que  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , então os arcos procurados são:

$$\text{No 2º quadrante: } \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\text{No 3º quadrante: } \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

No 4º quadrante:  $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$  rad. A soma das soluções é:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi \Rightarrow S = 4\pi$$

Portanto:  $\boxed{\frac{S}{\pi} = \frac{4\pi}{\pi} = 4}$

### ⇒ Exercícios propostos:

55. Resolva as equações:

a)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $2 \cos x = 1, 0 \leq x \leq 2\pi$

c)  $4 \cos x = 2\sqrt{2}$

d)  $\sqrt{3} + 2 \cos x = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

e)  $\cos^2 x - 1 = 0$

f)  $2 \cos^2 x - 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

56. (Mack-SP) O conjunto solução da equação  $9^{\cos x} = \frac{1}{3}$  em  $[0, 2\pi]$  é:

a)  $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$  b)  $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$  c)  $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$  d)  $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$  e)  $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

57. (UFAL) Considere as soluções reais da equação

$2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$  no intervalo  $[0, \pi]$ . A soma dessas soluções

é: a)  $\frac{7\pi}{2}$  b)  $3\pi$  c)  $\frac{5\pi}{2}$  d)  $2\pi$  e)  $\frac{3\pi}{2}$

58. (UFSC) Determine o valor, em graus, do arco  $x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  na equação  $1 - \cos^2 x + \sin x = 0$ . (Sugestão: substitua  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  e resolva a equação de segundo grau em  $\sin x$ . Procure os valores de  $x$  no ciclo trigonométrico e observe que estes valores devem estar no primeiro quadrante.)

### ⇒ Exercícios resolvidos:

1. Calcular  $\operatorname{tg} x$ , dado:  $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0, 0 < x < 2\pi$ .

**Resolução:** Utilizamos a relação fundamental para obter uma equação de segundo grau com incógnita  $\cos x$ :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\text{Substituindo temos: } 2 \cdot (1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$$

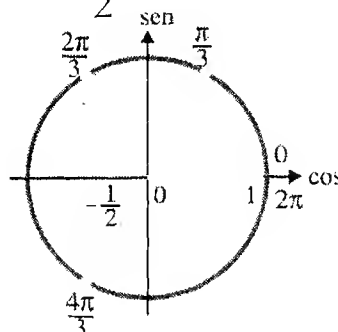
$$2 - 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\cos x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

Procuramos os valores de  $x$  no ciclo trigonométrico.

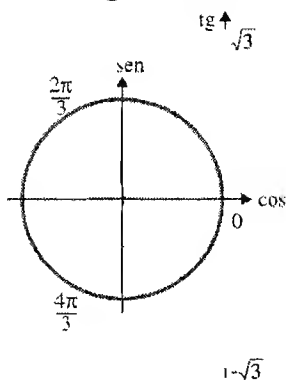
Os arcos que têm cosseno igual a  $-\frac{1}{2}$  estão no segundo e terceiro quadrantes e são múltiplos de  $\frac{\pi}{3}$  rad porque  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .



Portanto:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{\circ} \text{ quadrante: } \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \\ 3^{\circ} \text{ quadrante: } \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \end{array} \right\}$$

Para  $\cos x = 1$ , temos que  $x = 0$  ou  $x = 2\pi$ , mas conforme o enunciado  $0 < x < 2\pi$ , então  $x = 0$  e  $x = 2\pi$  rad não convêm como soluções. Para os arcos de  $\frac{2\pi}{3}$  rad e  $\frac{4\pi}{3}$  rad, basta prolongar a reta que passa pelo centro da circunferência até o eixo das tangentes e utilizar como parâmetro o valor obtido na tabela



trigonométrica:  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ .

Portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

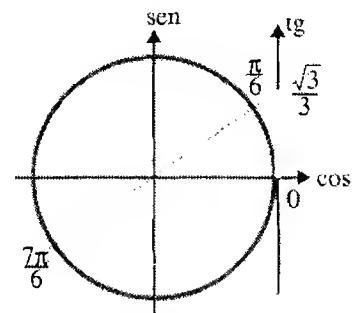
2. Defina os valores de  $x$  para  $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$ .

**Resolução:** Inicialmente, isolamos a  $\operatorname{tg} x$ :

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Procuramos os arcos no ciclo trigonométrico, sabendo que  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Além do arco do primeiro quadrante, temos um no terceiro:  $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$  rad



A solução deve ser dada através de uma expressão geral; para isto note que, a partir de  $\frac{\pi}{6}$ , para chegarmos em  $\frac{7\pi}{6}$ , percorremos metade da circunferência, ou seja  $\pi$  rad. Então o conjunto solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

### Exercícios propostos:

59. Resolva as equações:

a)  $2 \operatorname{tg} x = 0$

c)  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

e)  $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$

b)  $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$

d)  $\operatorname{tg} x = -1$

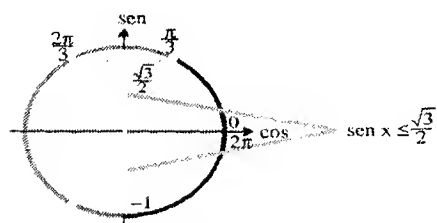
60. Resolva a equação  $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$ , sabendo que  $0 < x < 2\pi$ .

61. Determine  $\operatorname{tg} \alpha$ , dado que  $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} \alpha + 1 = 0$  e  $0 < \alpha < 2\pi$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Defina os valores de  $x$  para  $\operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**Resolução:** Procuramos valores de  $x$  que substituídos na inequação tenham senos menores ou igual a  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . No eixo dos senos, localiza-



mos esse intervalo. Traçando a paralela, determinamos toda a região de arcos que satisfazem a inequação. Veja a figura.

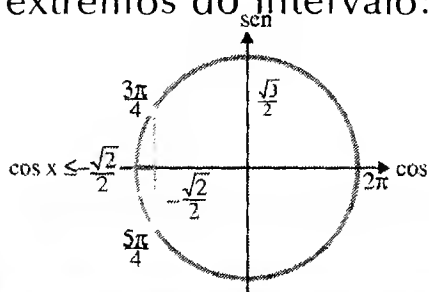
Note que a leitura dos arcos deve partir de zero, então:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \right\}$$

2. Defina os valores de  $x$  para  $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**Resolução:** Inicialmente, localizamos no eixo dos cossenos os valores menores que  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Traçando a paralela encontramos os extremos do intervalo:  $\frac{3\pi}{4}$  rad e  $\frac{5\pi}{4}$  rad.



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \right\}$$

### Exercícios propostos:

62. Resolva as inequações, sabendo que  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{c) } \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{d) } \cos x > 0 \\ \text{e) } \sin x < 0 \quad \text{f) } \tan x < 0 \quad \text{g) } \tan x - \sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

**63.** Resolva a inequação  $\cos^2 x < \cos x$ , dado que  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**64.** Determine o domínio de  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$

**65.** Determine o domínio de  $g(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$

## 11. Transformações trigonométricas

a) **Arco soma e arco diferença:** Sabemos que:

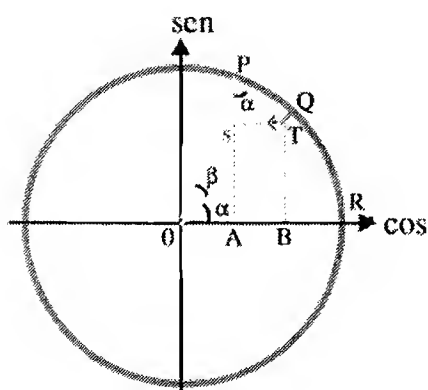
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 90^\circ = 0$$

Porém, note que a soma dos cossenos de dois ângulos não é igual ao cosseno da soma de dois ângulos:

$$\cos 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ e } \cos (30^\circ + 60^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

Portanto  $\cos (30^\circ + 60^\circ) \neq \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$

Existem fórmulas específicas para calcular tais somas.



do cosseno da soma de dois arcos.

Da figura, temos que:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB} - \overline{AB}}{\overline{OP}}$$

Por outro lado, temos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB} - \overline{ST}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} - \frac{\overline{ST}}{\overline{OP}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{OT}}{\overline{OT}} - \frac{\overline{ST}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{PT}}{\overline{PT}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OT}} \cdot \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} - \frac{\overline{ST}}{\overline{PT}} \cdot \frac{\overline{PT}}{\overline{OP}}$$

Observando as razões nos triângulos TOB, OPT e PST, temos:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Lembrando que:

$$\cos(-\beta) = \cos \beta \text{ e } \sin(-\beta) = -\sin \beta$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Para deduzir as fórmulas  $\sin(\alpha + \beta)$  e  $\sin(\alpha - \beta)$ , lembremos que:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \text{ e } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Temos então:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Para obter as fórmulas das tangentes de  $\alpha + \beta$  e  $\alpha - \beta$ , recorremos à razão entre seno e cosseno:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\alpha, \beta \text{ e } \alpha + \beta \text{ diferentes de } \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\alpha, \beta \text{ e } \alpha - \beta \text{ diferentes de } \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular  $\operatorname{cosec} 75^\circ$ .

**Resolução:** Devemos obter uma soma ou diferença que resulte em  $75^\circ$  utilizando apenas os arcos notáveis. Por exemplo:

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

Procedemos desta forma porque conhecemos o seno desses arcos. Então:  $\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (45^\circ + 30^\circ)$

Aplicamos a fórmula do seno da soma de dois arcos:

$$\text{sen } (45^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$\text{sen } (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Aplicamos a definição de cossecante:

$$\text{cossec } 75^\circ = \frac{1}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{cossec } 75^\circ = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$\text{cossec } 75^\circ = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \Rightarrow \boxed{\text{cossec } 75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

## 2. Determinar $\cotg 15^\circ$ .

*Resolução:* Utilizando os ângulos notáveis, podemos escrever  $15^\circ$  como a diferença entre  $45^\circ$  e  $30^\circ$ :  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$$\text{Portanto: } \text{tg } 15^\circ = \text{tg } (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 30^\circ}{1 + \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}} = \text{tg } 15^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\cotg 15^\circ = \frac{1}{\text{tg } 15^\circ} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3}$$

$$\cotg 15^\circ = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{6} = \boxed{\cotg 15^\circ = 2 + \sqrt{3}}$$

## 3. (UFPI) Considere as expressões $A = \cos a + \text{sen } b$ e

$B = \cos b + \text{sen } a$ . Sendo  $a + b = 150^\circ$ , o valor de  $A^2 + B^2$  é:

- a) -1   b) 1   c) 2   d) 3   e) 4

*Resolução:* Inicialmente, calculamos os quadrados de A e B e efetuamos a soma pedida:

$$A^2 = (\cos a + \sin b)^2 = \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \sin b + \sin^2 b$$

$$B^2 = (\cos b + \sin a)^2 = \cos^2 b + 2 \cos b \cdot \sin a + \sin^2 a$$

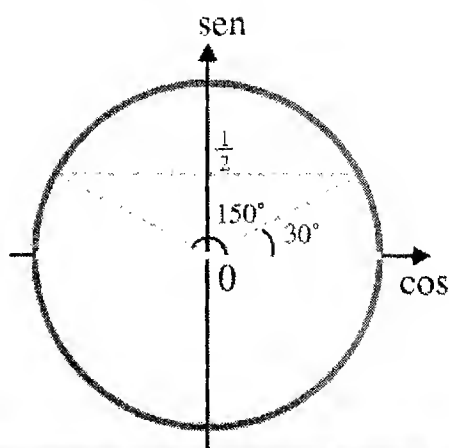
$$A^2 + B^2 = \sin^2 a + \cos^2 a + \sin^2 b + \cos^2 b +$$

$$+ 2 (\cos a \cdot \sin b + \cos b \cdot \sin a)$$

Pela relação fundamental  $\begin{cases} \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \\ \sin^2 b + \cos^2 b = 1 \end{cases}$

Vimos que  $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ ,  
portanto:  $A^2 + B^2 = 1 + 1 + 2 \cdot \sin(a + b)$

Como  $a + b = 150^\circ$ , temos  $A^2 + B^2 = 2 + 2 \cdot \sin 150^\circ$



No ciclo trigonométrico, note que  $150^\circ$  é simétrico a  $30^\circ$ , então:

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Portanto: } A^2 + B^2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 1$$

$$A^2 + B^2 = 3$$

**Alternativa correta: D**

### ⇒ Exercícios propostos:

**66.** Calcular seno, cosseno e tangente de  $15^\circ$

**67.** Calcular secante e cossecante de  $105^\circ$ .

**68.** Dado  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  determine:

a)  $\sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$       b)  $\cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$       c)  $\operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

**69.** Sabendo que  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  determine o valor de A, sendo:  
 $A = (\sin \alpha + \cos \beta)^2 + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \alpha$

**70.** (Mack-SP) A expressão  $\sin(135^\circ + x) + \sin(135^\circ - x)$  é igual a:

a)  $\sqrt{2} \sin x$     b)  $\sqrt{3} \cos x$     c)  $-1$     d)  $\sqrt{2} \cos x$     e)  $-\sqrt{2} \sin x$

**71.** (Cesgranrio-RJ) Se  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , então o valor de

$\sin(25\pi + \alpha) - \sin(88\pi - \alpha)$  é: a) 0    b)  $-\frac{1}{3}$     c)  $\frac{1}{3}$     d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     e)  $\frac{2}{3}$

**b) Arco duplo:** Vamos deduzir as fórmulas para seno, cosseno e tangente de arcos duplos.

Considere um arco  $a$ : podemos escrever que  $2a = a + a$ . Aplicando a fórmula da soma de dois arcos ao arco duplo  $2a$ , temos:

$$\sin 2a = \sin (a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a$$

$$\boxed{\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a}$$

Da mesma forma, podemos calcular o cosseno do arco duplo:

$$\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Analogamente, calculamos a tangente do arco duplo:

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg} (a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dado  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , determine:

$\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $\sec 2\alpha$  e  $\operatorname{cosec} 2\alpha$ .

**Resolução:** Para determinar as relações pedidas, precisamos dos valores de  $\cos \alpha$  e  $\operatorname{tg} \alpha$ . Podemos obter o  $\cos \alpha$  através da relação fundamental:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

Como  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , a extremidade do arco  $\alpha$  está no terceiro quadrante, o cosseno de  $\alpha$  é negativo:  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

$$\text{A tangente será: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

Podemos calcular o  $\sin 2\alpha$  aplicando a fórmula:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = \frac{24}{25}}$$

Aplicamos, também, a fórmula para calcular  $\cos 2\alpha$ :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}}$$

Faremos o mesmo para  $\operatorname{tg} 2\alpha$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}}$$

Aplicamos as definições de secante e cossecante:

$$\sec 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{-\frac{7}{25}} \Rightarrow \boxed{\sec 2\alpha = -\frac{25}{7}}$$

$$\operatorname{cossec} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1}{\frac{24}{25}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{cossec} 2\alpha = \frac{25}{24}}$$

2. (UFES) A soma de todos os valores distintos de  $\alpha$ ,

$0 < \alpha < 2\pi$  que satisfazem à equação  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$ , é:

- a)  $\frac{7\pi}{2}$    b)  $\frac{2\pi}{3}$    c)  $\frac{5\pi}{3}$    d)  $\frac{5\pi}{2}$    e)  $2\pi$

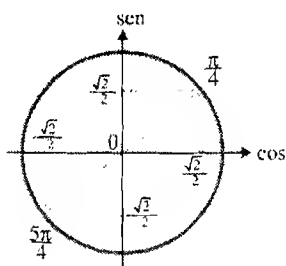
**Resolução:** Sabemos que  $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$ ; conforme o enunciado do problema:  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$ . Temos

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cdot (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

Se o produto é nulo, temos duas possibilidades:

$$2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0 \text{ ou } \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha$$



Observe no ciclo que, para  $\operatorname{sen} \alpha = 0$  e  $0 < \alpha < 2\pi$ , temos que  $\alpha = \pi$  rad.

Para encontrar as soluções de  $\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha$  devemos lembrar da tabela

$$\text{trigonométrica: } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do mesmo modo, no terceiro quadrante, temos:

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, os valores que  $\alpha$  pode assumir são:  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{5\pi}{4}$

$$\text{A soma desses valores é: } \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

**Alternativa correta: D**

## ⇒ Exercícios propostos:

72. Dado  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , calcule  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  e  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

73. Dado  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ , calcule  $\sec 2\alpha$ .

74. Dado  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , calcule  $\cotg 2\alpha$ .

75. Dado  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , calcule  $\sec 2\alpha$  e  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

76. (UFAM) Sendo  $\cotg 2\alpha = -\frac{3}{4}$ , então  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$  medem, respectivamente:

a)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  e  $\frac{1}{\sqrt{5}}$    b)  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{\sqrt{3}}{2}$    c)  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  e  $\frac{1}{\sqrt{10}}$    d)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  e  $\frac{\sqrt{15}}{5}$

77. (UFMT) Sabendo que  $\cos \alpha = x$  e que  $\alpha$  é um arco do primeiro quadrante, então  $\cos 2\alpha$  e  $\sin 2\alpha$  são iguais, respectivamente, a:

a)  $2x^2 - 1$  e  $2x\sqrt{1-x^2}$    d)  $2x\sqrt{1+x^2}$  e  $2x^2 - 1$   
 b)  $x^2 + 1$  e  $x\sqrt{1-x^2}$    e)  $x^2$  e  $4x\sqrt{1-x^2}$   
 c)  $2x\sqrt{1-x^2}$  e  $x^2$

**c) Arco metade:** Vamos deduzir fórmulas para calcular o seno, cosseno e tangente da metade de um arco, ou seja,  $\frac{\alpha}{2}$ .

Vimos que, para o arco duplo podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Se dividirmos o arco por 2, teremos:  $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

Utilizando a relação fundamental:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

Vamos substituir o valor encontrado na relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1 + \cos \alpha}{2} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 - 1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

Para deduzir a tangente, basta aplicar a definição:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dado  $\cos x = -\frac{4}{5}$ ,  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , determine

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sec \frac{x}{2}, \operatorname{cotg} \frac{x}{2}.$$

**Resolução:** Inicialmente, precisamos determinar em que quadrante está a extremidade do arco  $\frac{x}{2}$ , a fim de saber os sinais do seno e do cosseno. Para isso, partimos da restrição ao arco  $x$ :  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$$\text{Dividindo por 2: } \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

Como  $\frac{x}{2}$  está no segundo quadrante, sabemos que o seno é positivo, o cosseno e a tangente são negativos. Aplicamos as fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 + 4}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}} \end{aligned}$$

Para o cosseno e a tangente temos:

$$\begin{aligned}\cos \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \\ &= -\sqrt{\frac{5-4}{5}} = -\sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1-\frac{4}{5}}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}} = -\sqrt{9}\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -3}$$

Para secante e cotangente, aplicamos as definições:

$$\sec \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10} \Rightarrow \sec \frac{x}{2} = -\sqrt{10}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{-3}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

78. Calcular  $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ ,  $\cos \frac{x}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  dado  $\cos x = \frac{5}{6}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

79. Calcular  $\sec \frac{x}{2}$  e  $\operatorname{cosec} \frac{x}{2}$  dado  $\cos x = \frac{1}{5}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

80. Calcular  $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ ,  $\sec \frac{x}{2}$ ,  $\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ , dado  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ,  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .



**81.** Provar que: 
$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{4}$$

**82.** (Fuvest-SP) Se  $\cos \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$ , então  $\cos x$  vale:

a)  $-\frac{3}{8}$    b)  $\frac{3}{8}$    c)  $\frac{\sqrt{14}}{4}$    d)  $\frac{1}{8}$    e)  $\frac{\sqrt{34}}{4}$

**d) Transformação em produto:** As fórmulas seguintes auxiliam na transformação de somas ou diferenças em produtos. Vamos deduzi-las.

Desenvolvendo  $\sin(\alpha + \beta)$  e  $\sin(\alpha - \beta)$  temos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Vamos efetuar a soma:  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ .

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \\ &+ \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

Façamos as seguintes substituições:

$$\alpha + \beta = p \text{ (I) e } \alpha - \beta = q \text{ (II)}$$

Somando as equações anteriores, temos:

$$\alpha + \beta + \alpha - \beta = p + q \Rightarrow 2\alpha = p + q \Rightarrow \alpha = \frac{p + q}{2}$$

$$\text{Substituindo } \alpha \text{ na equação (I) obtemos } \beta = \frac{p - q}{2}.$$

Substituindo em  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$ , teremos:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$$

Procedemos de modo análogo às expressões:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \text{ e}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

Obtendo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

E ainda, aplicando a definição de tangente:

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Transforme em produto:  $\operatorname{sen} 5m - \operatorname{sen} m$ .

*Resolução:* Aplicamos a fórmula

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}, \text{ em que } p = 5m \text{ e } q = m$$

$$\operatorname{sen} 5m - \operatorname{sen} m = 2 \cos \frac{5m+m}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{5m-m}{2}$$

$$\operatorname{sen} 5m - \operatorname{sen} m = 2 \cos \frac{6m}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{4m}{2}$$

$$\operatorname{sen} 5m - \operatorname{sen} m = \boxed{2 \cos 3m \cdot \operatorname{sen} 2m}$$

2. Transforme em produto:  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ .

*Resolução:* Basta aplicar a fórmula:

$$\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \left( -\frac{3\pi}{10} \right)$$

3. Transformar  $\operatorname{sen} 75^\circ \cdot \operatorname{sen} 35^\circ$  em soma ou diferença.

*Resolução:* Observe que na relação seguinte temos o produto de senos de arcos diferentes:

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

$$\text{Portanto: } \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} = \frac{\cos p - \cos q}{-2}$$

Podemos transformar  $\operatorname{sen} 75^\circ \cdot \operatorname{sen} 35^\circ$  em diferença, fazendo:

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = 75^\circ \\ \frac{p-q}{2} = 35^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+q = 150^\circ \\ p-q = 70^\circ \\ 2p = 220^\circ \\ p = 110^\circ \end{cases}$$

Como  $p + q = 150^\circ$  e  $p = 110^\circ$  temos que  $q = 40^\circ$ .  
Portanto, substituindo os valores de  $p$  e  $q$  na fórmula, temos:

$$\sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} = \frac{\cos p - \cos q}{-2}$$

$$\sin 75^\circ \cdot \sin 35^\circ = \frac{\cos 110^\circ - \cos 40^\circ}{-2} = -\frac{(\cos 110^\circ - \cos 40^\circ)}{2}$$

$$\boxed{\sin 75^\circ \cdot \sin 35^\circ = \frac{\cos 40^\circ - \cos 110^\circ}{2}}$$

4. Resolva  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

*Resolução:* Escolhemos, convenientemente, duas parcelas para

transformar em produto:  $\sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}$

$$\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cdot \cos x$$

Portanto,  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  equivale a:

$$\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0$$

$$\underbrace{\sin 3x + \sin x}_{2 \sin 2x \cdot \cos x} + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x \cdot (2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\text{ou } 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

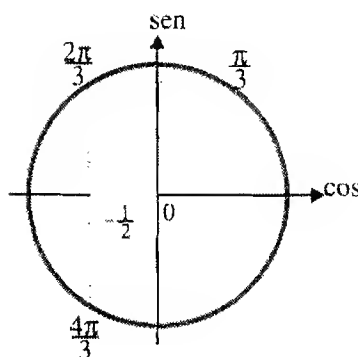
Como  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ , temos que  
determinar  $x$  tal que:  $2 \sin x \cdot \cos x = 0$ .

Se o produto é zero, então:  $\sin x = 0$  ou  $\cos x = 0$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

Observe que todos os valores estão entre 0 e  $2\pi$ ,  
conforme o enunciado.



Para resolver  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , vamos analisar

o ciclo trigonométrico.

Sabendo que  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , e que os arcos procurados estão no segundo e terceiro quadrantes, temos:

$$2^{\text{o}} \text{ quadrante: } x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$3^{\text{o}} \text{ quadrante: } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

83. Transforme em produto:

a)  $\cos 4m + \cos m$

d)  $\sin 7k + \sin 2k$

b)  $\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7}$

e)  $\cos 5x - \sin 2x$

c)  $\sin \frac{5\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}$

84. Transforme em adição ou subtração os produtos:

a)  $\sin 85^\circ \cdot \sin 15^\circ$

b)  $\cos 135^\circ \cdot \cos 35^\circ$

c)  $\sin 65^\circ \cdot \cos 15^\circ$

85. Resolva as equações, com  $0 \leq x \leq 2\pi$ :

a)  $\sin 5x + \sin 3x = 0$

b)  $\cos 4x - \cos x = 0$

c)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

86. (Mack-SP) Simplificando-se:  $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$ , tem-se:

a) zero   b)  $\sin 20^\circ$    c)  $\frac{1}{2}$    d)  $\frac{1}{2}$    e) n. r. a.

## 12. Funções trigonométricas

**a) Período:** Dizemos que o período de uma semana é 7 dias, de um mês é 30 dias e de um ano é 365 dias. Neste caso, podemos dizer que o período é o tempo necessário (em dias) para que um ciclo se complete. Aplicamos o mesmo conceito para as funções trigonométricas, pois os arcos são infinitos, porém os valores de seno e cosseno se repetem após uma volta completa sobre o ciclo trigonométrico.

Uma função é periódica se existe um número  $k > 0$  tal que:  
 $f(x + k) = f(x)$

**b) Função seno:** A função seno é a função que associa a cada número real  $x$  o seno de  $x$ :  $f(x) = \sin x$

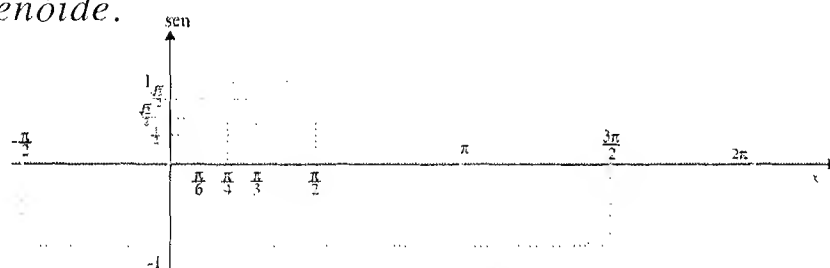
Como  $x$  é um número real, dizemos que o domínio da função é  $\mathbb{R}$ . Os valores de  $\sin x$  estão entre  $-1$  e  $1$ . Neste caso, a imagem da função é o intervalo  $[-1, 1]$ .

Todos os valores do seno se repetem após uma volta completa, então *o período da função seno é  $2\pi$* .

Para fazer o gráfico, tabelamos alguns valores do seno de arcos entre 0 e  $2\pi$ .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

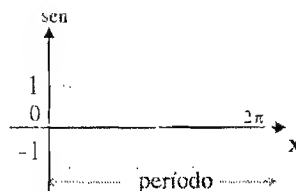
A partir da tabela, construímos o gráfico. A curva obtida é chamada de *senóide*.



período  $2\pi$

$D = \mathbb{R}$

$\text{Im} = [-1, 1]$



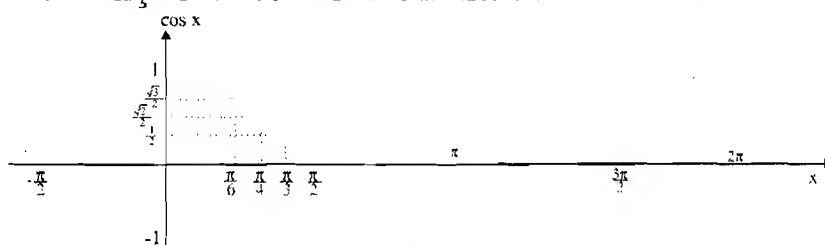
**c) Função cosseno:** É toda função que associa um número real  $x$  ao  $\cos x$ :  $f(x) = \cos x$

O domínio da função é  $\mathbb{R}$ , e o conjunto imagem é o intervalo  $[-1, 1]$ . Assim como na função seno, *o período da função cosseno é  $2\pi$* .

Tabelando valores de cossenos de arcos entre 0 e  $2\pi$  temos:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
f(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

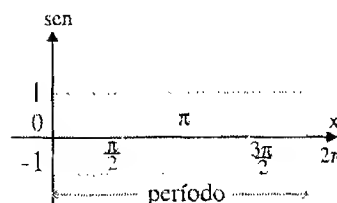
O gráfico da função cosseno é chamado de *cossenóide*.



período  $2\pi$

$D = \mathbb{R}$

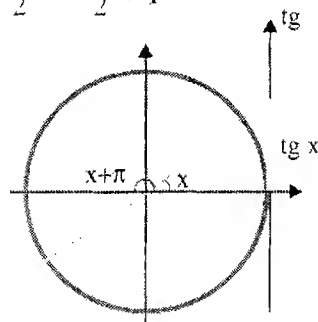
$\text{Im} = [-1, 1]$



**d) Função tangente:** É toda função que associa um número real  $x$  a  $\operatorname{tg} x$ :  $f(x) = \operatorname{tg} x$

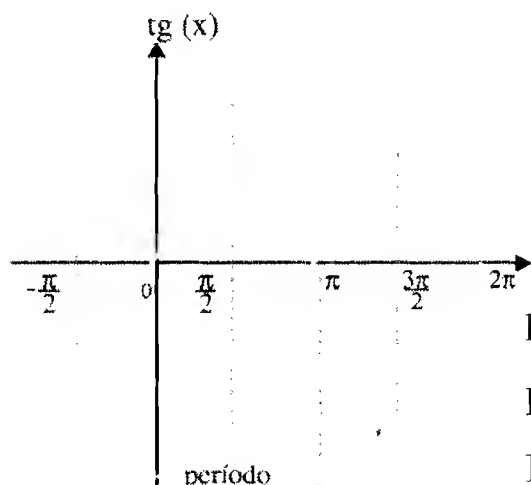
Devemos lembrar que a função tangente não está definida para arcos que têm como arcos côngruos  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ , portanto esses devem ser excluídos do domínio da função.

Na função tangente, note que os valores se repetem a cada  $\pi$  rad, então o período da função tangente é  $\pi$ .



Tabelando valores da tangente, temos:

A curva que representa a função é chamada de *tangentóide*.



período  $\pi$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\operatorname{Im} = \mathbb{R}$$

$x$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-1$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi$	$0$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$1$
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

período  $\pi$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e } \operatorname{Im} = \mathbb{R}$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Determinar o período das funções:

a)  $f(x) = 2 + \cos x$

**Resolução:** Como o período de  $\cos x$  é  $2\pi$ , então o período de  $2 + \cos x$  também é  $2\pi$ .

b)  $f(x) = \sin 3x$

**Resolução:** Como a função  $\sin x$  tem período  $2\pi$ , então a função  $\sin 3x$  tem período  $\frac{2\pi}{3}$ . De forma geral, para qualquer função  $\sin(mx)$  ou  $\cos(mx)$  o período é  $\frac{2\pi}{|m|}$ .

$$c) f(x) = \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right).$$

**Resolução:** Assim como a função seno, o período de  $\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$  é  $2\pi$ . O ciclo estará completo se  $x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3}$

### ⇒ Exercícios complementares

**87.** Determinar o período das funções:

- a)  $f(x) = 3 + \sin x$  e)  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$   
 b)  $f(x) = 1 + \cos x$  f)  $f(x) = \cos \frac{x}{3}$   
 c)  $f(x) = \sin 5x$  g)  $f(x) = \sin (x + \pi)$   
 d)  $f(x) = \cos 4x$

**88.** (UFRN) Num triângulo retângulo os catetos medem 30 cm e 40 cm. Se  $\beta$  é o menor ângulo interno desse triângulo, então:

- a)  $\operatorname{tg} \beta = 1,333\dots$  d)  $\operatorname{sen} \beta = 0,6$   
 b)  $\operatorname{sen} \beta = 0,8$  e)  $\operatorname{cos} \beta = 0,75$   
 c)  $\operatorname{tg} \beta = 1,25$

**89.** (UFRR) O comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é de 5 cm. Sabe-se que um dos catetos é 1 cm maior que o outro. Qual a medida do menor cateto?

**90.** (UFSE) Se os raios solares formam um ângulo  $\alpha$  com o solo, qual é, aproximadamente, o comprimento da sombra de um edifício com 10 m de altura?

Dado:  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$

- a) 16,6 m c) 14,4 m e) 12,2 m  
 b) 15,5 m d) 13,3 m

**91.** (UFPA) Se  $\alpha$  é o ângulo oposto ao menor lado de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 m e a soma dos catetos é 17 m, o valor de  $\operatorname{cos} \alpha$  é:

- a)  $\frac{15}{13}$  b)  $\frac{17}{13}$  c)  $\frac{12}{13}$  d)  $\frac{5}{13}$  e)  $\frac{1}{13}$

**92.** (UFMS) Um observador vê um prédio mediante um ângulo visual  $\alpha$ . Afastando-se do prédio a uma distância de 7 metros, o observador vê o prédio mediante um ângulo visual  $\beta$ . Sabendo-se que  $\alpha = 45^\circ$  e  $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{6}$ , determine em metros a altura do prédio.

**93.** (UFMG) A hipotenusa e a área de um triângulo retângulo medem, respectivamente,  $4\sqrt{5}$  cm e  $16 \text{ cm}^2$ . A diferença das medidas dos catetos, em cm, é:

- a) 4 b)  $3\sqrt{5}$  c) 3 d)  $2\sqrt{5}$  e) 2

**94.** (Cesgranrio-RJ) Um ciclista de prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 m. O número mais próximo de voltas que ele deve dar é:

- a) 100 b) 200 c) 300 d) 400 e) 500

**95.** (Fuvest-SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 rad?

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

**96.** (Fuvest-SP) Dentre os números abaixo, o mais próximo de  $\operatorname{sen} 50^\circ$  é:

- a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6 d) 0,8 e) 1,0

**97.** (UFSC) O maior valor numérico que  $y$  pode assumir quando  $y = \frac{37 - 2\sin x}{3}$  é:

**98.** (UFPI) Simplificando a expressão  $(\sin 600^\circ - \tan 120^\circ)^2$ , temos:

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$    b)  $\frac{3}{4}$    c)  $\frac{27}{4}$   
d)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$    e)  $\frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}$

**99.** (UFSC) Considere o ângulo  $x = 1215^\circ$ . Determine  $|\tan x|$ .

**100.** (Santa Casa-SP) Seja a função  $f$ , definida por  
 $f(x) = \sin x + \cos x + \cotg x + \operatorname{cosec} x - \tan x - \sec x$ ,  
 $\forall x \neq \frac{k\pi}{2}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .

O valor de  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  é:

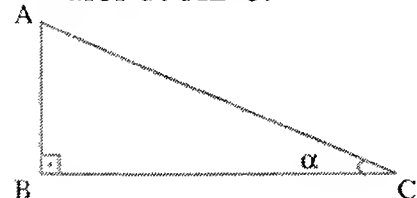
- a)  $\frac{\sqrt{3} + 3}{2}$    c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$    e)  $\sqrt{3} - 3$   
b)  $\frac{\sqrt{3} - 3}{2}$    d)  $\sqrt{3} + 1$

**101.** (UFRN) Para qualquer ângulo  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , tem-se:

- a)  $\cos \alpha > \sin \alpha^2$   
b)  $\tan \alpha > \sin \alpha$   
c)  $\tan \alpha > \cos \alpha$   
d)  $\sin \alpha > \cos \alpha$   
e)  $\tan \alpha > 1$  se  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

**102.** (UFRS) No triângulo retângulo da figura,  $BC = 10$  e  $\cos(\alpha) = 0,8$ .

O valor de  $AB$  é:



- a) 8   b) 6   c) 5   d) 4   e) 2

**103.** (Esan-SP) Para que valores de  $m$  a equação  $\cos x = \frac{m}{4} + 1$  é possível?

- a)  $m \in \mathbb{R} \mid -8 \leq m \leq 0$   
b)  $m \in \mathbb{R} \mid 0 < m \leq 4$   
c)  $m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq m < 8$   
d)  $m \in \mathbb{R} \mid -1 \leq m \leq 1$   
e)  $m \in \mathbb{R} \mid -1 < m < 1$

**104.** (UFPI) Sabe-se que

$$\sin x = s \neq 0 \text{ e } \cos x = c \neq 0.$$

Logo  $\tan x + \cotg x$  é igual a:

- a)  $\frac{s + c}{s \cdot c}$    c)  $\frac{s \cdot c}{s + c}$    e)  $\frac{1}{sc}$   
b)  $\frac{s \cdot c}{s^2 + c^2}$    d)  $\frac{1}{s^2 + c^2}$

**105.** (Fuvest-SP) O valor de

$$(\tan 10^\circ + \cotg 10^\circ) \cdot \sin 20^\circ$$
 é:

- a)  $\frac{1}{2}$    b) 1   c) 2   d)  $\frac{5}{2}$    e) 4

**106.** (UFMS) Se  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ , calcule o valor da expressão:

$$18 \cdot \left( \frac{1 - \sec^2 x}{\cos^2 x - \sin x} \right)^2$$

**107.** (Fuvest-SP) No intervalo

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \text{ a equação}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x = -\sqrt{2} :$$

- a) não admite solução  
b) admite como solução  $x = \frac{3\pi}{4}$ .  
c) admite como solução  $x = \frac{2\pi}{3}$ .  
d) admite como solução  $x = \frac{5\pi}{6}$ .  
e) admite como solução  $x = \pi$ .



**108.** (UFSE) O valor de  $\sin 75^\circ$  é:

- a)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  c)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$  e)  $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$   
b)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$  d)  $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

**109.** (Fatec-SP) Se  $t$  é um número real, tal que  $2 \cos^2 t - \sin t - 1 = 0$ , então  $t$  é da forma:

- a)  $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
b)  $\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
c)  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
d)  $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$   
e)  $\frac{2}{3}k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

**110.** (UFSE) A medida de um ângulo  $\alpha$ , em graus, é o dobro da medida do seu suplemento. O valor de  $\cos \alpha$  é:

- a) 1 b)  $\frac{1}{2}$  c) 0 d)  $-\frac{1}{2}$  e)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**111.** (UFPB) Determinar o número de soluções da equação  $\sin x \cdot \cos x = 0, x \in [0, 4\pi]$ .

**112.** (UFCE) Se  $S$  é a soma das raízes da equação  $\sin 2x + \sin x = 0$ , onde  $0 \leq x < 2\pi$ , então  $\frac{5S}{\pi}$  é igual a:

- a) 12 b) 14 c) 15 d) 18 e) 20

**113.** (Vunesp-SP) Se  $\sin x = \frac{4}{5}$ ,

então  $\cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$  é igual a:

- a)  $-\frac{3}{5}$  b)  $\frac{3}{5}$  c)  $\frac{4}{5}$  d)  $-\frac{4}{5}$  e)  $\frac{5}{3}$

**114.** (Cesgranrio-RJ) Se  $x$  é um ângulo agudo,  $\tan (90^\circ + x)$  é igual a:

- a)  $\tan x$  c)  $-\tan x$  e)  $1 + \tan x$   
b)  $\cotg x$  d)  $-\cotg x$

**115.** (Mack-SP) Se  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

então  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2 - 1}$

é sempre igual a:

- a)  $\cotg 2x$  c)  $\tan x$  e) 1  
b)  $\cotg x$  d)  $\tan 2x$

**116.** (UFPR) Sabendo que

$$\tan x + \cotg x = \frac{7}{2},$$

calcule  $\sin (2x)$ .

**117.** (UFPB) Simplificando-se a

expressão  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ , para

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ , obtém-se:

- a)  $\sin x$  b) 2 c) 0 d) 1 e)  $\cos x$

**118.** (Mack-SP) O valor de  $\cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$  é:

- a)  $\frac{1}{2}$  b) 1 c)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  d)  $\frac{1}{4}$  e)  $\sqrt{3}$

**119.** (UFPI) Se  $\tan x = 2$ , então

$\tan \left( \frac{x}{2} \right)$  é igual a:

- a) 1 c)  $-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  e) 4  
b)  $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$  d)  $\frac{3}{2}$

**120.** (PUC-RJ) Os ângulos  $a$  e  $b$  são tais que  $\tan a = \frac{1}{3}$  e  $\tan b = \frac{1}{2}$ . O ângulo  $a + b$  é igual a:

- a)  $\arctg \frac{5}{6}$  b)  $30^\circ$  c)  $45^\circ$  d)  $60^\circ$   
e)  $90^\circ$

# Capítulo IX

## SEQÜÊNCIAS E PROGRESSÕES

**1. Introdução** O estudo de seqüências lógicas despertou o interesse de vários pesquisadores. Fibonacci, entretanto, foi o primeiro a propor os primeiros problemas sobre seqüências, através da observação de fenômenos naturais. Seu problema mais famoso é:

“Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais serão ao final de um ano?”

Ao final do ano, teremos 376 casais. A maneira mais simples de demonstração é:

$$\begin{array}{rcl} 1 + 1 & = & 2 \\ 1 + 2 & = & 3 \\ 2 + 3 & = & 5 \\ 3 + 5 & = & 8 \\ \vdots & & \vdots \\ 55 + 89 & = & 144 \end{array}$$

**2. Lei de formação** Existem diversas seqüências na natureza (a ordem das cores do arco-íris, por exemplo), mas as que nos interessarão serão apenas as numéricas.

De forma geral, temos: *seqüências finitas*  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , como os números naturais ímpares menores que 20 (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19) ou os múltiplos positivos de 4 menores que 24 (0, 4, 8, 12, 16, 20); e *seqüências infinitas*  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , como os números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...), os números inteiros ( $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ), ou os números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, ...).

Utilizamos uma letra com índice numérico para localizar um elemento da seqüência. Por exemplo:

$a_1$  = primeiro termo da seqüência (que também pode aparecer como  $a_0$ );  
 $a_2$  = segundo termo da seqüência;  $a_3$  = terceiro termo da seqüência;  
 (...)  $a_n$  = n-ésimo termo da seqüência.

Observe a seqüência de números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...). É possível determinar o próximo elemento somando 2 ao último termo; dizemos então que existe uma lei de formação (fórmula) dada por  $a_n = 2n + 1$ .

Na seqüência de números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, ...) não é possível determinar uma lei de formação.

### Exercícios resolvidos:

1. Determine as seqüências dadas pelas fórmulas (observe sempre a condição de existência):

a) 
$$\begin{cases} a_1 = 1 & n \geq 2 \\ a_n = a_{n-1}^2 + 1 \end{cases}$$
 *Resolução:* Como foi dado o primeiro termo, substituiremos  $n = 2$  na fórmula para determinar o segundo termo:  $a_2 = a_{2-1}^2 + 1 = (1)^2 + 1 = 2$

Procedemos do mesmo modo para determinar os outros termos, atribuindo a  $n$  valores ordenados maiores que 2:

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_{3-1}^2 + 1 = a_2^2 + 1 = (2)^2 + 1 = 5$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_{4-1}^2 + 1 = a_3^2 + 1 = (5)^2 + 1 = 26$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_{5-1}^2 + 1 = a_4^2 + 1 = (26)^2 + 1 = 677$$

A seqüência infinita procurada é:  $(1, 2, 5, 26, 677, \dots)$

b) 
$$\begin{cases} a_0 = 1 & n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$
 *Resolução:* Atribuímos a  $n$  valores ordenados maiores e igual a zero:

$$n = 0 \Rightarrow a_{0+1} = a_0 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = a_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{5}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = a_2 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{6}{3} = 2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = a_3 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_4 = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a_4 = \frac{7}{3}$$

A seqüência é:  $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \dots\right)$

### Exercícios propostos:

1. Determinar as seguintes seqüências dadas pelas fórmulas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases} \\ n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 & n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 & n \in \mathbb{N} \\ \\ \text{d)} \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = (a_{n-1})^n \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1} \end{cases} & \\ n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 & n \in \mathbb{N}^* & \end{array}$$

**3. Progressões aritméticas - P.A.** Observe as seguintes seqüências: A: (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...), B: (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, ...) e C: (0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100).

Em A, para se obter um elemento, basta somar 3 ao anterior; em B, para se obter um elemento, basta somar 5 ao anterior; e, em C, para se obter um elemento, basta somar 10 ao anterior.

Toda seqüência em que, a partir de um termo conhecido, *soma-se uma constante* para obter o seguinte, é chamada de *progressão aritmética* ou P.A. A constante que é somada a cada elemento é chamada de *razão* da P.A. e simbolizada pela letra  $r$ .

Genericamente, temos:  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  é P.A.  
 $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2 \Rightarrow r = a_n - a_{n-1}$

Da mesma forma, podemos determinar, a partir da definição:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Portanto: Em toda P.A. cada termo é a *média aritmética* do antecessor e do sucessor.

### Exercícios resolvidos:

1. Verificar se as seqüências abaixo são progressões aritméticas.

a) (4, 8, 12, 16) *Resolução:* Note que  $8 - 4 = 4 \Rightarrow 12 - 8 = 4$   
 $16 - 12 = 4.$

Como a diferença entre um elemento e seu antecessor é sempre 4, a seqüência é uma P.A. de razão  $r = 4$ .

b)  $\left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$  Resolução: Note que  $\frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$   
 $2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$   
 A seqüência é P.A. onde  $r = \frac{1}{2}$ .

c)  $(1, 3, 6, 10, 15)$  Resolução: Note que  $3 - 1 = 2 \Rightarrow 6 - 3 = 3$

Como a diferença entre termos sucessivos não é constante, a seqüência não é P.A.

**a) Classificação da P.A.:** Uma P.A. de razão  $r$  pode ser:

*crescente*  $\rightarrow$  se a razão é um número positivo:

$(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$  é P.A. crescente em que  $r = 2$

$(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$  é P.A. crescente em que  $r = 1$

$(-15, -10, -5, 0)$  é P.A. crescente em que  $r = 5$

*decrecente*  $\rightarrow$  se a razão é um número negativo:

$(9, 6, 3, 0, -3)$  é P.A. decrecente em que  $r = -3$

$(4, 2, 0, -2, -4, \dots)$  é P.A. decrecente em que  $r = -2$

$(-5, -10, -15, -20)$  é P.A. decrecente em que  $r = -5$

*constante*  $\rightarrow$  se a razão é zero:

$(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$  é P.A. constante

$(5, 5, 5, 5, 5)$  é P.A. constante

$(-3, -3, -3, -3, \dots)$  é P.A. constante

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular a razão da P.A. dada pela fórmula:

$a_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}^*$  Resolução: Inicialmente, atribuímos valores a  $n$ , a partir de 1, para determinar os primeiros termos da P.A.:  
 $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3; n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5; n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7; n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

P.A.:  $(3, 5, 7, 9, \dots)$  em que  $r = 2$

2. Determinar a razão e classificar a P.A.  $(x + 1, x - 3, 2x)$

Resolução: Para determinar o valor de  $x$  podemos aplicar a definição de razão, utilizando a igualdade  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ , ou utilizar a propriedade da média aritmética, que é consequência dessa definição: o segundo termo é a média aritmética do primeiro e terceiro termos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow x - 3 = \frac{x + 1 + 2x}{2} \Rightarrow 2x - 6 = 3x + 1$$

$$2x - 3x = 1 + 6 \Rightarrow -x = 7 \Rightarrow x = -7$$

Substituindo  $x$  nos elementos da P.A.:  $a_1 = x + 1 = -7 + 1 = -6$ ;  
 $a_2 = x - 3 = -7 - 3 = -10$ ;  $a_3 = 2x = 2 \cdot (-7) = -14$ .

A P.A. procurada é  $(-6, -10, -14)$ .

Obtida a seqüência, podemos determinar a razão:  $r = a_2 - a_1$

$$r = -10 - (-6) \Rightarrow r = -10 + 6 \Rightarrow r = -4$$

Como  $r$  é negativo, a P.A. é decrescente.

3. Três números estão em P.A., somam  $-3$  e têm produto 3. Determine a P.A. sabendo que é crescente.

**Resolução:** Se três números estão em P.A., sabemos que, a partir do segundo, se subtrairmos a razão obteremos o primeiro, se ao segundo somarmos a razão obteremos o terceiro. Chamamos de  $x$  ao segundo termo da P.A. genérica de razão  $r$ , então:

primeiro termo  $\rightarrow x - r$ ; segundo termo  $\rightarrow x$ ; terceiro termo  $\rightarrow x + r$

A P.A. procurada é  $(x - r, x, x + r)$

Sendo a soma dos termos  $-3$ , então:

$$x - r + x + x + r = -3 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

Substituímos o valor de  $x$  na P.A.:  $(-1 - r, -1, -1 + r)$ . Sendo o produto 3, temos:  $(-1 - r) \cdot (-1) \cdot (-1 + r) = 3 \Rightarrow (-1 - r) \cdot (1 - r) = 3$

$$-1 + r - r + r^2 = 3 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

Se a P.A. procurada é crescente, então  $r = 2$ , e a P.A. é  $(-3, -1, 1)$ .

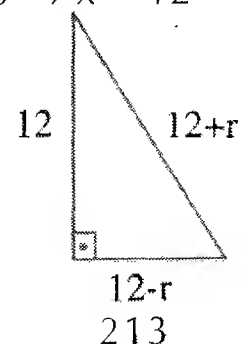
4. (UFMG) Em um triângulo retângulo, de perímetro 36, os lados estão em progressão aritmética. Determine a razão da progressão aritmética e os lados do triângulo:

**Resolução:** Lembrando que o perímetro é a soma dos lados de um polígono, temos que a soma dos lados do triângulo é 36, se os lados estão em P.A., genericamente podemos representá-los por:  $(x - r, x, x + r)$ , então:  $x - r + x + x + r = 36 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$

Substituindo o valor encontrado a P.A. será:

$(12 - r, 12, 12 + r)$

Sendo o triângulo retângulo, sabemos que a hipotenusa é o maior lado. Como o triângulo é retângulo, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de  $r$ :



$$(12 + r)^2 = 12^2 + (12 - r)^2 \Rightarrow 144 + 24r + r^2 = 144 + 144 - 24r + r^2 \Rightarrow 48r = 144 \Rightarrow r = 3$$

Os lados do triângulo são: 9, 12 e 15

### ⇒ Exercícios propostos:

2. Determinar a razão de cada P.A., classificando em crescente, decrescente ou constante.

a)  $(-6, -2, 2, 6, 10)$

d)  $(-7, -7, -7, -7)$

b)  $(-1, -6, -11, -16)$

e)  $(6\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

c)  $\left(-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

f)  $(9, 9, 9, 9)$

3. Considerando a P.A.  $(m - 7, m, 2m + 1)$ , determine  $m$ .

4. Escreva os quatro primeiros termos da P.A., onde  $a_1 = -2$  e  $r = \frac{1}{5}$ .

5. Três números estão em P.A. Sendo 9 a soma dos três e o produto  $-21$ , determine a P.A. sabendo que é crescente.

6. Numa P.A. decrescente, os três primeiros termos somam 12 e têm produto 48. Determine a P.A.

7. (UFPI) O valor de  $x \in \mathbb{R}^*$ , tal que  $2x, 3x, x^2$  sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética, é um número

a) no intervalo  $]0, 1]$

b) racional maior que 10

c) primo

d) inteiro e múltiplo de 3

e) inteiro e divisor de 12

8. (Mack-SP) O valor de  $x$ , de modo que  $x^2, (x + 1)^2$  e  $(x + 3)^2$  formem nessa ordem uma P.A., é:

a) 3   b)  $-5$    c)  $-\frac{1}{2}$    d)  $-\frac{7}{2}$    e)  $\frac{3}{4}$

**4. Fórmula do termo geral da P.A.** Sabemos que é possível obter um termo de uma P.A.  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  de razão  $r$ , somando a razão ao termo anterior, então:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \Rightarrow \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r \Rightarrow \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r \Rightarrow \\ a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r \Rightarrow \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \end{aligned}$$

Portanto, um termo qualquer de uma P.A. pode ser obtido conhecendo o primeiro termo ( $a_1$ ) e a razão  $r$ , através da fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar o 21º termo da P.A., onde o primeiro termo é 3 e a razão é 5.

*Resolução:* Basta substituir na fórmula do termo geral, onde  $n = 21$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot r \Rightarrow a_{21} = a_1 + 20r$$

$$a_{21} = 3 + 20 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{a_{21} = 103}$$

2. Determine a razão da P.A., onde o quinto termo é  $-6$  e o primeiro é zero.

*Resolução:* Como foi dado o quinto termo, utilizamos a fórmula do termo geral substituindo  $n$  por 5, teremos assim a razão como única incógnita:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot r \Rightarrow -6 = 0 + 4r$$

$$\boxed{r = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}}$$

3. Obter o 1º termo da P.A. de razão  $\frac{1}{2}$ , onde o 10º termo é 7.

*Resolução:* Dados o valor do 10º termo da P.A. e sua razão, utilizamos a fórmula do termo geral para  $n = 10$ , determinando, assim, o primeiro termo:

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 7 = a_1 + 9 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 7 - \frac{9}{2} = \frac{14 - 9}{2} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{5}{2}}$$

4. Em uma P.A. de razão 9, sendo o primeiro termo 30 e o último 291, determine o número de elementos da P.A.

*Resolução:* Sendo  $n$  o número de elementos da P.A., podemos substituir os valores dados na fórmula do termo geral, onde o último elemento é  $a_n = 291$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 291 = 30 + (n - 1) \cdot 9 \Rightarrow 291 - 30 = 9n - 9$$

$$9n - 9 = 261 \Rightarrow 9n = 270 \Rightarrow n = 30$$

Portanto a P.A. tem 30 elementos.

5. Inserir 10 meios aritméticos entre  $-2$  e  $20$ .

*Resolução:* Meios aritméticos são números de uma P.A. que estão dentro de um intervalo estabelecido; no exercício, queremos determinar 10 números em P.A. onde o primeiro termo é  $-2$  e o último é  $20$ . Observe o esquema:  $(-2, \underbrace{\quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad}_{10 \text{ números}}, 20)$



Nesta P.A., tomamos  $a_1 = -2$  e  $a_{12} = 20$  e utilizamos a fórmula do termo geral, em que  $n = 12$ , para determinar a razão:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow 20 = -2 + 11r \Rightarrow 11r = 22 \\ r = 2$$

Determinamos a P.A. somando 2 a cada termo para obter o seguinte até o último (20): **P.A.  $(-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)$**

6. Numa P.A. crescente a soma do 5º e 8º termos é 36 e a soma do 7º e 10º termos é 40. Determinar a P.A.

**Resolução:** De acordo com os dados, temos o seguinte sistema a

ser resolvido:  $\begin{cases} a_7 + a_{10} = 40 \\ a_5 + a_8 = 36 \end{cases}$ . Somente podemos resolver o sistema se tivermos apenas duas incógnitas. Escreveremos, então, cada termo em função de  $a_1$  e  $r$ , de acordo com a fórmula do termo geral:

$$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r$$

Substituindo nas equações:

$$a_5 + a_8 = 36 \Rightarrow a_1 + 4r + a_1 + 7r = 36 \Rightarrow 2a_1 + 11r = 36$$

$$a_7 + a_{10} = 40 \Rightarrow a_1 + 6r + a_1 + 9r = 40 \Rightarrow 2a_1 + 15r = 40$$

O sistema a ser resolvido será:

$$\begin{cases} 2a_1 + 15r = 40 \\ 2a_1 + 11r = 36 \end{cases} \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 15r = 40 \\ -2a_1 - 11r = -36 \end{cases} +$$

$$4r = 4$$

$$r = 1$$

Substituímos o valor de  $r$  em uma das duas equações:

$$2a_1 + 15r = 40 \Rightarrow 2a_1 + 15 \cdot 1 = 40 \Rightarrow 2a_1 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{2}$$

A P.A. será:  $\left( \frac{25}{2}, \frac{27}{2}, \frac{29}{2}, \frac{31}{2}, \frac{33}{2}, \frac{35}{2}, \frac{37}{2}, \frac{39}{2}, \frac{41}{2}, \frac{43}{2} \right)$

Observe que:  $\begin{cases} a_5 + a_8 = \frac{33}{2} + \frac{39}{2} = \frac{72}{2} = 36 \\ a_7 + a_{10} = \frac{37}{2} + \frac{43}{2} = \frac{80}{2} = 40 \end{cases}$

7. Quantos são os múltiplos de 3 entre 10 e 1000?

**Resolução:** Toda seqüência de múltiplos de um número é uma P.A. Como queremos múltiplos de 3, a razão é  $r = 3$ . Queremos determinar o número de múltiplos de 3, então procuramos o valor de  $n$ . Para utilizar a fórmula do termo geral, precisamos do primeiro e do último termos da P.A.:

$a_1 = 1^{\text{o}}$  múltiplo de 3 maior que 10, então  $a_1 = 12$

$a_n = \text{último múltiplo de 3 menor que 1000, } a_n = 999$

Na fórmula temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 999 = 12 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n - 3 = 987$$

$$3n = 990 \Rightarrow n = 330$$

Portanto: existem 330 múltiplos de 3 entre 10 e 1000

### ⇒ Exercícios propostos:

9. Determinar o que se pede em cada P.A.

a)  $a_{15}$ , sendo  $a_1 = 3$  e  $r = \frac{1}{2}$ , b)  $a_{30}$ , sendo  $a_1 = -10$  e  $r = 7$ , c)  $a_{18}$ , sendo  $a_1 = 5$  e  $r = 4$ .

10. Obter a razão da P.A. onde o  $1^{\text{o}}$  termo é 7 e o  $9^{\text{o}}$  é 87.

11. Obter o primeiro termo da P.A. em que o  $15^{\text{o}}$  termo é 105 e a razão é 3.

12. Quantos elementos tem a P.A. finita (21, 18, 15, ..., -27)?

13. Inserir 13 meios aritméticos entre os números 5 e 47.

14. Determinar a razão da P.A. que se obtém inserindo 10 meios aritméticos entre os números -7 e 37.

15. Quantos múltiplos de 7 existem entre os números 100 e 1000?

16. Quantos múltiplos de 4 existem entre os números 50 e 500?

17. (UFSC) Os lados de um pentágono estão em P.A., onde a soma do primeiro termo com o quarto é 11, e a soma do segundo termo com o quinto é 17. Determine o perímetro desse pentágono.

18. (UFAM) Em uma progressão aritmética  $a_2 + a_4 = 14$  e  $a_3 + a_5 = 20$ . Então a razão desta P.A. é:  
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

19. (UFAC) Numa P.A. de razão 2, o termo  $a_{18}$  vale 30; então o termo  $a_9$  é igual a:

a) 18 b) -12 c) 10 d) 9 e) 12

**5. Soma dos termos de uma P.A. finita** Certo dia, um professor muito exigente manda seus alunos, que em média tinham dez anos, somar todos os números naturais de 1 a 100. Para o espanto de todos, o pequeno Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresenta rapidamente a solução. Vamos acompanhar o raciocínio desenvolvido por Gauss que, mais tarde, tornou-se em um dos matemáticos mais importantes da história.

A soma proposta pelo professor foi:  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$

Gauss observou que a soma dos termos eqüidistantes (que têm a mesma distância) dos extremos era constante, ou seja:

$$a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101$$

$$a_2 + a_{99} = 2 + 99 = 101$$

$$a_3 + a_{98} = 3 + 98 = 101$$

$$a_4 + a_{97} = 4 + 97 = 101$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{50} + a_{51} = 50 + 51 = 101$$

Tendo a seqüência 100 termos, então existem 50 somas iguais, portanto:  $S = 50 \cdot 101 = 5050$

O pequeno Gauss, intuitivamente, utilizou a fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita:

A soma dos  $n$  termos de uma P.A. é igual ao produto da média aritmética dos extremos pelo número de termos da P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Segundo o que observou Gauss, podemos extrair a seguinte propriedade:

A soma de termos eqüidistantes dos extremos de uma P.A. é igual à soma dos extremos.

#### Exercícios resolvidos:

1. Determine a soma dos 30 primeiros termos da P.A. (2, 4, 6, 8, ...)  
**Resolução:** Queremos calcular a soma de 30 termos, então,  $n = 30$ . Observando a seqüência, deduzimos que  $r = 2$  e  $a_1 = 2$ . Para utilizarmos a fórmula precisamos do 30º termo; recorremos, então, à fórmula do termo geral:

$$a_{30} = a_1 + 29 \cdot r \Rightarrow a_{30} = 2 + 29 \cdot 2 \Rightarrow a_{30} = 60$$

$$\text{Portanto: } S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = (2 + 60) \cdot 15 = 62 \cdot 15$$

$$\boxed{S_{30} = 930}$$

2. Determinar o número de termos de uma P.A. finita sendo que sua soma é 10, o primeiro termo é  $-10$  e o último é  $14$ .

*Resolução:* Substituímos os dados na fórmula da soma, determinando o valor de  $n$  que corresponde ao número de termos da P.A.:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 10 = \frac{(-10 + 14) \cdot n}{2} \Rightarrow 20 = 4n \Rightarrow n = 5$$

**A P.A. tem 5 elementos.**

3. Numa P.A., a soma de todos os termos é  $3n - 7$ . Sabe-se que a soma do primeiro e do último termos é  $5$ . Quantos termos tem a P.A.?

*Resolução:* Como a soma foi dada em função de  $n$ , podemos substituir na fórmula, sendo que  $a_1 + a_n = 5$ :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 3n - 7 = \frac{5n}{2} \Rightarrow 6n - 14 = 5n \Rightarrow n = 14$$

**A P.A. tem 14 elementos.**

4. A soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. é  $n^2 + 5$ .

**Determine a P.A.**

*Resolução:* Para determinar a P.A. temos que conhecer o primeiro termo e a razão. Foi dado que:  $S_n = n^2 + 5$ .

Se  $n = 1$ , podemos calcular o valor de  $S_1$  que, na verdade, é o primeiro termo da P.A.:  $S_1 = a_1 = (1)^2 + 5 = 6$

Para determinar a razão  $r$ , precisamos do valor do segundo termo da P.A., pois  $r = a_2 - a_1$ . A soma dos dois primeiros termos da P.A. é  $S_2 = a_1 + a_2$ . (I)

$$\text{Assim: } S_2 = 2^2 + 5 = 9$$

$$\text{Utilizando (I): } a_1 + a_2 = 9 \Rightarrow 6 + a_2 = 9 \therefore a_2 = 3$$

$$\text{Como } r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 3 - 6 \Rightarrow r = -3$$

**A P.A. é  $(6, 3, 0, -3, -6, -9, \dots)$**

5. Sabendo que a soma do 1º e do 15º termos de uma P.A. é  $32$ , qual é a soma do 3º e do 13º termos?

**Resolução:** Basta lembrar da propriedade: a soma dos termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Na verdade, não sabemos quantos elementos tem a P.A. mas, considerando os primeiros 15 elementos,  $a_3$  e  $a_{13}$  são eqüidistantes dos extremos  $a_1$  e  $a_{15}$ . Portanto:  $a_1 + a_{15} = a_3 + a_{13} = 32$

### ⇒ Exercícios propostos:

**20.** Calcular a soma dos 12 primeiros termos da P.A.  $(-7, -4, -1, \dots)$ .

**21.** Calcular a soma dos 25 primeiros termos da P.A.  $(19, 14, 9, 4, \dots)$ .

**22.** Uma P.A. finita de razão  $\frac{1}{2}$  tem como primeiro termo o número 4. Determinar a soma dos 20 primeiros termos.

**23.** Determinar o número de elementos de uma P.A. finita que tem soma 72, sendo que o primeiro termo é 18 e o último  $-9$ .

**24.** Determinar o sexto termo de uma P.A. finita, sabendo que o primeiro termo é 4 e a soma dos 6 primeiros termos é 84.

**25.** Determinar a razão de uma P.A. finita de 10 elementos que tem soma 40, sabendo que o primeiro termo é  $-4$ . (*Sugestão:* utilize a fórmula da soma para calcular o 10º termo e substitua-o na fórmula do termo geral para determinar a razão.)

**26.** (UFSC) Determine a soma dos sete termos interpolados da P.A. cujo primeiro e último termos são, respectivamente,  $-7$  e  $17$ .

**27.** (FGV-SP) A soma dos múltiplos de 7 entre 20 e 1000 é:  
a) 70 539   b) 71 400   c) 71 540   d) 76 500   e) 71 050

**28.** (UFRN) Na progressão aritmética com  $n$  termos ( $n \geq 1$ ), em que a soma dos termos é  $n^2$ , o termo geral é:

a)  $n$    b)  $2n$    c)  $2n - 1$    d)  $n^2$    e)  $n - \frac{1}{2}$

**29.** Determine o quinto termo da P.A. finita cuja soma dos  $n$  primeiros termos é  $5n - 4$ .

**30.** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. é  $2n^2 + 1$ . Determine a P.A.

**31.** (Fuvest-SP) Sabendo que a soma dos 9 primeiros termos de uma P.A. é 17 874, calcule seu 5º termo.

**32.** (PUC-SP) Um escritor escreveu, em um certo dia, as vinte primeiras linhas de um livro. A partir desse dia, ele escreveu em cada dia, tantas li-

nhas quantas havia escrito no dia anterior, mais 5 linhas. O livro tem dezessete páginas, cada uma com exatamente 25 linhas. Em quantos dias o escritor terminou de escrever o livro?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 17

**6. Progressões Geométricas – P.G.** Dizemos que uma sequência é progressão geométrica ou P.G. se cada termo é obtido multiplicando o anterior por uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão geométrica e simbolizada pela letra  $q$ . Exemplos: (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) é P.G. em que a razão é 2 ( $q = 2$ ), pois:  $2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 4 \cdot 2 = 8 \Rightarrow 8 \cdot 2 = 16$  e assim sucessivamente.

(1, 3, 9, 27, 81, ...) é P.G. em que  $q = 3$ , pois:  $1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow 9 \cdot 3 = 27$  e assim sucessivamente.

Portanto, determinamos a razão da P.G. dividindo um termo por seu antecessor. Assim,

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots) \text{ é P.G. } \Leftrightarrow a_n = (a_{n-1}) \cdot q, n \geq 2 \Rightarrow q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Desta forma, podemos deduzir que, se  $(a_1, a_2, a_3)$  é uma P.G.,  $a_2$  é igual à razão geométrica dos outros dois elementos, ou, em linguagem matemática:  $a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$

Exemplos:

Se (4, 16, 64) é P.G. então  $16 = \sqrt{4 \cdot 64}$

Se (25, 125, 625) é P.G. então  $125 = \sqrt{25 \cdot 625}$

**a) Classificação da P.G.:** Dizemos que uma P.G. é: *crecente*  $\rightarrow$  se cada termo é maior que seu antecessor

$$(2, 4, 8, 16, 32, \dots) q = 2; \left(-10, -5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{16}\right) q = \frac{1}{2}$$

*decrecente*  $\rightarrow$  se cada termo é menor que seu antecessor

$$\left(50, 10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}\right) q = \frac{1}{5}; (-1, -3, -9, -27, -81) q = 3$$

*alternante*  $\rightarrow$  se cada termo tem sinal contrário ao antecessor, neste caso  $q < 0$

$$(-5, 10, -20, 40, -80) q = -2; \left(12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) q = -\frac{1}{2}$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Determinar a razão de cada P.G.:

$$a) (1, \sqrt{5}, 5)$$

$$c) (-1, 4, -16, 64, -256)$$

$$b) \left( \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8} \right)$$

$$d) (p^{-2}, p^{-1}, 1, p, p^2)$$

**Resolução:** Dada a seqüência, encontramos o valor da razão dividindo um termo pelo seu antecessor:

$$a) q = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \quad b) q = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$c) q = -\frac{4}{1} = -4 \quad d) q = \frac{p}{1} = p$$

2. Determinar a P.G.  $(k-1, 2k, 4k+5)$   $k \neq 0$ .

**Resolução:** Para determinar a P.G. precisamos do valor numérico de  $k$ ; aplicamos, então, a definição de razão:

$$\frac{2k}{k-1} = \frac{4k+5}{2k} \Rightarrow \cancel{4k^2} = \cancel{4k^2} + 5k - 4k - 5 \Rightarrow k = 5$$

Substituindo o valor de  $k$ , temos:  $k-1 = 4 \Rightarrow 2k = 10 \Rightarrow 4k+5 = 25$

A P.G. é  $(4, 10, 25)$

3. Três números estão em P.G. de tal modo que a soma dos três é  $\frac{7}{8}$  e o produto é  $\frac{1}{64}$ . Determine os números.

**Resolução:** Segundo a definição, estando três números em P.G., a partir do termo central podemos obter o primeiro dividindo pela razão, e podemos obter o terceiro multiplicando pela razão. Chamamos de  $x$  o segundo termo dessa P.G. de razão  $q$  ( $q \neq 0$ ), então:

$$1^\circ \text{ termo} = \frac{x}{q}; 2^\circ \text{ termo} = x; 3^\circ \text{ termo} = xq$$

$$\text{Se o produto é } \frac{1}{64} \text{ então: } \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = \frac{1}{64} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Substituímos o valor de  $x$  e utilizamos a soma dos três termos para determinar a razão:

$$\frac{x}{q} + x + xq = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{1}{4q} + \frac{1}{4} + \frac{q}{4} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{2 + 2q + 2q^2}{8q} = \frac{7q}{8q}$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow q = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow q = 2 \text{ ou } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x = \frac{1}{4} \text{ e } q = 2 \text{ temos a P. G. } \left( \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Se } x = \frac{1}{4} \text{ e } q = \frac{1}{2} \text{ temos a P. G. } \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right)$$

### ≡ Exercícios propostos:

**33.** Determinar a razão de cada P.G.:

a)  $(2, -6, 18, -54, \dots)$

c)  $(-\sqrt{7}, -7, -7\sqrt{7}, -49)$

b)  $(25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots)$

d)  $(3, 12, 48, 192)$

**34.** Determinar  $p \neq 0$  para que  $(4p, 2p - 1, p + 3)$  seja P.G.

**35.** Determine a P.G. decrescente  $(-1, x, 5x - 6)$  sendo  $x \neq 0$ .

**36.** Três números estão em P.G. crescente, tal que a soma dos números é  $-7$  e o produto é  $-8$ . Determine a P.G.

**37.** Determine a P.G. decrescente formada por três números cuja soma é  $13$  e o produto é  $27$ .

**38.** (PUC-SP) Se a seqüência  $(4x, 2x + 1, x - 1)$  é uma P.G., então o valor de  $x$  é:

a)  $-\frac{1}{8}$  b)  $-8$  c)  $-1$  d)  $8$  e)  $\frac{1}{8}$

**39.** (UFSC) O número  $57$  foi dividido em três partes que estão em P.G. de razão  $\frac{2}{3}$ . Determine o termo médio dessa P.G.

**40.** (UFAL) Se os números  $x + 12$ ,  $x$  e  $x + 4$  são termos consecutivos de uma progressão geométrica, a razão dessa progressão é:

a)  $-3$  b)  $-\frac{1}{3}$  c)  $\frac{1}{9}$  d)  $\frac{1}{3}$  e)  $3$

**7. Fórmula do termo geral de uma P.G.** Dada a P.G.  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  de razão  $q$ , sabemos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$



Portanto, conhecendo o primeiro termo e a razão de uma P.G., podemos determinar qualquer termo utilizando a fórmula:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Dada a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, ...), determine o décimo termo.

*Resolução:* Analisando a P.G., verificamos que o 1º termo é 1 e a razão é 2. Aplicando a fórmula, temos:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = 1 \cdot 2^9 \Rightarrow \boxed{a_{10} = 512}$$

2. Sabe-se que o 5º e o 8º termos de uma P.G. são, respectivamente, 81 e 2187. Determine o 6º termo.

*Resolução:* Utilizando a fórmula do termo geral, temos que:

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow \text{sendo } a_5 = 81 \\ \text{então } a_1 \cdot q^4 = 81 \text{ e sendo } a_8 = 2187 \text{ então } a_1 \cdot q^7 = 2187$$

Temos duas equações e duas incógnitas, portanto é possível determinar os valores do 1º termo e da razão. Como são duas equações produto, podemos simplesmente dividi-las, facilitando os cálculos:

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^4} = \frac{2187}{81} \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q^3 = 3^3 \Rightarrow q = 3$$

Substituímos o valor de  $q$  em qualquer uma das equações para determinar o 1º termo:

$$a_1 \cdot q^4 = 81 \Rightarrow a_1 \cdot 3^4 = 81 \Rightarrow a_1 \cdot 81 = 81 \Rightarrow a_1 = 1$$

Como queremos o 6º termo, aplicamos a fórmula do termo geral, sendo  $n = 6$ :

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = 1 \cdot 3^5 \Rightarrow \boxed{a_6 = 243}$$

3. Determinar o primeiro termo de uma P.G. de razão  $\frac{1}{2}$ , sabendo que o quarto termo é  $-\frac{1}{8}$ .

*Resolução:* Aplicamos a fórmula do termo geral para  $n = 4$ , porque é conhecido o valor do 4º termo:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow -\frac{1}{8} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow -\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = -1}$$

4. Quantos elementos tem a P.G. de razão  $\sqrt{3}$ , onde o primeiro termo e o último são respectivamente  $\sqrt{3}$  e 81.

*Resolução:* A letra  $n$  representa o número de elementos da P.G.

sendo, portanto, o último termo  $a_n$ . Basta substituir os valores conhecidos na fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 81 = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} \Rightarrow (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{81}{\sqrt{3}}$$

$$(\sqrt{3})^{n-1} = \frac{81\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (\sqrt{3})^{n-1} = 27\sqrt{3}$$

Utilizamos as propriedades de potências para resolver a equação exponencial:

$$(3^{\frac{1}{2}})^{n-1} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{\frac{n-1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}} \Rightarrow \frac{n-1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow n = 8$$

Portanto, a P.G. tem 8 elementos.

**5. Interpolar 4 meios geométricos entre os números 1 e 3 125.**

**Resolução:** Queremos determinar 4 números entre 1 e 3 125 que formem uma P.G. Observe o esquema: (1,     ,     ,     ,     , 3 125)

4 números

Como 1 é o 1º termo e 3 125 é o 6º termo, utilizamos a fórmula do termo geral para  $n = 6$ :

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 3125 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow 5^5 = q^5 \Rightarrow q = 5$$

Conhecendo razão  $q = 5$ , multiplicamos cada termo, a partir do primeiro até o sexto termo, obtendo a P.G.:

(1, 5, 25, 125, 625, 3 125)

### ⇒ Exercícios propostos:

**41.** Determine o 6º termo da P.G.  $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots)$ .

**42.** Determine o 11º termo da P.G.  $(1, -2, 4, \dots)$ .

**43.** Sabe-se que o 5º termo de uma P.G. é  $\frac{1}{81}$ . Determine a razão, dado que o primeiro termo é 1.

**44.** Determine o primeiro termo de uma P.G., sabendo que o 7º é  $8\sqrt{2}$  e a razão é  $\sqrt{2}$ .

**45.** Sabe-se que o terceiro e o quinto termos de uma P.G. são, respectivamente, 7 e 49. Determine o oitavo termo.

**46.** Determine a razão da P.G. de termos inteiros em que o 3º termo é 10 e o 6º termo é 80.

47. Inserir 4 meios geométricos entre os números 1 e  $\frac{1}{100\,000}$ .

48. Interpolar 4 meios geométricos entre os números 1 e 7 776.

49. (Unesp-SP) São inseridos 5 meios geométricos entre 4 e 2 916, nessa ordem, de modo a formar uma seqüência crescente. Assinale a alternativa que indica seu 4º termo:

a) 324   b) 729   c) 1 428   d) 108   e) 36

50. (UFSC) Em uma progressão geométrica, o terceiro termo é  $\frac{16}{9}$  e o sétimo é 144. Determine o seu quinto termo.

**8. Soma dos termos de uma P.G. finita** Considere a P.G.  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$  de razão  $q$ . Vamos calcular a soma de todos os seus termos, simbolizando essa soma por  $S_n$ :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Como foi visto, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro termo e da razão:  $a_2 = a_1 \cdot q$ ,  $a_3 = a_1 \cdot q^2$  e  $a_4 = a_1 \cdot q^3$

Substituindo na soma dos  $n$  termos, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (\text{I})$$

Multiplicamos os dois membros da igualdade pela razão  $q$ :

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \quad (\text{II})$$

Vamos efetuar a subtração das equações:  $(\text{II}) - (\text{I})$

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$$

---


$$q \cdot S_n - S_n = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \dots$$

$$\dots + \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} + a_1 \cdot q^n - a_1 - \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q^2} - \dots - \cancel{a_1 \cdot q^{n-2}} - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Observe que os termos se anulam aos pares, restando no 2º membro apenas  $a_1 \cdot q^n - a_1$ , então:  $S_n (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1$

Assim, temos que, sendo  $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Portanto, podemos calcular a soma dos termos de uma P.G. finita conhecendo o primeiro termo e a razão, lembrando que essa fórmula só pode ser usada se  $q \neq 1$ .

Se a razão da P.G. é 1, então todos os termos são iguais. Por exemplo: (2, 2, 2, 2, ..., 2) e (3, 3, 3, 3, ..., 3)

Genericamente:  $(a_1, a_1, a_1, a_1, \dots, a_1)$

Nesse caso, a soma será:  $S_n = n \cdot a_1$ , se  $q = 1$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da

P.G.  $(2, 4, 8, 16, \dots)$

*Resolução:* Podemos observar que o primeiro termo é 2 e a razão é 2. Utilizamos a fórmula da soma de P.G. finita para  $n = 10$ :

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot (1\,024 - 1)$$

$$S_{10} = 2\,046$$

2. Calcular  $\sum_{p=0}^7 3^p$ . *Resolução:* Essa é uma maneira simplificada de expressar uma soma, em que é dada uma fórmula que depende de uma variável, sendo que, nesse caso, a variável é  $p$ . Atribuímos valores naturais de 0 a 7, como é indicado, calculando a soma obtida:  $\sum_{p=0}^7 3^p = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$

Trata-se da soma de uma P.G. de razão  $q = 3$ , em que o primeiro termo é 1. Como são oito parcelas, usaremos a fórmula com  $n = 8$ :

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{1(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{6.560}{2} \Rightarrow S_8 = 3\,280$$

3. A soma dos termos de uma P.G. finita é 2 801. Quantos termos tem a P.G., sabendo que o primeiro termo é 1 e a razão é 7?

*Resolução:* Substituímos os dados na fórmula, sendo que a única incógnita é o número de elementos da P.G.:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 2\,801 = \frac{1(7^n - 1)}{7 - 1} \Rightarrow 7^n - 1 = 6 \cdot 2\,801$$

$$7^n = 16\,807 \Rightarrow 7^n = 7^5 \Rightarrow n = 5$$

Portanto: a P.G. tem 5 elementos.

### Exercícios propostos:

51. Calcule a soma dos 10 primeiros termos da P.G.  $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ .

**52.** Calcule a soma dos 6 primeiros termos da P.G. finita em que o 1º termo é  $-3$  e a razão é  $3$ .

**53.** Calcular a soma dos 5 primeiros termos da P.G. cujo primeiro termo é  $-1$  e a razão é  $5$ .

**54.** Calcular  $\sum_{p=0}^{10} 2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$       **55.** Calcular  $\sum_{p=0}^5 3^{p-1}$ ,  $p \in \mathbb{N}$

**56.** Determine o primeiro termo de uma P.G. finita em que a soma de seus 4 primeiros termos é  $+156$ , sabendo que a razão é  $+5$ .

**57.** Quantos elementos tem a P.G. cuja soma é  $-252$ , o primeiro termo é  $-4$  e a razão é  $2$ ?

**58.** (FESP-SP) A soma dos seis primeiros termos da P.G.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots\right)$  é: a)  $\frac{12}{33}$    b)  $\frac{15}{32}$    c)  $\frac{21}{33}$    d)  $\frac{21}{32}$    e)  $\frac{2}{3}$

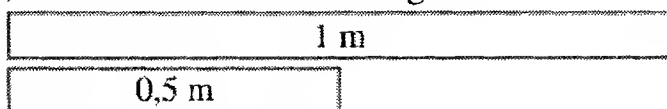
**59.** (UFRR) Em uma experiência de laboratório, um frasco recebe, no primeiro dia do mês, três gotas de um determinado líquido; no segundo dia recebe nove gotas; no terceiro dia recebe 27 gotas, e assim por diante. No dia em que recebeu 2 187 gotas ficou completamente cheio. Em que dia do mês isso aconteceu?

**60.** (UFPI) Numa progressão geométrica estritamente crescente a razão é o triplo do primeiro termo. Se o quarto termo é 432, então a soma dos quatro primeiros termos desta progressão é:

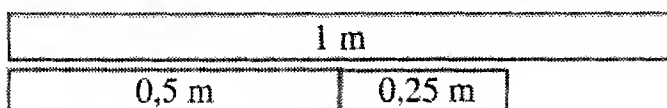
a) 288   b) 518   c) 540   d) 864   e) 872

**9. Soma dos termos de P.G. infinita** Para deduzir a fórmula para somar termos de uma P.G. infinita, faremos uma experiência em que são necessárias duas tiras de papel de 1 metro cada.

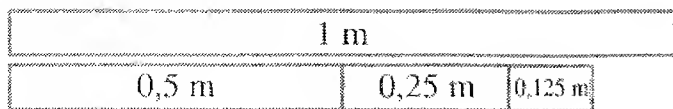
Fixe uma das tiras em uma superfície plana, corte a outra ao meio, obtendo duas tiras de 0,5m. Fixe uma delas ao lado da tira de 1 m, conforme mostra a figura:



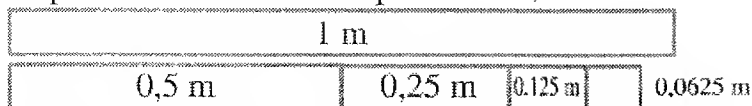
Corte a outra tira de 0,5 m ao meio, obtendo duas tiras de 0,25 m, e fixe uma delas ao lado da tira de 0,5 m:



Corte a outra tira de 0,25 m, obtendo duas tiras de 0,125 m, e fixe uma delas ao lado da tira de 0,75 m:



Repetindo o mesmo processo, temos:



Podemos observar que a tira composta por emendas se aproxima cada vez mais da tira de 1 m e, quanto mais vezes repetirmos o processo, mais perto de 1 m chegaremos.

Podemos concluir que:  $0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 + \dots = 1$

Utilizando as frações correspondentes a cada parcela, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Essa é a soma de uma P.G. infinita de razão  $\frac{1}{2}$ .

Se usarmos a fórmula da soma de P.G. finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ observaremos que:}$$

$$\text{se } n = 2 \text{ e } q = \frac{1}{2}, \text{ então } q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{se } n = 3 \text{ e } q = \frac{1}{2}, \text{ então } q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{se } n = 4 \text{ e } q = \frac{1}{2}, \text{ então } q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Note que, como  $q$  é um número entre 0 e 1, quanto maior é o valor de  $n$ , menor é o valor de  $q^n$ . Dizemos, então, que  $q^n$  se aproxima de zero para valores muito grandes de  $n$  ( $q^n \cong 0$ ), então na fórmula temos:

$$S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1}{1 - q}, 0 < |q| < 1}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular a soma da P.G.  $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$ .

**Resolução:** Sendo o primeiro termo 1 e a razão  $\frac{1}{3}$ , podemos utilizar a fórmula:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{3}{2}}$$

2. A soma dos termos de uma P.G. infinita é 3. Sabendo que o primeiro termo é 1, determine o 4º termo.

**Resolução:** Sabendo que a P.G. é infinita, podemos utilizar a fórmula da soma para determinar a razão:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 3 = \frac{1}{1-q} \Rightarrow 3 - 3q = 1 \Rightarrow -3q = -2 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

O 4º termo é obtido utilizando a fórmula do termo geral:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{8}{27}}$$

3. Resolver a equação  $x + \frac{x}{5} + \frac{x}{25} + \frac{x}{125} + \dots = 12$ .

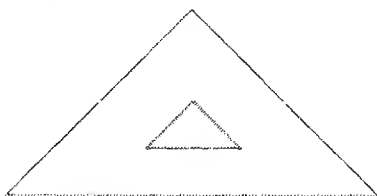
**Resolução:** Observe que o primeiro membro da equação é a soma de uma P.G. infinita, portanto essa soma é igual a 12. Utilizamos a fórmula substituindo  $a_1$  por  $x$  e  $q$  por  $\frac{1}{5}$ :

$$S_n = 12 \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 12 \Rightarrow \frac{x}{1-\frac{1}{5}} = 12 \Rightarrow x = 12 - \frac{12}{5} = \frac{60-12}{5}$$

$$\boxed{x = \frac{48}{5}}$$

4. A medida do lado de um triângulo equilátero é 4 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triângulo obtém-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

**Resolução:** Fazendo uma figura da construção desses triângulos, temos:



Conforme a construção, cada novo triângulo é obtido unindo os pontos médios do triângulo anterior. Então, se o lado do triângulo maior é 4, o próximo tem lado 2, o próximo

tem lado 1 e assim sucessivamente. O perímetro do maior é  $3 \cdot 4 = 12$ , o segundo tem perímetro  $3 \cdot 2 = 6$ , o terceiro tem perímetro  $3 \cdot 1 = 3$ , etc. A soma de todos os perímetros é:  $12 + 6 + 3 + \dots$

Trata-se de uma P.G. infinita de razão  $\frac{1}{2}$ , então:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{S_n = 24 \text{ cm}}$$

### Exercícios propostos:

61. Calcule a soma de cada P.G.:

a)  $\left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \frac{8}{125}, \dots\right)$  b)  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots\right)$  c)  $\left(1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \dots\right)$

62. Calcule o primeiro termo de uma P.G. infinita cuja soma é  $\frac{100}{9}$  e a razão  $\frac{1}{10}$ .

63. Calcule a razão da P.G. infinita cuja soma é  $\frac{2}{3}$  e o primeiro termo é 1.

64. (UFPI) O valor de  $x$  na equação  $\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{24} + \frac{x}{96} + \dots = 4$  é:

a) 4,0 b) 4,5 c) 5,0 d) 5,5 e) 6,0

65. (PUC-SP) Se  $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = 10$ , então  $r$  é igual a:

a) 1 b)  $\frac{9}{10}$  c)  $-\frac{9}{10}$  d)  $\frac{1}{2}$  e)  $\frac{1}{10}$

### Exercícios complementares:

66. (Fuvest-SP) Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são  $1 - a$ ,  $a$ ,  $\sqrt{11 - a}$ . O quarto termo desta P.A. é: a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

67. (UFMS) Numa P.A., o 5º termo é 250 e o 3º termo é 128. Determine a razão da P.A.

68. (UFRS) A progressão aritmética  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  tem razão  $r$ . A razão da progressão definida por  $b_n = a_{5n}$  é:

a)  $r$  b)  $r + 5$  c)  $5r$  d)  $r - 5$  e)  $\frac{r}{5}$

69. (UFRR) Sabendo que a soma dos nove primeiros termos de uma P.A. é 819, calcule o valor do seu 5º termo.

70. (Vunesp-SP) As progressões  $(2, 5, 8, \dots, 332)$  e  $(7, 12, 17, \dots, 157)$  têm em comum:

a) 8 termos d) 11 termos  
b) 9 termos e) 12 termos  
c) 10 termos



**71.** (Vunesp-SP) As progressões (2, 5, 8, ..., 332) e (7, 12, 17, ..., 157) têm em comum:

- a) 8 termos      d) 11 termos  
b) 9 termos      e) 12 termos  
c) 10 termos

**72.** (UFAL) A soma dos termos de uma progressão aritmética finita é 462. Se a soma dos termos extremos dessa progressão é 44, o número de termos é:

- a) 19   b) 20   c) 21   d) 22   e) 23

**73.** (UFSE) A soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por  $S_n = 3n^2 + 2n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . O décimo termo dessa progressão é:

- a) 59   b) 98   c) 118   d) 220   e) 320

**74.** (PUC-SP) Um pêndulo, oscilando, percorre sucessivamente 18 cm, 15 cm, 12 cm, ... A soma dos percursos até o repouso é:

- a) 45 cm   c) 90 cm   e) n. r. a.  
b) 63 cm   d) 126 cm

**75.** (UFES) Para a exibição de um show, as 800 cadeiras de um teatro de arena serão dispostas em filas circulares, com 20 cadeiras na primeira fila, 24 na segunda, 28 na terceira, e assim sucessivamente. Quantas filas serão dispostas no teatro?

**76.** (UFBA) Considere a P.A. de razão  $r$ :  $(a_n) = (\log 4, \log 12, \log 36, \log 108, \dots)$ . Sendo  $a_{22} = k$ , determine  $\frac{10^{k+r}}{3^{20}}$ .

**77.** (Fatec-SP) Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números naturais tais que a seqüência  $a$ ,  $b$ ,  $c$  é uma progressão aritmética, e a seqüência  $b$ , 28,  $2(a+c)$  é uma

progressão geométrica, então  $b$  é igual a:

- a) 8   b) 12   c) 14   d) 16   e) 20

**78.** (UFPI) Se a seqüência  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  é uma progressão aritmética de razão  $r$ , com  $r \neq 0$ , então a seqüência  $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \dots, 2^{a_n}, \dots$  é uma:

- a) progressão aritmética.  
b) progressão geométrica de razão  $2^{a_1}$ .  
c) progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2^r}$ .  
d) progressão geométrica de razão 2.  
e) progressão geométrica de razão  $2^r$ .

**79.** (Mack-SP) Seja  $x$  o 30º termo da P.G. (2, 4, 8, ...). O valor de  $\log_4 x$  é: a) 15   b) 20   c) 25   d) 30   e) 35

**80.** (UFSE) Numa progressão geométrica, o segundo termo é  $-2$  e o quinto termo é 16. A razão dessa progressão é:

- a)  $-3$    b)  $-2$    c) 2   d) 3   e) 4

**81.** (Fuvest-SP) O 5º e o 7º termos de uma P.G. de razão positiva valem, respectivamente, 10 e 16. O sexto termo dessa P.G. é:

- a) 13   b)  $10\sqrt{6}$    c) 4   d)  $4\sqrt{10}$    e) 10

**82.** (FGV-SP) A raiz da equação  $x + x^2 + x^3 + \dots + x^a + \dots = 2$  é:

- a)  $\frac{1}{3}$       d)  $\frac{4}{3}$   
b)  $\frac{2}{3}$       e)  $\frac{5}{3}$   
c) 1

**83.** (UFRR) Determinar o maior inteiro  $x$  que satisfaz

$$\left(5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \dots\right) x = 155$$

# Capítulo X

## MATRIZES E DETERMINANTES

**1. Introdução** As matrizes ordenam e simplificam os problemas, contribuindo para a resolução de vários tipos de questões, sendo utilizadas na Estatística, na Física Atômica, na Economia, enfim, na Matemática Pura e Aplicada.

**2. Definição** Uma matriz é uma tabela de números reais dispostos segundo linhas horizontais e colunas verticais. Por exemplo, o consumo de sucos, em uma lanchonete, pode ser indicado em forma de matriz.

	[Laranja]	[Mamão]	[Abacaxi]	[Maracujá]
mesa I	5	2	3	1
mesa II	3	4	6	2
mesa III	7	1	0	5

O conjunto ordenado dos números que formam a tabela, é denominado *matriz*, e cada número pertencente a ela é chamado de *elemento da matriz*.

5 2 3 1

3 4 6 2

7 1 0 5

Para indicarmos uma matriz, usamos três tipos diferentes de notação:

a) entre colchetes  $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) entre parênteses  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

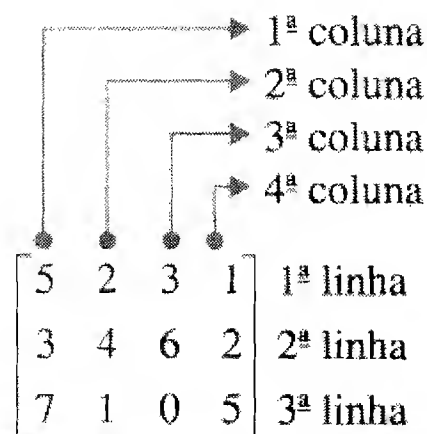
c) entre barras duplas

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Você poderá utilizar a que achar melhor. Aqui, preferimos adotar a notação entre colchetes.

### 3. Tipo ou ordem de uma matriz

As matrizes são classificadas de acordo com o seu número de linhas e de colunas. Assim, a matriz representada ao lado é denominada matriz do tipo — ou ordem —  $3 \times 4$  (lê-se três por quatro), pois tem três linhas e quatro colunas.



### 4. Representação genérica de uma matriz

Costumamos representar uma matriz por uma letra maiúscula (A, B, C...), indicando sua ordem no lado inferior direito da letra.

Quando desejamos indicar a ordem de modo genérico, fazemos uso de letras minúsculas. Ex.:  $A_{m \times n}$

Da mesma forma, indicamos os elementos de uma matriz pela mesma letra que a denomina, mas em minúscula. A linha e a coluna em que se encontra tal elemento é indicada também no lado inferior direito do elemento. Ex.:  $a_{11}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde  $m, n \in \mathbb{N}^*$

Para indicar uma matriz qualquer, de modo genérico, usamos a seguinte notação:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , onde  $i$  representa a linha e  $j$ , a coluna em que se encontra o elemento.

**5. Classificação** Classificamos as matrizes de acordo com o número de linhas e colunas que possuem. Algumas recebem nomes especiais.

**a) Matriz retangular:** Quando o número de linhas é diferente do número de colunas ( $m \neq n$ ). Ex.:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ é matriz do tipo } 3 \times 2 \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ é matriz do tipo } 2 \times 3$$

**b) Matriz quadrada:** Quando o número de linhas é igual ao número de colunas ( $m = n$ ). Ex.:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ é matriz de ordem } 3$$

Neste caso, em vez de indicarmos a ordem como  $n \times n$ , podemos indicá-la simplesmente por  $n$ .

Numa matriz quadrada podemos definir duas *diagonais*: *diagonal principal*, formada pelos elementos  $a_{ij}$  tais que  $i = j$ , e a *diagonal secundária*, formada pelos elementos  $a_{ij}$  tais que  $i + j = n + 1$  ( $n$  é a ordem). Ex.:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{diagonal} \\ \text{secundária} \\ \text{diagonal} \\ \text{principal} \end{array} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{diagonal} \\ \text{secundária} \\ \text{diagonal} \\ \text{principal} \end{array}$$

**c) Matriz linha:** É a matriz retangular que possui apenas uma linha ( $m = 1$ ). Ex.:

$$F = [3 \quad 2] \text{ é matriz linha de ordem } 1 \times 2 \quad G = \left[ \frac{2}{3} \quad -5 \quad 0 \right] \text{ é matriz linha de ordem } 1 \times 3$$

**d) Matriz coluna:** É a matriz retangular que possui apenas uma coluna ( $n = 1$ ). Ex.:

$$H = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ é matriz coluna de ordem } 2 \times 1 \quad J = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ é matriz coluna de ordem } 4 \times 1$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ , escrever a linha e a coluna, a que cada elemento pertence.

Resolução:

$$\begin{array}{l} a_{11} = 3 \\ a_{12} = 5 \\ a_{13} = 0 \\ a_{21} = -2 \\ a_{22} = 4 \\ a_{23} = 1 \\ a_{31} = -1 \\ a_{32} = 2 \\ a_{33} = 6 \end{array}$$

2. Calcular os elementos da matriz  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ , onde  $a_{ij} = 2i + j$

Resolução: Como a matriz  $A$  é de ordem  $3 \times 2$ , então sua representação genérica, é:  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Calculamos os elementos  $a_{ij}$  de  $A_{3 \times 2}$ :

$$a_{ij} = 2i + j$$

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$a_{32} = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

$$\text{Logo, } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Escrever a matriz  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ , onde  $b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 3, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Resolução: Representamos genericamente  $B_{2 \times 3}$ :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Calculamos os elementos  $b_{ij}$ :  $b_{11}$  e  $b_{22}$ , são tais que  $i = j$

(pois  $1 = 1$  e  $2 = 2$ ), então,  $b_{11} = b_{22} = 0$

$b_{12}$ ,  $b_{13}$ ,  $b_{21}$  e  $b_{23}$  são tais que,  $i \neq j$

(pois  $1 \neq 2$ ,  $1 \neq 3$ ,  $2 \neq 1$  e  $2 \neq 3$ ), então,  $b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{23} = 3$

$$\text{Logo, } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

1. Calcular a matriz  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ , isto é,  $B_3$ , dada por  $b_{ij} = 2i^2 - 3j$ .

2. Determinar a matriz  $C = [c_{ij}]_{4 \times 2}$ , onde  $c_{ij} = \begin{cases} -2, & \text{se } i \leq j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$

3. (UFSC) Dada a matriz  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ , definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & \text{se } i < j \\ 7, & \text{se } i = j \\ i^2 + j, & \text{se } i > j \end{cases}, \text{ calcular o valor da expressão } 2a_{23} + 3a_{22} - a_{21}.$$

**6. Igualdade de matrizes** Duas matrizes A e B são iguais quando apresentarem a mesma ordem e os seus elementos correspondentes forem iguais. Ex.:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} (5-2) & (1+4) \\ (6+2) & (2 \times 2) \end{bmatrix} \quad A = B$$

### ✍ Exercício Resolvido:

1. Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2x-1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ y+2 & 1 \end{bmatrix}$ , calcular os valores reais de  $x$  e  $y$ , para que  $A = B$ .

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2x-1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ y+2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 7 \Rightarrow 2x = 8 \therefore x = 4 \\ y+2 = 8 \Rightarrow y = 8-2 \therefore y = 6 \end{cases}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

4. Calcular os valores reais de  $x$  e  $y$  na igualdade:

$$\begin{bmatrix} x + y & 5 \\ 9 & 2x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

**5.** Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} x + 3y & 7 & -1 \\ 11 & 3x + 5y & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ z & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar os valores reais de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , sendo  $A = B$ .

## 7. Operações com matrizes

**a) Adição:** Somamos os elementos correspondentes das matrizes, por isso, é necessário que as matrizes sejam de mesma ordem.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ;  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , portanto  $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Ex.:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{A matriz } C = A + B \text{ será:}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

### Propriedades da Adição de Matrizes

Sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes da mesma ordem, tem-se:

- a)  $A + B = B + A$  (comutativa)
- b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (associativa)
- c)  $A + 0 = A$  (elemento neutro), onde  $0$  é a matriz nula, ou seja, todos seus elementos são iguais a zero.
- d)  $A + (-A) = 0$  (elemento oposto), onde  $-A$  é a matriz oposta de  $A$ , que se obtém trocando os sinais de todos os elementos de  $A$ .

**b) Multiplicação por um número real:** Sendo  $K \in \mathbb{R}$  e  $A$  matriz de ordem  $m \times n$ , a matriz  $K \cdot A$  é obtida multiplicando-se todos os elementos de  $A$  por  $K$ .

Ex.: sendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  a matriz  $5A$  é:

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$$

**Observação:** Podemos dizer que a matriz oposta de  $A$ , é obtida multiplicando todos os elementos de  $A$  por  $-1$ .

**c) Subtração:** A diferença entre duas matrizes  $A$  e  $B$  (de mesma ordem) é obtida através da soma da matriz  $A$  com a oposta de  $B$ . Assim:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

**d) Multiplicação entre matrizes:** A multiplicação entre matrizes é um pouco mais complexa do que as operações anteriores, por isso, ilustraremos o processo através de um exemplo.

Consideremos o produto  $A \cdot B = C$ . Para efetuarmos a multiplicação entre A e B, é necessário, antes de mais nada, determinar se a multiplicação é possível, isto é, se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, determinando a ordem de C:  $A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$ , como o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B(n) então torna-se possível o produto, e a matriz C terá o número de linhas de A(m) e o número de colunas de B(p).

Sejam A e B matrizes de ordem 2, neste caso o produto  $A \cdot B$  e uma matriz C também de ordem 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = C_{2 \times 2} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Os elementos de C são obtidos multiplicando-se *ordenadamente* os elementos da linha de A pelos elementos da coluna de B e, em seguida, adicionando-se esses produtos.

$c_{11}$  é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 1 de A pela coluna 1 de B:  $c_{11} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 6 = -10$

$c_{12}$  é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 1 de A pela coluna 2 de B:  $c_{12} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 = -5$

$c_{21}$  é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 2 de A pela coluna 1 de B:  $c_{21} = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 26$

$c_{22}$  é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 2 de A pela coluna 2 de B:  $c_{22} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 13$

$$\text{Portanto } C = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$$



De forma geral, podemos dizer que:

O produto de  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  por  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ , é a matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  cujo elemento da linha  $i$  e coluna  $j$ , é obtido multiplicando os elementos da linha  $i$  de  $A$  pelos correspondentes elementos da coluna  $j$  de  $B$  e, posteriormente, somando-se os produtos obtidos.

### Propriedades da multiplicação entre matrizes:

Sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes e sendo possível o produto entre elas, temos:

- a)  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  (associativa)
- b)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  (distributiva à direita)
- c)  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$  (distributiva à esquerda)

*Observação:* Conhecendo a técnica da multiplicação de matrizes e da condição necessária para que esta exista, verificamos que pode ocorrer  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Dizemos, então, que a propriedade comutativa não se aplica ao produto de matrizes.

### Exercícios resolvidos:

1. Dadas as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ , calcular:  $A + B - C$

*Resolução:*

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + B - C = A + B + (-C) = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Sejam as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ , determinar a

matriz  $C$ , tal que  $C - A + B = 0$ .

*Resolução:*  $A$  e  $B$  têm ordem  $3 \times 2$  e, como  $0$  representa uma matriz nula, podemos impor que  $0$  é de ordem  $3 \times 2$  ( $0_{3 \times 2}$ ).

$$C - A + B = 0 \Rightarrow C = 0 + A - B$$

mas  $0$  é elemento neutro da adição. Então,  $C = A - B$

$$\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -9 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 11 \\ -6 & -9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = C$$

3. Calcular:  $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot B$ , dado  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

Resolução:

$$\text{Temos: } \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

4. Dadas as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , obter a matriz X na equação:  $A + X = 2 \cdot B$ .

Resolução: Podemos resolver de duas maneiras:

a) Isolando a matriz X na equação:

$$A + X = 2B \Rightarrow X = 2B - A \Rightarrow X = 2B + (-A) \Rightarrow$$

$$X = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Construindo uma matriz  $X_{2 \times 2}$ , com elementos literais:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e equacionando. Isto é:}$$

$$A + X = 2B \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4+a & 2+b \\ 0+c & 1+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2 \\ 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 1 + d = 2 \Rightarrow d = 1 \end{cases} \text{ . De onde, } X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Verificar a existência ou não dos produtos  $(B \cdot A)$  e  $(A \cdot B)$  em:

a)  $A_{2 \times 3}$  e  $B_{3 \times 4}$ , b)  $A_{3 \times 1}$  e  $B_{1 \times 3}$ , c)  $A_{2 \times 5}$  e  $B_{4 \times 2}$ , d)  $A_{1 \times 3}$  e  $B_{2 \times 3}$

*Resolução:* Lembrando que, para que o produto seja possível, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz, temos que:

a) existe  $(A \cdot B)$ , de ordem  $2 \times 4$ , pois  $A_{2 \times 3}$  e  $B_{3 \times 4}$  ( $3 = 3$ )

não existe  $(B \cdot A)$ , pois  $B_{3 \times 4}$  e  $A_{2 \times 3}$  ( $4 \neq 2$ )

b) existe  $(A \cdot B)$ , de ordem  $3 \times 3$ , ou ordem 3 ( $1 = 1$ )

existe  $(B \cdot A)$ , de ordem  $1 \times 1$ , pois  $B_{1 \times 3}$  e  $A_{3 \times 1}$  ( $3 = 3$ )

c) não existe  $(A \cdot B)$ , pois  $A_{2 \times 5}$  e  $B_{4 \times 2}$  ( $5 \neq 4$ )

existe  $(B \cdot A)$ , de ordem  $4 \times 5$ , pois  $B_{4 \times 2}$  e  $A_{2 \times 5}$  ( $2 = 2$ )

d) não existe  $(A \cdot B)$ , pois  $A_{1 \times 3}$  e  $B_{2 \times 3}$  ( $3 \neq 2$ )

não existe  $(B \cdot A)$ , pois  $B_{2 \times 3}$  e  $A_{1 \times 3}$  ( $3 \neq 1$ )

6. Sejam as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ . Obter  $X = A \cdot B$ .

*Resolução:*

$$\text{A matriz } X = A \cdot B, \text{ será } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = X_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

Sendo  $L$  = linha de  $A$ , temos:  $L_1 = 0$  e  $3$ ;  $L_2 = 1$  e  $4$ ; e  $L_3 = 2$  e  $5$

E sendo  $C$  = coluna de  $B$ , temos:  $C_1 = 6$  e  $8$ ; e  $C_2 = 7$  e  $9$

Temos, então: elementos da matriz  $X$

$$x_{11} = (L_1 \cdot C_1) = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24$$

$$x_{12} = (L_1 \cdot C_2) = 0 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 27$$

$$x_{21} = (L_2 \cdot C_1) = 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 38$$

$$x_{22} = (L_2 \cdot C_2) = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 43$$

$$x_{31} = (L_3 \cdot C_1) = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 52$$

$$x_{32} = (L_3 \cdot C_2) = 2 \cdot 7 + 5 \cdot 9 = 59$$

$$\text{de onde } X = \begin{bmatrix} 24 & 27 \\ 38 & 43 \\ 52 & 59 \end{bmatrix}$$

### Exercícios propostos:

6. Dadas as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  e

$$C = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ calcular: a) } A + B - C \text{ e b) } A - B + C$$

**7.** (UFMS) Calcule o valor numérico da expressão  $y^3 - x^2$ , sabendo que:

$$\begin{bmatrix} x & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

**8.** (Osec-SP) Os números  $x$  e  $y$  tais que:

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ são:}$$

- a)  $x = -4$  e  $y = -1$                       c)  $x = -4$  e  $y = 0$                       e)  $x = 1$  e  $y = 0$   
 b)  $x = -4$  e  $y = 1$                       d)  $x = 1$  e  $y = -1$

**9.** Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ calcular: } 3A - 2B$$

**10.** Dadas as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ ,

calcular as matrizes  $X$  e  $Y$  no sistema abaixo:  $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

**11.** (PUC-SP) Dados  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

então  $A \cdot B - B \cdot A$ , vale:

a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$     d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     e)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

**12.** Dadas as matrizes  $A_{m \times n}$ ,  $B_{p \times q}$  e  $C_{r \times s}$ , dê as condições para que sejam possíveis os produtos: a)  $A \cdot B$  b)  $B \cdot A$  c)  $A \cdot C$  d)  $C \cdot B$

**13.** Quantos elementos tem uma matriz quadrada de ordem 5?

**14.** a) Determine o produto de  $A$  por  $B$ , sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Com os dados do item a, calcule  $B \cdot A$ .

## 8. Casos particulares

a) **Matriz identidade ou unidade:** é a matriz quadrada que possui os elementos de sua diagonal principal iguais a 1 e os demais elementos iguais a 0.

Indicamos a matriz identidade de  $I_n$ , onde  $n$  é a ordem da matriz. Ex.:

$$a) I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matriz identidade de ordem 2}$$

$$b) I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matriz identidade de ordem 3}$$

b) **Matriz transposta:** é a matriz obtida pela troca ordenada de linhas por colunas de uma matriz. Dada uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ , obtém-se uma outra matriz de ordem  $n \times m$ , chamada de transposta de  $A$ . Indica-se por  $A^t$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ então } A^t = [1 \ 2 \ 3]$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ então } B^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}, \text{ então } C^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Propriedades da matriz transposta: a)  $(A^t)^t = A$ ; b)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;  
c)  $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ , onde  $k \in \mathbb{R}$ ; d)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

c) **Matriz inversa:** dizemos que uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$  admite inversa se existe uma matriz  $A^{-1}$  tal que:

$$\boxed{A_n \cdot A_n^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_n = I_n}$$

Neste caso, dizemos que  $A^{-1}$  é a inversa de  $A$ . Ex.:

$$\text{Dada a matriz } A, \text{ determinar } A^{-1}: A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basta multiplicar as matrizes e igualar à matriz  $I_2$ .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos  $A^{-1}$ , como:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 0c & 3b + 0d \\ 0a + 1c & 0b + 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, podemos escrever os sistemas:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} 3a + 0c = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}} \\ 0a + 1c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0} \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} 3b + 0d = 0 \Rightarrow 3b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ 0b + 1d = 1 \Rightarrow 1d = 1 \Rightarrow \boxed{d = 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quando uma matriz quadrada não admite inversa, dizemos que é uma matriz singular.

### Exercícios resolvidos:

1. Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

verificar as propriedades das matrizes transpostas.

*Resolução:*

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e, portanto,  $(A^t)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$

b)  $A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 3-2 \\ -1+3 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$  (I)

$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & -1+3 \\ 3-2 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$  (II)

de onde concluímos que I = II

c) Seja  $k = -2$ , temos:  $(-2 \cdot A)^t = -2 \cdot A^t$

Verificando o 1º membro da igualdade, vem

$$-2A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow (-2A)^t = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \quad (\text{I})$$

E, do 2º membro, vem:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow -2 \cdot A^t = -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \quad (\text{II})$$

Portanto (I) = (II)

$$\text{d) } A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 14 \\ 7 & 26 \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} 19 & 7 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} \quad (\text{I})$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 7 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} \quad (\text{II})$$

Portanto (I) = (II)

2. Determinar a inversa da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:  $A_3 \cdot A_3^{-1} = I_3 \Rightarrow$  fazendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \text{ temos: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuada o produto do 1º membro da igualdade, temos os sistemas:

$$\begin{cases} 1a + 0d + 0g = 1 \Rightarrow a = 1 \\ 1a + 3d + 1g = 0 \Rightarrow 1 + 3d + g = 0 \Rightarrow g = -1 - 3d \Rightarrow g = -1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow g = \frac{1}{2} \\ 1a + 2d + 0g = 0 \Rightarrow 1 + 2d = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{2} \\ 1b + 0e + 0h = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 1b + 3e + 1h = 1 \Rightarrow 3e + h = 1 \Rightarrow h = 1 - 3e \Rightarrow h = 1 - 3 \cdot 0 \Rightarrow h = 1 \\ 1b + 2e + 0h = 0 \Rightarrow 2e = 0 \Rightarrow e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1c + 0f + 0i = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 1c + 3f + 1i = 0 \Rightarrow 3f + i = 0 \Rightarrow i = -3f \Rightarrow i = (-3) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow i = -\frac{3}{2} \\ 1c + 2f + 0i = 1 \Rightarrow 2f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

3. Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ , verificar se existe a inversa de A:

Resolução:

$A_2 \cdot A_2^{-1} = I_2$ . Seja  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , temos:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$   
Efetuando-se o produto do 1º membro da igualdade, temos:

$$\begin{cases} 1a + 0c = 1 \Rightarrow a = 1 \\ 5a + 0c = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 1b + 0d = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 5b + 0d = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Observe que temos dois valores para  $a$  e dois para  $b$ ; portanto não existe a inversa de A (A é singular).

### ≡ Exercícios propostos:

15. (UFSC) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e seja } P =$$

$(2A - C) \cdot B$ . Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz P.



**16.** (UFSE) A inversa da matriz  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  é a matriz:

a)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  c)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  e)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

**17.** (Fuvest-SP) Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$  determine  $a$  e  $b$  de modo que  $A \cdot B = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade.

**18.** (UFSC) Considere as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Seja  $M = (A + B^t) \cdot (A^t - B)$ , onde  $A^t$  e  $B^t$  são as matrizes transpostas de  $A$  e  $B$  respectivamente. O produto dos elementos  $m_{ij}$  com  $i = j$  da matriz  $M$  é:

**19.** (UFSC) Sendo  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$  com  $a_{ij} = i^2 - j$ ,  $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$  com  $b_{ij} = i + j$  e  $C = A \times B$ , determine a soma dos elementos da 3ª linha da matriz  $C$ .

**20.** (UFPA) Dadas as matrizes  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ , onde  $a_{ij} = \left[ \frac{2i - 3j}{i} \right]$  e

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , para que se tenha  $B^2 + X = 2A$ , a matriz  $X$  é:

a)  $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$  c)  $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$  e)  $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

**21.** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ , veri-

fique as propriedades da adição:

- a)  $A + B = B + A$  (comutativa)
- b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (associativa)
- c)  $A + 0 = A$  (elemento neutro)
- d)  $A + (-A) = 0$  (elemento oposto)

Modelo – Verificar a propriedade comutativa (a):

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+2 & 2-3 \\ 1+0 & -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & -3+2 \\ 0+1 & 5-4 \end{bmatrix} = B + A$$

Tente verificar as demais propriedades.

**22.** Com os dados da questão anterior, verificar as propriedades da multiplicação das matrizes, que são:

- a)  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  (associativa)
- b)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  (distributiva à direita)
- c)  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$  (distributiva à esquerda)

**1. Determinantes – Introdução** Um dos objetivos da teoria dos determinantes é solucionar, com mais rapidez, sistemas de equações de 1º grau com muitas equações e incógnitas.

Destacaram-se, no estudo dos determinantes, os matemáticos G. Cramer (1704-1752) e C. G. Jacobi (1804-1851).

**2. Definição** Determinante é um número real associado a uma matriz quadrada.

Para indicar o determinante, usamos barras. Seja A uma matriz quadrada de ordem  $n$ , indicamos o determinante de A por:

$$\det A \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \det A, \text{ lê-se determinante de A.}$$

**3. Determinante de uma matriz de 1ª ordem** A matriz de ordem 1 só possui um elemento. Por isso, o determinante de uma matriz de 1ª ordem é o próprio elemento. Ex.: Se  $A = [2]$ , então  $\det A = |2| = 2$

**4. Determinante de uma matriz de 2ª ordem** Numa matriz de 2ª ordem, obtém-se o determinante através da diferença do produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária. Ex.:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular o determinante das matrizes quadradas de 2ª ordem:

$$a) \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}. \text{Resolução:}$$

$$a) \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 18 - 10 = 8$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - (-4) \cdot 3 = 9 + 12 = 21$$

2. Determinar o valor de  $x$  nas equações:

$$a) \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$b) \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 4 & x+2 \end{vmatrix} = 0. \text{Resolução:}$$

$$a) \text{ Temos: } 3 \cdot x - (-2) \cdot 5 = 4 \Rightarrow 3x + 10 = 4 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Logo: } \boxed{S = \{-2\}}$$

$$b) \text{ Temos: } (x-2) \cdot (x+2) - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 16$$

$$x = \Rightarrow \pm 4 \Rightarrow \text{Logo: } \boxed{S = \{\pm 4\}}$$

### Exercícios propostos:

23. Calcular o valor dos determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 43 & 19 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{7} & 10 \\ -2 & 1 + \sqrt{7} \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

24. Calcular o valor de  $x$  nas equações:

$$a) |x| = -3$$

$$c) \begin{vmatrix} x & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$b) |5| = x - 2$$

25. (UFRN) Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ , o determinante do produto de  $A$  pela sua transposta vale: a) 56 b) 38 c) 42 d) 78 e) 30

**5. Regra de Sarrus** Esta técnica é utilizada para obtermos o determinante de matrizes de 3ª ordem.

Utilizaremos um exemplo para mostrar como aplicar a regra de Sarrus. Consideremos a matriz da 3ª ordem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \text{ A regra de Sarrus consiste em:}$$

a) repetir as duas primeiras colunas à direita do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

b) multiplicar os elementos da diagonal principal, e os elementos que estiverem nas duas paralelas a essa diagonal, conservando os sinais desses produtos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$3 \cdot 4 \cdot 8 = 96$   
 $2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$   
 $1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$

c) efetuar o produto dos elementos da diagonal secundária e dos elementos que estiverem nas duas paralelas à diagonal e multiplicá-los por -1

d) somar os resultados (I) e (II)

$$\det A = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0, \text{ portanto } \det A = 0.$$

$$(-1) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = -105$$

$$(-1) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 8 = -48$$

$$(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 = -72$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Achar o determinante de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Resolução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 2 - 8 - 3 - 2 = \boxed{3}$$

2. Calcular o valor de  $x$  na equação:

$$\begin{vmatrix} -2x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Resolução: Aplicando a regra de Sarrus, temos:}$$

$$\begin{vmatrix} -2x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2x & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - [(-3) \cdot (x-1)] - [(-2x) \cdot 4 \cdot 1] = 0$$

$$-1 + 3x - 3 + 8x = 0 \Rightarrow 11x - 4 = 0 \Rightarrow 11x = 4 \Rightarrow$$

$$x = \frac{4}{11}$$

## Exercícios propostos:

26. Calcular os determinantes:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

27. (Mack-SP) A solução da equação  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & 5 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = 0$  é:

a) 1 b) 58 c) -58 d)  $\frac{67}{9}$  e) 2

28. (PUC-RS) A solução da equação  $2x - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0$ , é:

a) -2 b)  $-\frac{1}{2}$  c) 0 d)  $\frac{1}{2}$  e) 2

**6. Menor complementar** É o determinante da submatriz de ordem 2, obtido da eliminação de uma linha e uma coluna de uma matriz quadrada de 3ª ordem, a partir de um de seus elementos. Ex.:

Seja  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ . Vamos indicar por  $D_{ij}$ , o determinante da

matriz que se obtém retirando-se de  $A$  a linha  $i$  e a coluna  $j$ . Ou seja, se queremos  $D_{21}$ , retiramos a 2ª linha e a 1ª coluna e calculamos o determinante de ordem 2 da submatriz. Temos então:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \textcircled{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Em relação ao elemento  $a_{21}$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}$$

**7. Cofator** É o número real igual ao produto de  $(-1)^{i+j}$  pelo menor complementar em relação ao elemento  $a_{ij}$ . Indica-se por  $A_{ij}$ , onde

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Sendo:  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  o cofator em relação ao elemento  $a_{21}$  é

dado por:  $A_{21} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \Rightarrow A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21}$

$$A_{21} = -1 \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Na matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ , obter: a)  $D_{11}$ , b)  $D_{12}$  e c)  $D_{13}$

Resolução:

$$\text{a) } D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 0 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = -14$$

$$\text{b) } D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 0$$

$$\text{c) } D_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 7 - 4 \cdot 0 = 7$$

2. Dada a matriz:  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ , obter: a)  $D_{22}$ , b)  $D_{23}$ , c)  $D_{32}$ , d)  $D_{33}$

Resolução:

$$\text{a) } D_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = 9 - 21 = -12; \text{ b) } D_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 8 - 14 = -6$$

$$\text{c) } D_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 6 - 12 = -6; \text{ d) } D_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 8 = -3$$

3. Na matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ , calcular os cofatores: a)  $A_{11}$ , b)  $A_{13}$ , c)  $A_{32}$

Resolução: a)  $A_{11} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11}$

$$A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{A_{11} = 23}$$

$$b) A_{13} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \Rightarrow A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} \Rightarrow A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{13} = 3}$$

$$c) A_{32} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \Rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2} D_{32} \Rightarrow A_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{32} = -8}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**29.** Sendo  $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ , obter:

a)  $D_{11}$  b)  $D_{12}$  c)  $D_{13}$  d)  $D_{21}$  e)  $D_{22}$  f)  $D_{23}$  g)  $D_{31}$  h)  $D_{32}$  i)  $D_{33}$

**30.** Dada a matriz  $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ , calcular os cofatores:

a)  $M_{12}$  b)  $M_{32}$  c)  $M_{23}$

**8. Teorema de Laplace** Para matrizes quadradas de ordem  $n \geq 2$ , o teorema de Laplace oferece uma solução prática no cálculo dos determinantes.

Pelo teorema, o determinante de uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  ( $n \geq 2$ ) é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou de uma coluna qualquer, pelos respectivos cofatores. Ex.:

Dada a matriz quadrada de ordem 3,  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ , vamos calcular  $\det A$  usando o teorema de Laplace.

Podemos calcular o determinante da matriz  $A$ , escolhendo qualquer linha ou coluna. Por exemplo, escolhendo a 1ª linha, teremos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = 1 \cdot (-21) \Rightarrow A_{11} = -21$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{12} = (-1) \cdot (-6) \Rightarrow A_{12} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = 1 \cdot (-12) \Rightarrow A_{13} = -12$$

Portanto, temos que:

$$\det A = 3 \cdot (-21) + 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-12) \Rightarrow \det A = -63 + 12 - 12$$

$$\boxed{\det A = -63}$$

### Exercício resolvido:

1. Calcular o determinante, por Laplace, dada:  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

*Resolução:* Neste exercício, convém escolher a 1ª coluna, pois há maior quantidade de “zeros”.

$$\det B = b_{11} \cdot B_{11} + b_{21} \cdot B_{21} + b_{31} \cdot B_{31}$$

$$\det B = 0 \cdot B_{11} + 0 \cdot B_{21} + (-2) \cdot B_{31} \Rightarrow \det B = 0 + 0 - 2 \cdot B_{31}$$

$$\det B = -2 \cdot B_{31}, \text{ então: } B_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow B_{31} = -13$$

$$\det B = -2 \cdot (-13) \Rightarrow \boxed{\det B = 26}$$

### $\Rightarrow$ Exercício proposto:

31. Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ , calcular o determinante, aplicando

Laplace.

**9. Determinante de uma matriz de ordem  $n > 3$**  Para obtermos o determinante de matrizes de ordem  $n > 3$ , utilizamos o teorema de Laplace e a regra de Sarrus.

Observe o exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz de 4ª ordem.

Escolhendo a 1ª linha para o desenvolvimento do teorema de Laplace, temos:

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}$$



$$\det A = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -4 & -6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -6 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -4 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Como os determinantes são, agora, de 3ª ordem, podemos aplicar a regra de Sarrus em cada um deles. Teremos, então:

$$\det A = 3 \cdot (188) - 1 \cdot (121) + 2 \cdot (61)$$

$$\det A = 564 - 121 + 122 \Rightarrow \boxed{\det A = 565}$$

### Exercício resolvido:

1. Dada  $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , calcular  $\det B$ .

**Resolução:** Vamos desenvolver o determinante em relação à 2ª linha, já que essa linha tem maior quantidade de "zeros":

$$\det B = b_{21} \cdot B_{21} + b_{22} \cdot B_{22} + b_{23} \cdot B_{23} + b_{24} \cdot B_{24}$$

$$\det B = b_{21} \cdot B_{21} + 0 + 0 + 0$$

$$\det B = b_{21} \cdot B_{21} \Rightarrow \det B = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det B = (-2) \cdot (-6) \Rightarrow \det B = 12}$$

### Exercícios propostos:

32. (FGV) Seja a raiz da equação:  $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$ ,

então o valor de  $x^2$ , é:

a) 16 b) 4 c) 0 d) 1 e) 64

**33.** Calcule o determinante, desenvolvendo por Laplace.

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

**10. Determinante de Vandermonde** Os determinantes do tipo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & 2c & 3c \\ c^2 & 4c^2 & 9c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x-3) & (x+5) & (x-1) \\ (x-3)^2 & (x+5)^2 & (x-1)^2 \end{vmatrix}$$

são chamados determinantes de Vandermonde. Observe que cada coluna é uma progressão geométrica com o primeiro termo igual a 1 (qualquer número elevado a zero é igual a um).

A segunda linha, com expoente igual a 1, é chamada *característica*, e é através dela que obtemos o determinante nestes casos.

O determinante de Vandermonde é obtido efetuando-se o produto de todas as diferenças entre os elementos da linha característica (da direita para a esquerda). Ex.:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & 2c & 3c \\ c^2 & 4c^2 & 9c^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & 2c & 3c \\ c^2 & (2c)^2 & (3c)^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{linha característica}$$

$$(2c - c) \cdot (3c - c) \cdot (3c - 2c) \Rightarrow \text{determinante} = c \cdot 2c \cdot c = 2c^3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x-3) & (x+5) & (x-1) \\ (x-3)^2 & (x+5)^2 & (x-1)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{determinante} &= [x+5 - (x-3)] \cdot [x-1 - (x-3)] \cdot [x-1 - (x+5)] \\ &= (x+5 - x+3) \cdot (x-1 - x+3) \cdot (x-1 - x-5) = -96 \end{aligned}$$

## 11. Propriedades dos determinantes

a) Se todos os elementos de uma linha ou de uma coluna são nulos, o determinante é nulo. Ex.:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

- b) Se uma matriz A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então o determinante é nulo. Ex.:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- c) Numa matriz cuja linha ou coluna foi multiplicada por um número  $k$  real, o determinante também fica multiplicado pelo mesmo número  $k$ .

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \xrightarrow{\times 2} \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 30 - 16 = 14$$

$$\text{Então: } \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

- d) Para duas matrizes quadradas de mesma ordem, vale a seguinte propriedade:  
 $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ .
- e) Uma matriz quadrada A será *inversível* se e somente se, o seu determinante for diferente de zero.

### ⇒ Exercícios Complementares:

34. Calcule os determinantes, aplicando Vandermonde.

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}$

258

35. (UE de Feira de Santana-BA)

Seja  $x$  o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ então } \sqrt{x} \text{ é:}$$

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

**36.** (Mack-SP) Dadas  $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

e  $B = \begin{vmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$ , tem-se:

a)  $\det A = 2 \det B$

b)  $\det A = \det B^t$

c)  $\det A^t = \det B$

d)  $\det B = 2 \det A$

e)  $\det A = \det B$

**37.** (Mapofei-SP) Calcule o valor

do determinante  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ .

**38.** A matriz  $A = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ , é tal

que  $\det(A^t) = \frac{2}{x}$ . O valor de  $x$  é:

a)  $\frac{1}{32}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{1}{5}$  d) 5 e) 32

**39.** Calcule o determinante e explique a sua resposta:

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

**40.** (UFPB) Se  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$  e

$f(x) = -x^2 + 3x + 2$ , então

$f(\det A)$  é igual a:

a) 12 b) -4 c) 10 d) 0 e) -8

# Capítulo XI

## SISTEMAS LINEARES

**1. Introdução** Dominando os conceitos de matrizes e de determinantes, podemos aplicar esse conhecimento para classificar e resolver os sistemas lineares.

**2. Definição** Entendemos por *sistema linear* um conjunto de equações lineares reunidas com o objetivo de se obterem soluções comuns a todas essas equações.

Exemplo: Num estacionamento há carros e motocicletas, num total de 70 veículos. A soma das rodas desses veículos é 180. Quantos são os carros e quantas são as motocicletas?

A partir do enunciado, podemos escrever um sistema linear.

Assim, designando por  $x$  as motocicletas e por  $y$  os carros, obtemos a seguinte equação: (I)  $x + y = 70$

Como as motocicletas têm 2 rodas e os carros têm 4, podemos escrever a equação: (II)  $2x + 4y = 180$

As equações (I) e (II) formam o sistema linear: 
$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 2x + 4y = 180 \end{cases}$$

A solução desse sistema nos fornecerá o número de automóveis e de motocicletas no estacionamento.

**3. Equação linear** Chamamos de equações lineares as equações de 1º grau que apresentam a forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , onde:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são *coeficientes*;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são *incógnitas*, ou *variáveis*;  $b$  é o *termo independente* da equação. Exemplo:

$$x + 3y = 4 \quad \begin{cases} 1 \text{ e } 3 \text{ são coeficientes das incógnitas} \\ x \text{ e } y, \text{ respectivamente;} \\ 4 \text{ é termo independente.} \end{cases}$$

Quando uma equação linear apresenta o termo independente igual a zero, dizemos que se trata de uma *equação linear homogênea*. Ex.:  $2x + y - z = 0$

**4. Solução de uma equação linear** Dada uma equação linear com  $n$  incógnitas:  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , temos que sua solução é a sequência de números reais  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  que, colocados correspondentemente no lugar de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tornam verdadeira a igualdade.

Quando a equação linear for *homogênea*, então ela admitirá pelo menos a solução  $(0, 0, \dots, 0)$ , chamada de *solução trivial*.

#### Exercícios resolvidos:

1. Decidir se são ou não lineares as equações:

a)  $x + 7y = 13$                       c)  $2x + \frac{5}{y} - z = 8$

b)  $5x_1 + \frac{3}{7}x_2 = 2$                       d)  $\sqrt{x} + y + z = 6$

Resolução: a) é uma equação linear; b) é uma equação linear;

c) não é uma equação linear, pois  $\frac{5}{y} = 5 \cdot \frac{1}{y} = 5 \cdot y^{-1} \neq y$ ; e

d) não é uma equação linear, pois  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \neq x$

2. Verificar quais das equações abaixo são equações lineares homogêneas: a)  $4x - y + 3 = 0$    b)  $3x_1 - 7x_2 = 5x_3$    c)  $x - 3y + z = \frac{0}{4}$

Resolução: a) não é uma equação linear homogênea, pois  $4x - y + 3 = 0 \Rightarrow 4x - y = -3 \neq 0$ ; b) é uma equação linear homogênea, pois  $3x_1 - 7x_2 = 5x_3 \Rightarrow 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0$ ; e c) é uma equação linear homogênea, pois  $x - 3y + z = \frac{0}{4} \Rightarrow x - 3y + z = 0$

3. Determine  $k$  na equação  $5x + 2y = 12$ , para que o par ordenado  $(k, -4)$  seja solução da equação.

Resolução: Sendo  $(k, -4)$  uma solução de  $5x + 2y = 12$ , então:  
 $x = k$  e  $y = -4$

Substituindo esses valores na equação, temos:  $5k + 2 \cdot (-4) =$

$$12 \Rightarrow 5k - 8 = 12 \Rightarrow k = \frac{20}{5} \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

#### Exercícios propostos:

1. Assinalar quais dos pares ordenados, satisfazem a equação  $2x + y = 7$

a) (1, 3); b) (2, 3); c) (3, 2); d) (3, 1); e) (4, -1); f) (-1, 4)

2. Calcular o valor de  $k$  na equação  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2$ , para que  $(k + 2, k)$  satisfaça a igualdade.

3. Decidir se são ou não lineares as equações:

a)  $2x + 3y + z = \sqrt{49}$       c)  $6x + \sqrt[3]{8} y - z = 0$   
b)  $\sqrt{x} - 2y = 9$       d)  $x^2 - 6y + 3z = 12$

4. Assinalar a(s) alternativa(s) que representa(m) equação(ões) linear(es) homogênea(s):

a)  $5x - 3y + 2z + 7 = 7$       c)  $13x_1 - 7x_2 = 0$   
b)  $3x_1 + 2x_2 - 5 = 0$       d)  $\sqrt{x_1} + 2x_2 = 0$

**5. Representação genérica de um sistema linear** Um sistema linear de  $m$  equações nas  $n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  são números reais.

Se o conjunto de números reais  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  torna verdadeiras todas as equações do sistema, dizemos que é *solução* do sistema linear.

Como as equações lineares são homogêneas quando  $b = 0$ , então, conseqüentemente, um sistema linear será homogêneo quando  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ .

Assim, o sistema admitirá a solução trivial:  $(0, 0, \dots, 0)$ .

### **Exercícios propostos:**

5. Dado o sistema  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ . Verifique se as ternas  $(1, 0, 1)$  e  $(0, -3, 1)$  são soluções do sistema.

6. Calcule  $k$  para que o sistema  $\begin{cases} -3x + 2y = k^2 - 25 \\ 2x - y = k + 5 \end{cases}$ , seja homogêneo.

### **6. Representação de um sistema linear através de matrizes**

Um sistema linear de  $m$  equações com  $n$  incógnitas pode ser escrito sob a forma de matrizes, bastando separar seus componentes por matriz. Assim:

a) matriz dos coeficientes das incógnitas ( $A_{m \times n}$ )

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

b) matriz coluna das incógnitas ( $X_{n \times 1}$ )

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

c) matriz coluna dos termos independentes ( $B_{n \times 1}$ )

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Portanto, podemos escrever o sistema sob a forma matricial:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dado o sistema  $S_1$   $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$ , escrever a equação matricial.

Resolução:  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  É claro que, se efetuarmos  $A \cdot X = B$ , teremos novamente o sistema  $S_1$ .



2. Escrever o sistema de equações lineares, dada a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Resolução:}$$

$$\begin{cases} 5x + 5y + 0z = 0 \\ x + 0y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

3. Dada a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & 0 \\ y & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -2 \\ 3y \end{bmatrix}, \text{ calcular o valor da expressão } 7x + 5y - 2z.$$

Resolução: Efetuando-se o produto das matrizes do 1º membro, temos:

$$\begin{cases} 2z + 2 + x = -x \\ 3z + 4 + 0 = -2 \\ yz - 6 + 4 = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z + x + x = 2 \\ 3z = -2 - 4 \\ yz - 3y = 6 - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(+2) \begin{cases} 2z + 2x = 2 \\ 3z = -6 \Rightarrow \boxed{z = -2} \\ y \cdot (-2) - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + x = 1 & -2 + x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 3} \\ z = -2 \\ -5y = 2 \Rightarrow 5y = -2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{5}} \end{cases}$$

O valor de  $7x + 5y - 2z$  é:  $7 \cdot 3 + 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 2 \cdot (-2) = 21 - 2 + 4 = \boxed{23}$

### Exercícios propostos:

7. Escrever as equações matriciais:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ x - 3y = -7 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ -2x + 2z = 6 \\ x + 5y - 3z = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

8. Escrever o sistema, sendo:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

9. Dada a equação matricial  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ , obter o sistema.

10. (UFPA) A solução X da equação matricial  $A \cdot X = I$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é:}$$

a)  $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$  c)  $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$  e)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

11. (UFSC) Dada a equação matricial  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & x \\ -1 & 3 & 0 \\ y & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ -2 \\ 3y \end{bmatrix}$ .

O valor da expressão  $5x + 4y + z$  é:

**7. Sistema normal** É o sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas ( $m = n$ ) e o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Exemplo:

Dado o sistema S:  $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ , temos  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23 \neq 0$ . Logo, o sistema linear S é *normal*.

**8. Regra de Cramer** Para a resolução de sistemas normais, utilizaremos a regra de Cramer, que será desenvolvida através do seguinte exemplo. Vamos determinar os valores reais de x e de y no sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = -4 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

a) Escrevemos a matriz A dos coeficientes:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) Escrevemos a matriz  $A_x$ , que se obtém pela substituição, em A, da coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes:

tes:  $A_x = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

c) Escrevemos a matriz  $A_y$ , que é obtida substituindo-se, em A, a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes:

$$A_y = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

d) Calculamos os valores de  $x$  e  $y$ :  $x = \frac{\det A_x}{\det A}$  e  $y = \frac{\det A_y}{\det A}$

e) Calculamos  $\det A$ ,  $\det A_x$  e  $\det A_y$  e obteremos os valores de  $x$  e  $y$ :

$$\det A = 15 - 2 = 13$$

$$\det A_x = -20 - 6 = -26 \Rightarrow x = \frac{26}{13} \Rightarrow \boxed{x = -2} \text{ e } y = \frac{26}{13} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\det A_y = 18 + 8 = 26$$

Logo,  $\boxed{(-2, 2)}$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Resolver o sistema, pela regra de Cramer: 
$$\begin{cases} x - 3y + z = -4 \\ 2x + y - 2z = 11 \\ -x + 2y - 5z = 15 \end{cases}$$

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -32$$

$$A_x = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 11 & 1 & -2 \\ 15 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_x = -64 \Rightarrow x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-64}{-32} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 11 & -2 \\ -1 & 15 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_y = -32 \Rightarrow y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-32}{-32} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 11 \\ -1 & 2 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_z = 96 \Rightarrow z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{96}{-32} \Rightarrow \boxed{z = -3}$$

Portanto,  $\boxed{(2, 1, -3)}$

2. (UFSC) Dado o sistema 
$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 5x + y - 3z = k \\ y + z = -2 \end{cases}$$
, o valor de  $k$  para  $y^2 = 0$  é:

Resolução:  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 18$

Como queremos o valor de  $k$  para  $y^2 = 0$ , então só nos interessa o valor do  $\det A_y$ :

$$A_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & k & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A_y = 2k - 42 \text{ e } y = \frac{\det A_y}{\det A} \Rightarrow y = \frac{2k - 42}{18}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(k - 21)}{18} \Rightarrow y = \frac{k - 21}{9}$$

$$\text{Substituindo: } y^2 = 0 \Rightarrow \left( \frac{k - 21}{9} \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k^2 - 2 \cdot 21k + 21^2}{81} = 0 \Rightarrow \frac{k^2 - 42k + 441}{81} = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau, temos:

$$k = \frac{42 \pm \sqrt{(-42)^2 - 4 \cdot 441}}{2} \Rightarrow k = \frac{42 \pm \sqrt{1.764 - 1.764}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{42}{2} \Rightarrow \boxed{k = 21}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**12.** (UFRG) A terna  $(a, b, c)$  é solução do sistema  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2z = 5 \\ 3y - 4z = 7 \end{cases}$ .

O produto  $a \cdot b \cdot c$  é igual a:

a) 12 b) -3 c) 6 d) 50 e) -132

**13.** (UFES) O valor da expressão  $x + y + z$ , onde  $x, y$  e  $z$  satisfazem o

sistema  $\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$  é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

**14.** Resolver o sistema pela regra de Cramer:  $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

**15.** (FEI-SP) Se  $x = A$ ,  $y = B$  e  $z = C$  são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + 4z = 10 \end{cases}, \text{ então } A \cdot B \cdot C \text{ vale:}$$

a)  $-5$  b)  $8$  c)  $-6$  d)  $-10$  e)  $5$

**16.** Calcular o sistema pela regra de Cramer: 
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 18 \end{cases}$$

**17.** (UFSC) Calcular o valor absoluto do produto das raízes do sistema:

$$S: \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ -y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

**18.** Calcular o valor da expressão  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^3}{4}$ , onde  $x$  e  $y$  satisfazem o sis-

tema: 
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$$

**19.** (UFMS) É dado o sistema: 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + by = 2 \end{cases}$$
. Calcular  $b$  de modo que o determinante da incógnita  $x$  seja igual ao próprio valor de  $x$ .

**9. Classificação de um sistema linear** Classificar um sistema linear é considerá-lo em relação ao número de soluções que ele apresenta. Assim, os sistemas lineares podem ser:

a) *Sistema impossível ou incompatível*: quando não admite solução.

O sistema não admite solução quando o  $\det A$  for nulo, e pelo menos *um* dos determinantes relativos às incógnitas for diferente de zero, isto é:  $\det A_1 \neq 0$  ou  $\det A_2 \neq 0$  ou ... ou  $\det A_n \neq 0$ .

b) *Sistema possível ou compatível*: quando admite pelo menos uma solução. Este sistema pode ser:

b.1) *Determinado*: quando admitir uma única solução.

O sistema é determinado quando  $\det A \neq 0$ .

b.2) *Indeterminado*: quando admitir infinitas soluções.

O sistema é indeterminado quando  $\det A = 0$  e os determinantes relativos a todas às incógnitas forem também nulos, isto é:  $\det A_1 = \det A_2 = \dots = \det A_n = 0$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Classifique o sistema: 
$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

*Resolução:* Temos:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = 5$

$\det A \neq 0$ . Logo, o sistema é possível e determinado.

Terá apenas uma solução.

2. Discutir o sistema: 
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$$

*Resolução:* Temos:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$ ,

então  $\det A = 0$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 12 \cdot 1 = 0, \text{ então } A_1 = 0$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - 4 \cdot 6 = 0, \text{ então } \det A_2 = 0$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado. Terá infinitas soluções, isto é, uma infinidade de pares ordenados satisfazem o sistema dado.

3. Discutir o sistema: 
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - 9y = 5 \end{cases}$$

*Resolução:*  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 5 = 7 \neq 0 \Rightarrow x = \det A_1 = \frac{7}{0} \Rightarrow \text{impossível.}$$

Logo, o sistema é impossível.

4. Discutir o sistema: 
$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 3x - 2y + 5z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolução:  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \det A \neq 0$

Logo, o sistema é possível e determinado.

5. Calcular o valor de  $k$  para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - ky = 40 \end{cases}, \text{ seja possível e indeterminado.}$$

Resolução: Devemos ter,  $\det A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -k \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = -k - 10 \Rightarrow 0 = -k - 10 \Rightarrow \boxed{k = -10}$$

6. Determine  $a$  e  $b$  para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4ax - by = 2 \end{cases}, \text{ seja indeterminado}$$

Resolução: Para que o sistema seja indeterminado, devemos ter  $\det A = 0$ , então:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4a & -b \end{vmatrix} = -2b + 4a \Rightarrow 0 = -2b + 4a$$

Dividindo por 2 os dois membros da equação, temos:  $-b + 2a = 0$  (I)

Nesse exercício, precisamos calcular o  $\det A_1$  ou o  $\det A_2$  para descobrir os valores de  $a$  e  $b$ . Como queremos que o sistema seja indeterminado, então esses determinantes deverão ser iguais a zero.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -b \end{vmatrix} = b + 2 \Rightarrow 0 = b + 2 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Substituindo o valor de  $b$  na equação (I), temos:

$$-(-2) + 2a = 0 \Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

(Note que poderíamos também ter calculado o valor de  $a$  através do  $\det A_2$ .)

7. Dado o sistema homogêneo  $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$ , verifique se ele é determinado ou indeterminado.

**Resolução:** O sistema homogêneo é sempre possível, pois admite sempre a solução trivial que, neste exercício, é  $(0, 0)$ . Note que, para um sistema homogêneo, sempre teremos os determinantes relativos às incógnitas iguais a zero. Neste exercício,  $\det A_1 = \det A_2 = 0$ . Assim, na discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente analisarmos o determinante dos coeficientes das incógnitas, isto é,  $\det A$ .

$$\text{Então: } \begin{cases} \det A \neq 0 \rightarrow \text{o sistema é determinado} \\ \det A = 0 \rightarrow \text{o sistema é indeterminado} \end{cases}$$

$$\text{Logo: } \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow \det A \neq 0, \text{ portanto é determinado}$$

8. (Fuvest-SP) O sistema  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ ax + by = c \end{cases}$ , tem solução se e somente se:

a)  $a \neq c$    b)  $b = c$    c)  $a = c$    d)  $a = b$  e  $c = 1$    e)  $b = 1$  e  $a - c = 1$

**Resolução:** Temos um sistema com 3 equações e 2 incógnitas ( $x$  e  $y$ ),  $S_{3 \times 2}$ , ou seja, um sistema não normal. Vamos resolvê-lo

pelo método da adição:  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ \hline 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Substituindo o valor de  $x = 1$  na equação  $x + y = 1$ , temos:

$$1 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 \Rightarrow y = 0$$

Substituindo os valores de  $x$  e de  $y$  na equação  $ax + by = c$ ,

$$\text{temos: } a \cdot 1 + b \cdot 0 = c \Rightarrow a + 0 = c \Rightarrow a = c$$

Alternativa correta: c

### ⇒ Exercícios complementares:

**20.** (UFSC) Determine o valor de  $m$  para que o sistema abaixo admita infinitas soluções:

$$\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

**21.** (UFMG) Se  $(x, y) = (1, 2)$  é a

solução do sistema  $\begin{cases} ax + by = 11 \\ bx - ay = 3 \end{cases}$

então os valores de  $a$  e  $b$  são:

a)  $a = -\frac{19}{5}$  e  $b = \frac{17}{5}$



b)  $a = -\frac{1}{3}$  e  $b = \frac{8}{3}$

c)  $a = 1$  e  $b = 5$

d)  $a = \frac{17}{3}$  e  $b = \frac{8}{3}$

e)  $a = \frac{19}{5}$  e  $b = \frac{17}{5}$

**22.** (Faap-SP) Dado o sistema

$$\begin{cases} 3x - ay = 1 \\ 6x + 4y = b \end{cases}$$

Calcular os coeficientes de  $a$  e  $b$  de forma que o sistema seja indeterminado.

**23.** (FMU-SP) O valor de  $a$  para que

o sistema  $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 3x - ay = 54 \end{cases}$  seja possível

e indeterminado é:

a)  $-6$  b)  $6$  c)  $2$  d)  $-2$  e)  $\frac{3}{2}$

**24.** (UFAC) A condição sobre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \text{ admita}$$

uma, e somente uma solução é que:

a)  $ad - bc = 0$

b)  $ad + bc = 0$

c)  $ad + bc$  seja diferente de zero

d)  $ad - bc$  seja diferente de zero

e)  $ab - cd = 0$

**25.** (FAAP-SP) Para que o sistema

linear  $\begin{cases} ax - by = 7 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$  admita uma

única solução, é necessário que:

a)  $a \neq -\frac{2b}{5}$  c)  $a \neq -\frac{5b}{2}$  e)  $a = -\frac{5b}{2}$

b)  $a = -\frac{2b}{5}$  d)  $a \neq \frac{2b}{5}$

**26.** O sistema linear  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ ax + by = 5 \end{cases}$  tem solução única para:

a) todo  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$

b)  $b \neq 2a$

c)  $b \neq a$

d) todo  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$

e) todo  $a > 0$  e  $b > 0$

**27.** (Mapofei) Determine o valor de  $k$  para que o sistema

$$\begin{cases} 3z - 4y = 1 \\ 4x - 2z = 2 \\ 2y - 3x = 3 - k \end{cases}$$

seja indeterminado.

**28.** (UFPB) Determinar o valor de  $k$  para que o sistema linear abaixo não tenha solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + 6z = 1 \\ 5x + 2y + kz = 0 \end{cases}$$

**29.** (FGV) O sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases} \text{ é:}$$

a) determinado b) impossível

c) determinado e admite como solução  $(1, 1, 1)$  d) indeterminado

e) n. d. a.

**30.** (FEI-SP) Para que valor de  $m$  o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ -x + my - 2z = 0 \\ -y + z = 3 \end{cases} \text{ é impossível?}$$

**31.** Calcular os valores de  $x$  e  $y$  no

sistema  $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \\ 2x + 4y = 28 \end{cases}$

**32.** (Fund. Carlos Chagas-SP) O

$$\text{sistema linear } \begin{cases} x + y = 0 \\ a^2x + y = 1 \end{cases}$$

é impossível se, e somente se:

- a)  $a \neq 1$  e  $a \neq -1$       d)  $a = -1$   
 b)  $a = 1$  ou  $a = -1$       e)  $a \notin \mathbb{R}$   
 c)  $a = 1$

**33.** (UFAM) Dado o sistema linear

$$\begin{cases} kx + 2y = 0 \\ 8x + ky = 0 \end{cases}$$

teremos que o sistema:

- a) é impossível, se  $k = 4$  ou  $k = -4$   
 b) é possível, se  $k = 4$ , e  $(2, 4)$  é solução  
 c) é possível, se  $k = -4$  e  $(-6, 3)$  é a única solução possível  
 d) tem solução única, se  $k \neq 4$  e  $k \neq -4$   
 e) é impossível, se  $k \neq 4$  ou  $k \neq -4$

**34.** (UFPA) No sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \\ x + 4y = a \end{cases}$  para que admita solução única, o valor de  $a$  é um número

- a) maior que 9      d) irracional  
 b) múltiplo de 5      e) ímpar  
 c) fracionário

**35.** (UFRG) As ternas ordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  são soluções distintas do sistema

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ ax + y + bz = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Então, o valor absoluto de  $a$  é:

- a)  $ab$       b)  $a$       c)  $b$       d)  $1$       e)  $0$

**36.** (UFPA) Os valores de  $a$  que fazem com que o sistema abaixo seja possível e determinado são:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + az = -4 \\ 2x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- a)  $a \neq 0$  e  $a \neq -3$       d)  $a = 0$  e  $a = -3$   
 b)  $a \neq 0$  e  $a \neq 3$       e)  $a \neq 3$   
 c)  $a = 0$  e  $a = 3$

**37.** (Fuvest-SP) O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases} \text{ é indeterminado para:}$$

- a) todo  $m$  real      d)  $m = -1$   
 b) nenhum  $m$  real      e)  $m = 0$   
 c)  $m = 1$

**38.** (UFPR) Com base nos estudos de matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, é correto afirmar que (some os valores correspondentes):

01) Se  $A$  é matriz de ordem 2, cujos elementos são definidos por  $a_{ij} = -1^{i+j} + 2 \cdot i - j$ , então o determinante de  $A$  é igual a 4.

02) Dada a matriz  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

tem-se  $B^2 = B$ .

04) Se  $M$  é matriz de determinante nulo, então é necessário que  $M$  tenha uma linha ou uma coluna de elementos todos nulos.

08) O sistema

$$\begin{cases} kx + y = 5 \\ x + (2 - k) \cdot y = 3 \end{cases}$$

onde as incógnitas são  $x$  e  $y$ , é determinado quando  $k \neq 1$ .

# Capítulo XII

## ANÁLISE COMBINATÓRIA E BINÔMIO DE NEWTON

### Análise Combinatória

**1. Introdução** Análise combinatória é a parte da Matemática que estuda os processos de contagem. Ela surgiu da necessidade de se calcular o número de possibilidades que podem ocorrer numa certa experiência, sem precisar descrever cada uma dessas possibilidades.

O estudo da análise combinatória começou no século XVI com o matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557), também conhecido por Tartaglia (que significa *gago*). A este, seguiram-se os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A análise combinatória é também o suporte da Teoria das Probabilidades, apoiando-se no Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

**2. Contagens diretas** Quando descrevemos todas as possibilidades de uma experiência ou evento, fazemos uma contagem direta.

No dia-a-dia, estamos acostumados a fazer contagens diretas como, por exemplo, quantos dias faltam para nosso aniversário, de quantas maneiras diferentes podemos combinar duas camisas com três calças diferentes etc.

Consideremos o exemplo dado acima: de quantas maneiras diferentes podemos combinar 2 camisas diferentes com 3 calças também diferentes?

Organizando uma tabela com todas as combinações possíveis, temos:

Número de maneiras	Combinação
1	Camisa 1 com calça 1
2	Camisa 1 com calça 2
3	Camisa 1 com calça 3
4	Camisa 2 com calça 1
5	Camisa 2 com calça 2
6	Camisa 2 com calça 3

Portanto temos 6 maneiras diferentes.

Em outro exemplo, vamos determinar quantas e quais são as quinas possíveis de uma pessoa que apostou na Quina os seguintes números: 11, 19, 21, 58, 64 e 66.

Quinas	Números
1	11, 19, 21, 58, 64
2	11, 19, 21, 58, 66
3	11, 19, 21, 64, 66
4	11, 19, 58, 64, 66
5	11, 21, 58, 64, 66
6	19, 21, 58, 64, 66

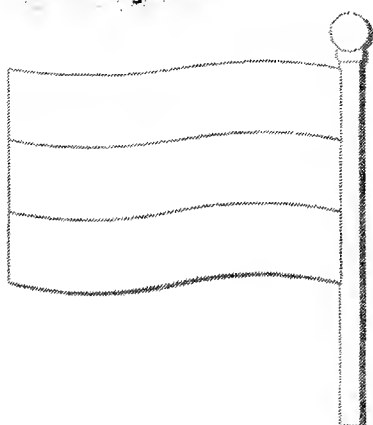
A pessoa apostou em 6 números e, como a Quina constitui-se de 5 números, temos as possíveis quinas, na tabela ao lado.

A pessoa, portanto, apostou em 6 quinas.

#### Exercícios resolvidos:

1. De quantas maneiras diferentes podemos pintar uma bandeira de 3 listras, usando as cores amarela ou verde?

**Resolução:** Cada listra tem 2 possibilidades: amarela ou verde.



Designando por

a = amarelo e b = verde, temos:

Número de Bandeiras	Cores Usadas		
	1ª listra	2ª listra	3ª listra
1	a	a	a
2	a	a	v
3	a	v	a
4	a	v	v
5	v	a	a
6	v	a	v
7	v	v	a
8	v	v	v

Logo, temos: 8 possibilidades diferentes.

2. Lançando-se uma moeda duas vezes seguidas, quais os resultados possíveis?

*Resolução:* Há duas possibilidades em cada lance: sair cara ou coroa. Designando  $c$  = cara e  $k$  = coroa, temos:

1º lance	2º lance
c	c
c	k
k	c
k	k

Temos, portanto: 4 possibilidades diferentes.

3. Lançando-se um dado duas vezes seguidas, quais as possibilidades de que a soma obtida seja igual a 9?

*Resolução:* Sabemos que o dado é um cubo, onde as faces são enumeradas de 1 a 6 e que duas faces opostas somam sempre 7. As possibilidades da soma obtida ser igual a 9, são:

1º lance	2º lance
3	6
4	5
5	4
6	3

Temos, portanto: 4 possibilidades.

4. Dado o conjunto  $E = \{1, 3, 4\}$ , obter todos os números de dois algarismos distintos com os elementos de  $E$ .

*Resolução:* 1 com 3  $\rightarrow$  13      3 com 1  $\rightarrow$  31      4 com 1  $\rightarrow$  41  
1 com 4  $\rightarrow$  14      3 com 3  $\rightarrow$  34      4 com 3  $\rightarrow$  43

Logo, os números são: 13, 14, 31, 34, 41 e 43

5. a) Quantos anagramas podemos formar com a palavra RUA? E quais são eles?

*Resolução:* Dá-se o nome de *anagrama*, quando trocamos de lugar as letras de uma palavra. Temos, assim: RUA, RAU, URA, UAR, ARU, AUR.

Portanto, podemos formar: 6 anagramas.

- b) Quantos e quais anagramas podemos formar com o nome OMAR?

*Resolução:* OMAR, OMRA, OAMR, OARM, ORAM, ORMA, MOAR, MORA, MAOR, MARO, MRAO, MROA, AOMR, AORM, AMOR, AMRO, ARMO, AROM, ROMA, ROAM, RMAO, RMOA, RAOM, RAMO.

Temos, portanto: 24 anagramas.

6. Quantas peças tem um jogo de dominó?

*Resolução:* Vamos descrever as peças:

	0	1	2	3	4	5	6
0	00	01	02	03	04	05	06
1		11	12	13	14	15	16
2			22	23	24	25	26
3				33	34	35	36
4					44	45	46
5						55	56
6							66

Contando as peças, temos:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \quad \text{ou} \quad 7 \times 7 - (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(28)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(49)} - \underbrace{\hspace{10em}}_{(21)}$$

(nº de peças de cada linha da tabela)      (nº de quadrinhos da tabela)      (nº de quadrinhos vazios da tabela)

Um jogo de dominó tem, portanto: **28 peças.**

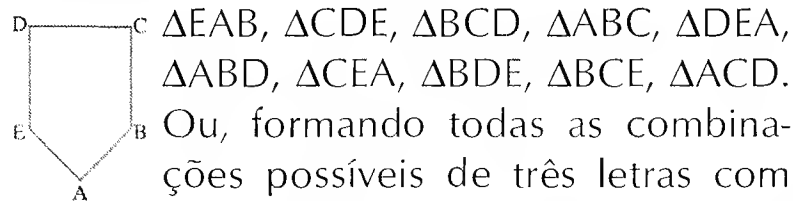
7. Lançando-se 5 moedas distintas, qual é o número de resultados possíveis?

**Resolução:** Designando as moedas por  $m_1, m_2, m_3, m_4$  e  $m_5$  e por  $c$  = cara e  $k$  = coroa, teremos 32 possibilidades:

Temos, portanto: **32 resultados possíveis.**

8. Quantos triângulos podemos construir com os vértices de um pentágono regular?

**Resolução:** Podemos construir 10 triângulos, consultando a figura:



Ou, formando todas as combinações possíveis de três letras com os vértices ABCDE do pentágono, temos os triângulos: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE e CDE.

Portanto, podemos construir **10 triângulos.**

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	
c	c	c	c	c	c c c c c
			k	k	c c c c k
		k	c	c	c c c k c
			k	k	c c c k k
	k	c	c	c	c k c c c
			k	k	c k c c k
		k	c	c	c k c k c
			k	k	c k c k k
	c	c	c	c	c k c c c
			k	k	c k c c k
k	k	c	c	c	k c k c c
			k	k	k c k c k
		k	c	c	k c k k c
			k	k	k c k k k
	c	c	c	c	k k c c c
			k	k	k k c c k
		k	c	c	k k c k c
			k	k	k k c k k

### ⇒ Exercícios propostos:

1. Dado o conjunto  $E = \{a, b, c, d\}$ , obter todos os elementos formados por duas letras distintas com os elementos de E.

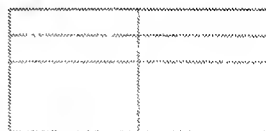
2. Lançando um dado duas vezes seguidas, quais as possibilidades de obtermos soma igual a 8?

**3.** Danila tem 4 saias e 2 blusas. De quantas e quais maneiras ela pode combinar as duas peças?

**4.** No lançamento de um dado e de uma moeda, quantos e quais resultados são possíveis? (designe por  $c$  = cara e por  $k$  = coroa)

**5.** Marília fez um jogo da Quina e apostou os números: 12, 26, 40, 45, 62 e 80. Em quantas quinas ela apostou? Quais foram essas quinas?

**6.** Quantos retângulos existem na figura abaixo?



**7.** Uma equipe de Matemática é formada por 4 alunos: Vinícius, Daniel, Thiago e Gabriel. O professor de Matemática vai escolher dois deles para expor um trabalho à classe. Quantas e quais são as duplas possíveis?

**8.** Quantos e quais são os anagramas da palavra ROMA?

**9.** Quantos segmentos são definidos pelos vértices de um hexágono regular?

**10.** Maria Luiza vai pintar uma bandeira que tem 4 listras, com as cores azul ou vermelha. Quantas e quais são as possibilidades diferentes?

**11.** (UFSC) Uma pessoa possui 5 camisas de cores diferentes entre si e 3 calças também de cores diferentes entre si. Sabendo-se que existem 3 camisas de mesma cor que as calças, determine o número de trajes completos (calça e camisa) com que essa pessoa poderá se vestir, onde somente apareçam calças e camisas de cores diferentes.

**12.** O professor de Educação Física vai escolher 2 jogadoras de vôlei para completar a seleção daquele colégio, dentre as três melhores alunas nessa categoria de esporte, que são: Vanessa, Andressa e Gabriela. Quantas e quais são as duplas possíveis?

**3. Diagrama de árvore** Vimos que, utilizando o método da contagem direta, descrevemos todas as possibilidades de uma experiência ou evento, porém, em outras situações, a contagem direta pode ser trabalhosa ou, até mesmo, impossível.

Suponha, por exemplo, que quiséssemos saber de quantas maneiras diferentes é possível preencher o volante da Quina, apostando cinco dezenas, mantendo o número 47 e combinando-o com os outros 79 números.

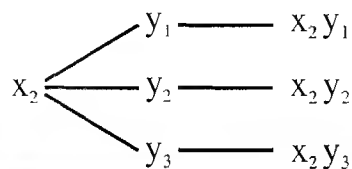
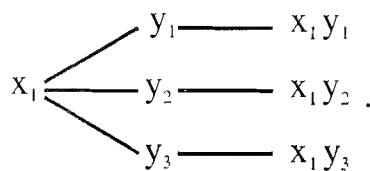
Esta seria uma tarefa para a análise combinatória, que calcularia o número total de possibilidades, sem a necessidade de descrever cada uma delas.

O *diagrama de árvore*, também conhecido como diagrama das possibilidades, é um esquema utilizado para enumerar todas as possibilidades de um evento com o objetivo de facilitar a resolução dos problemas de contagem.

Note que a árvore é construída da esquerda para a direita e que o número de “ramos” que saem de cada ponto corresponde ao número de possibilidades em que o evento pode ocorrer.

Por exemplo, retomemos o nosso problema de como combinar duas camisas com três calças diferentes. Pelo diagrama de árvore, temos:

Denominando por  $x$  = camisas e  $y$  = calças:

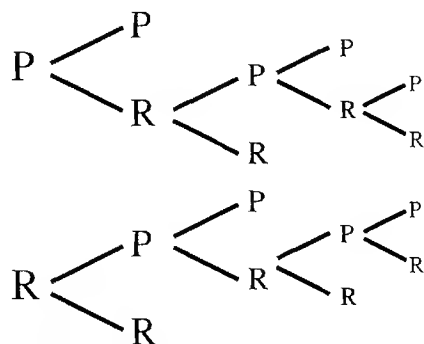


Temos, portanto, 6 possibilidades.

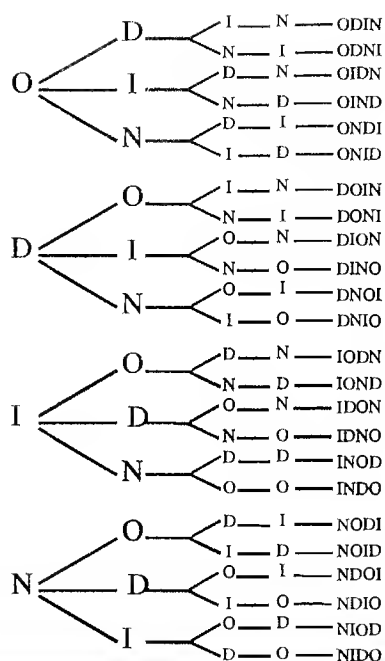
### Exercícios resolvidos:

1. Plínio e Rubens disputam entre si um torneio de tênis. O primeiro a ganhar 2 partidas seguidas ou 3 alternadas vence o torneio. Quais os resultados possíveis no torneio?

**Resolução:** Designamos por P = Plínio e R = Rubens. Através do diagrama de árvore, observamos o vencedor da partida:







### Exercícios propostos:

13. Representar no diagrama de árvore a quantidade de números naturais de dois algarismos distintos que podemos formar com os números 5, 6, 7 e 8.

14. Representar no diagrama de árvore as palavras começadas pela consoante *s* da palavra SAPO.

15. Duas equipes, X e Y, disputam um torneio de vôlei. A primeira a ganhar 2 jogos seguidos ou 4 jogos alternados vence o torneio. De quantas maneiras o torneio pode acontecer?

**4. Princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo** Nos casos em que as alternativas de escolha forem muitas, o diagrama de árvore é pouco prático. Para essas situações, usamos o *princípio fundamental da contagem* ou *princípio multiplicativo*, que é um método algébrico para determinar o número total de possibilidades.

Este método consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada etapa da experiência. Para entendermos melhor, observemos atentamente os exercícios resolvidos a seguir.

### Exercícios resolvidos:

1. Um teatro tem 5 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair do teatro?

**Resolução:** Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos:  $k_1$ : existem 5 possibilidades para entrar no teatro,  $k_2$ : existem 5 possibilidades para sair do teatro  $\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 5 \cdot 5 = 25$

Logo, existem 25 possibilidades para entrar e sair do teatro.

2. Nelson tem 3 camisas, 5 calças, 2 gravatas, 4 pares de sapatos e 1 paletó. De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir usando uma peça de cada conjunto?

*Resolução:*  $k_1 = 3$  camisas;  $k_2 = 5$  calças;  $k_3 = 2$  gravatas;  $k_4 = 4$  pares de sapatos;  $k_5 = 1$  paletó.

Então,  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = \boxed{120 \text{ maneiras diferentes}}$

3. Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

*Resolução:*  $k_1$ : é a etapa para escolher a centena  $\Rightarrow k_1 = 9$ ;  $k_2$ : é a etapa para escolher a dezena  $\Rightarrow k_2 = 9$ ;  $k_3$ : é a etapa para escolher a unidade  $\Rightarrow k_3 = 9$ .

Logo, temos:  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = \boxed{729 \text{ números}}$

4. No problema anterior, quantos serão os números, se os 3 algarismos forem distintos (isto é, se não for permitida a repetição dos algarismos)?

*Resolução:*  $k_1 = 9$  (centena);  $k_2 = 8$  (dezena), nesta etapa, eliminou-se um algarismo que foi utilizado em  $k_1$ ;  $k_3 = 7$  (unidade), nesta etapa, eliminou-se um algarismo que foi utilizado em  $k_2$ .

Portanto, temos:  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = \boxed{504 \text{ números}}$

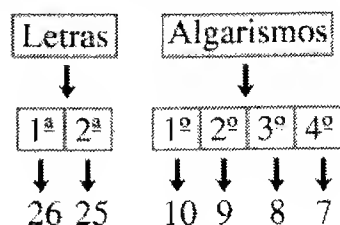
5. Quantas placas de veículos podem ser feitas, se forem usadas duas letras de um alfabeto de 26 letras, seguidas por 4 algarismos?

*Resolução:* Para formarmos uma placa de duas letras e quatro algarismos, passamos por 6 etapas:  $k_1$ : escolher a 1ª letra;  $k_2$ : escolher a 2ª letra;  $k_3$ : escolher o 1º algarismo;  $k_4$ : escolher o 2º algarismo;  $k_5$ : escolher o 3º algarismo;  $k_6$ : escolher o 4º algarismo.

Então, pelo princípio fundamental da contagem, temos:  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 \cdot k_6 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \boxed{6\,760\,000 \text{ possibilidades.}}$

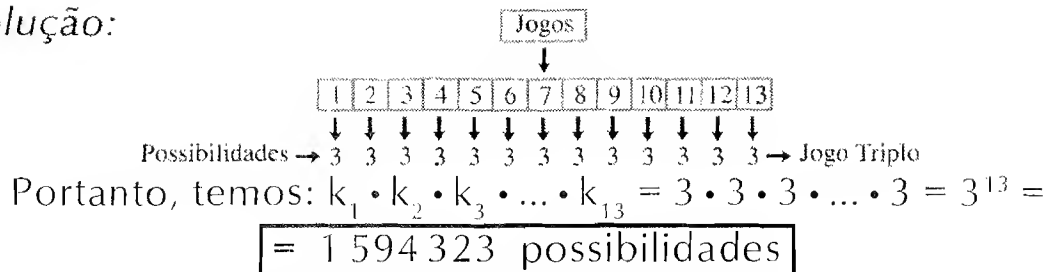
Vamos supor que, neste mesmo problema, não seja permitida a repetição de letras nem de algarismos. Neste caso, teremos:

Logo,  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 \cdot k_6 = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \boxed{3\,276\,000 \text{ possibilidades.}}$



6. Quantos são os prognósticos possíveis numa aposta de Loteria esportiva (com 13 jogos)?

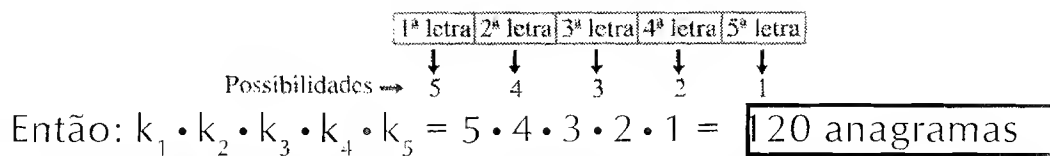
Resolução:



(Claro que, se você quiser ganhar na certeza, basta multiplicar o resultado pelo preço de uma aposta e terá a quantia que deverá ser gasta para isso!)

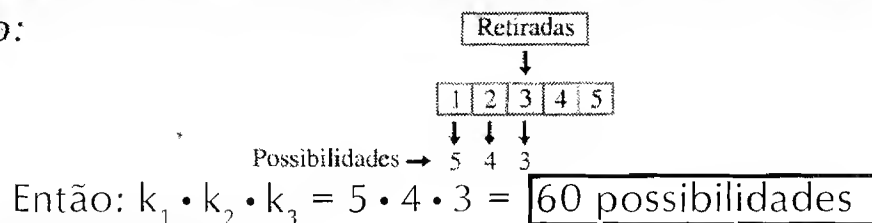
7. Quantos anagramas podemos formar com o nome PEDRO?

Resolução: Vamos aplicar o princípio fundamental da contagem para o cálculo dos anagramas. Temos 5 letras distintas: fixando-se uma letra como sendo a primeira do anagrama, restam 4 possibilidades para a 2ª letra. Fixando-se duas letras, restam 3 possibilidades para a 3ª letra, e assim sucessivamente.



8. Numa urna há 5 bolas de cores diferentes. De quantas maneiras podemos retirar 3 bolas, uma de cada vez, sem recolocá-las na urna?

Resolução:



→ E se as pusermos de volta?

Resolução: Cada bola pode ser retirada de 5 maneiras. Logo:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = \mathbf{125 \text{ possibilidades}}$$

### ≡ Exercícios propostos:

16. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9? E se não forem distintos?

17. Uma fábrica tem 5 modelos de carros e utiliza 8 cores. Quantas opções de compra tem o consumidor?

18. Nina tem 6 saias, 4 blusas, 3 pares de sapatos e 2 casacos. De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto?

19. Uma escola tem 6 portas. De quantas maneiras distintas uma

pessoa pode entrar e sair da escola?

**20.** Quantos números de telefone existem com o prefixo 279?

**21.** Quantos anagramas podemos formar com o nome MILTON?

**22.** Calcular quantos números de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal: a) sem repetir algarismos; b) sendo permitido repetir algarismos.

**23.** Quantas placas de automóveis podem ser formadas, usando duas letras de um alfabeto de 26 letras, seguidas por 2 algarismos e podendo ter as cores amarela ou preta? Quantas serão as placas se não for permitida a repetição de letras nem de algarismos?

**24.** De quantas maneiras distintas um sindicato de 26 membros pode eleger um presidente, um tesoureiro e um secretário, onde nenhuma pessoa pode ser eleita para mais de um cargo?

**25.** Um baralho tem 52 cartas. Retirando-se duas cartas, uma de cada vez, sem recolocá-las no baralho, quantas possibilidades existem?

**26.** (UFSC) Dispomos de cimento, 3 tipos de areia e 4 tipos de brita. Determine a quantidade de tipos diferentes de concreto que poderiam ser feitos, aparecendo os três elementos na sua formação.

**27.** (UFSC) Os presentes a uma determinada reunião, ao seu final, cumprimentaram-se mutuamente com apertos de mão. Os cumprimentos foram em número de 66. Determinar o número de pessoas presentes à reunião. (*Sugestão: resolver através do diagrama de árvore.*)

**5. Fatorial** Como pudemos observar, é comum aparecerem produtos de fatores naturais sucessivos em problemas de análise combinatória, tais como:  $3 \cdot 2 \cdot 1$  ou  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , por isso surgiu a necessidade de simplificarmos este tipo de notação, facilitando os cálculos combinatórios. Assim, produtos em que os fatores chegam sucessivamente até a unidade são chamados fatoriais e são indicados por um ! logo após o número.

Ex.:  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$  (lê-se *três fatorial* ou *fatorial de três*)

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$  (lê-se *cinco fatorial* ou *fatorial de cinco*)

Sendo  $n \in \mathbb{N}$ , podemos generalizar:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ se } n > 0$$

E, por convenção, temos:

$$\text{Se } n = 0, \text{ então } 0! = 1$$

### Exercícios resolvidos:

1. De quantas maneiras podemos organizar 7 alunos numa fila?

Resolução: 1º 2º 3º... 7º e 7º 6º 5º... 1º.

Logo, o número de possibilidades é igual ao produto de todos os números naturais de 7 até 1, isto é:  $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$   
 $= 5\,040$  maneiras

2. Simplificar as frações: a)  $\frac{9!}{7!}$  b)  $\frac{7!}{4!3!}$  c)  $\frac{3!+2!}{(0!+1!)^2}$

Resolução: a)  $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = \boxed{72}$

b)  $\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{35}$

c)  $\frac{3!+2!}{(0!+1!)^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{6+2}{(2)^2} = \frac{8}{4} = \boxed{2}$

3. Simplificar: a)  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$  b)  $\frac{(n-5)!}{(n-4)!}$

c)  $\frac{2n! - (2n+1)!}{2n!} \Rightarrow \frac{2n! - [(2n+1) \cdot (2n)!]}{2n!}$

Resolução: a) Vamos desenvolver os fatores até onde nos interessa, para simplificar:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!}{(n-1)!} =$$
$$\boxed{(n+1) \cdot n = n^2 + n}$$

b) Observe que:  $(n-4)! = (n-4-1) \cdot (n-5-1) \dots = (n-5)! \cdot (n-6)! \dots$

Então:  $\frac{(n-5)!}{(n-4)!} = \frac{(n-5)!}{(n-4) \cdot (n-5)!} = \boxed{\frac{1}{(n-4)!}}$

c)  $\frac{2n! - (2n+1)!}{2n!} \Rightarrow \frac{2n! - [(2n+1) \cdot (2n)!]}{2n!}$

Colocando  $2n!$  em evidência no numerador da fração, temos:

$$\frac{2n! - [1 \cdot (2n+1) \cdot 1]}{2n!} \Rightarrow 1 - (2n+1) = 1 - 2n - 1 = -2n$$

4. Calcular o valor de  $n$ : a)  $n! = 24$  b)  $(n-1)! = 120$

Resolução: a) Como  $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ , então:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{n = 4!}$

$$b) (n-1)! = 120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \Rightarrow (n-1)! = 5! \Rightarrow (6-1)! = 5!$$

$$\boxed{n = 6}$$

5. Resolver as equações: a)  $(n-2)! = 2 \cdot (n-4)!$  b)  $\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 10$

Resolução:

$$a) \frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 2 \Rightarrow \frac{(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)!}{(n-4)!} \Rightarrow (n-2) \cdot (n-3) = 2$$

Efetuada o produto no 1º membro da equação, vem:

$$n^2 - 5n + 6 = 2 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 - 2 = 0 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0$$

$$\text{equação de 2º grau} \Rightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow n = 4 \text{ ou } n = 1$$

$$\text{Se } n = 1, \text{ então: } (1-2)! = 2 \cdot (1-4)! \Rightarrow \underset{\notin \mathbb{N}}{(-1)!} \neq 2 \cdot \underset{\notin \mathbb{N}}{(-3)!}$$

Assim,  $n = 1$  não satisfaz a equação. Portanto,  $n = 4 \Rightarrow \boxed{S = \{4\}}$

$$b) \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 10 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(2 \cdot 1) \cdot (n-2)!} = 10 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 10$$

$$n^2 - n = 20 \Rightarrow n = \frac{n}{2} \Rightarrow n = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$$n = 5 \text{ ou } n = -4, \text{ mas } n = -4 \notin \mathbb{N}, \text{ portanto: } \boxed{S = \{5\}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

28. Simplificar: a)  $\frac{7!}{5!}$  b)  $\frac{10!7!}{5!9!}$  c)  $\frac{15! - 13!}{13 \cdot 12!}$

29. Simplificar:

a)  $\frac{(n-6)!}{(n-5)!}$  b)  $\frac{x!}{x \cdot (x-2)!}$  c)  $\frac{n!}{(n-3)!}$  d)  $\frac{(n+2)! - (n-1)!}{n!}$

30. Calcular o valor de  $n$ :

a)  $n! = 6$  b)  $n! = 720$  c)  $(n+1)! = 720$  d)  $(n-1)! = 5040$

31. Resolver as equações:

a)  $\frac{(x+1)!}{x!} = 5$  b)  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$  c)  $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 20$  d)  $\frac{n! + (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{8}$

**6. Tipos de agrupamento** Até agora, vimos agrupamentos *sem elementos repetidos*. Este tipo de agrupamento denomina-se *simples*.

Basicamente, podemos observar dois tipos de agrupamentos, aqueles em que a ordem dos elementos:

a) é importante e b) *não* é importante.

Os agrupamentos em que a ordem dos elementos é importante, são chamados *arranjos* ou *permutações*. Diferenciaremos esses dois tipos de agrupamentos mais adiante.

Quando a ordem dos elementos não é importante, temos uma *combinação simples*.

**7. Arranjos simples** Num conjunto A com  $n$  elementos, são arranjos simples todos os grupos formados por  $p$  dos  $n$  elementos com  $p \leq n$ , diferindo entre si pela ordem ou natureza dos elementos.

Notação:

$A_{n,p}$ onde: n: número total de elementos p: número de elementos em cada grupo
---

Se partirmos do princípio fundamental da contagem, teremos  $A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$ , considerando um arranjo de  $p$  fatores.

Se multiplicarmos a expressão por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ , obtemos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

Decompondo o fatorial, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{(n-p)}$$

Ora,  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , nada mais é do que  $n!$ , por isso podemos escrever a equação também sob a forma  $\frac{n!}{(n-p)!}$ . Portanto, para determinarmos quantos arranjos simples poderão ser formados a partir de um conjunto de  $n$  elementos

tomados  $p$  a  $p$ , utilizamos a fórmula: 

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
-------------------------------

**Exercícios resolvidos:**

1. Calcular o valor de  $A_{6,2}$

**Resolução:** Temos  $n = 6$  e  $p = 2$ . Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} \Rightarrow A_{6,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} \Rightarrow \boxed{A_{6,2} = 30}$$

2. Resolver as equações: a)  $A_{n,2} = 2$  e b)  $A_{x,2} = 9 \cdot A_{x,1}$

Resolução: a) Temos:  $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!}$

$$A_{n,2} = 2 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 2 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 2 \Rightarrow n^2 - n = 2$$

$$n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$$

$$b) A_{x,2} = 9 \cdot A_{x,1} \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x-1)!} \Rightarrow$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 9 \cdot \frac{(x) \cdot \cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}} \Rightarrow x^2 - x = 9x \Rightarrow x^2 - x - 9x = 0$$

$$x^2 - 10x = 0 \Rightarrow \cancel{x} \cdot \underline{(x-10)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{não satisfaz} \\ x = 10 \end{cases} \quad \boxed{S = \{10\}}$$

3. Dez meninas apostam uma corrida. De quantos modos diferentes pode ser formado o grupo das três primeiras colocadas?

Resolução: Observe que os grupos formados são arranjos simples, pois: a) os elementos de cada grupo são distintos; b) os grupos diferem pela ordem dos elementos ou pela natureza deles.

Assim, temos: número total dos elementos:  $n = 10$ ; número total dos elementos de cada grupo:  $p = 3$

Substituindo esses valores na fórmula  $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ , temos:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} \Rightarrow A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \boxed{720}$$

Logo, podemos ter 720 modos diferentes de formar tal grupo.

4. Considere a palavra MATRIZES. Quantos grupos de 4 letras distintas podemos formar:

- com as letras dessa palavra?
- começando com a letra T?
- terminando com as letras ZE?
- tal que contenha a letra A?
- tal que não contenha a letra A?

Resolução: a) Temos  $n = 8$  e  $p = 4$ , isto é: o número de arranjos simples de 8 letras, tomadas 4 a 4, é:



$$A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \boxed{1680}$$

b) O número total de elementos é 8, então, começam pela letra T:  $8-1 = 7 = n$

Os arranjos eram tomados 4 a 4, mas, retirando a letra T (uma letra):  $4-1 = 3 = p$ . Teremos, assim, arranjos tomados 3 a 3.

$$\text{Então: } A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \boxed{210}$$

c)  $n = 8-2$  (ZE)  $\Rightarrow n = 6$  e  $p = 4-2 \Rightarrow p = 2$

$$\text{Então, temos: } A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \boxed{30}$$

d) Vamos retirar a letra a e formar os agrupamentos com as 7 letras restantes, tomadas 3 a 3. Para cada um deles, existirão 4 maneiras de colocar o A. (Por exemplo: com TRI, teremos o grupo ATRI, TARI, TRAI, TRIA).

$$\text{Logo, teremos: } 4 \cdot A_{7,3} = \frac{4 \cdot 7!}{(7-3)!} = \frac{4 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!)}{4!} = 4 \cdot (210) = \boxed{840}$$

e) Retiramos novamente a letra A do conjunto das possibilidades e formamos os arranjos simples de 7 elementos, 4 a 4. Assim,  $A_{7,4} = 840$ .

Note que, como qualquer um dos agrupamentos formados contém ou não a letra A, devemos ter:

$$A_{8,4} = 4 \cdot A_{7,3} + A_{7,4}$$

Provando algebricamente:

$$A_{8,4} = \frac{4 \cdot 7! + 1 \cdot 7!}{4!3!} = \frac{4 \cdot 7!}{4 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 7!}{3!} = \frac{7!}{3!} + \frac{7!}{3!} = \frac{2 \cdot 7!}{3!} = 2 \cdot 840 = \boxed{1680}$$

### Exercícios propostos:

32. Calcular o valor de: a)  $A_{10,3}$  e b)  $A_{3,2}$

33. Resolver a equação:  $A_{x,2} = 4x + 6$

34. (UFPI) Se o número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados dois a dois é igual a 56, então  $(n-3)!$  é igual a:

a) 6   b) 24   c) 120   d) 720   e) 5040

**35.** (Fuvest-SP) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

**36.** O professor escolhe dois alunos dentre os 30 alunos de uma sala de aula e oferece uma bola para um deles e um livro para o outro. O número total de maneiras de premiar dois alunos desta classe é:

a) 870   b) 435   c) 650   d) 325   e) 324

**8. Permutações simples** A permutação é um arranjo de ordem máxima, ou seja, faz uso de todos os elementos do conjunto ( $p = n!$ ). Desta forma, temos:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} \text{ e } P_n = \frac{n!}{0!} \Rightarrow P_n = \frac{n!}{1} \therefore \boxed{P_n = n!}$$

Onde  $P_n$  é o número total de permutações simples de  $n$  elementos distintos.

### Exercícios resolvidos

1. Calcular o valor de: a)  $P_5$  e b)  $3 \cdot A_{5,2} = 2 \cdot P_4$

**Resolução:** a)  $n = 5 \Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{120} \Rightarrow P_5 = 120$

b)  $A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = \boxed{20} \Rightarrow P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Então:  $3 \cdot A_{5,2} - 2 \cdot P_4 = 3 \cdot 20 - 2 \cdot 24 = 60 - 48 = \boxed{12}$

2. Quantos são os anagramas: a) da palavra AMOR? b) do nome ANITO, que começam por vogal?

**Resolução:** a) Como temos 4 letras distintas, então o arranjo é uma permutação simples, onde:  $n = 4 \Rightarrow P_n = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

**24 anagramas**

b) Temos 3 vogais: A, I e O. Suponha que quiséssemos saber quantos são os anagramas que começam pela vogal A. Teríamos então uma  $P_4$  e seria suficiente calcular as permutações com as letras NITO, colocando-se o A na frente delas (exemplo: ANITO, AINTO, ATNIO etc). Faríamos o mesmo com as vogais I e O.

Desta forma, o total de permutações será:

$3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 3 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 3 \cdot 24 = 72 \Rightarrow \boxed{72 \text{ anagramas}}$

3. De quantas maneiras distintas podemos arrumar 5 livros diferentes em uma prateleira?

**Resolução:**  $n = 5 \Rightarrow P_n = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \Rightarrow \boxed{120 \text{ maneiras}}$

4. (Fuvest-SP) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma

serão necessários aproximadamente:

- a) 100 dias   b) 10 anos   c) 1 século   d) 10 séculos   e) 100 séculos

**Resolução:** O número de dias necessários para esgotar todas as possíveis seqüências é:  $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$  dias  $\Rightarrow 10\,000$  anos

Portanto,  $10! \Rightarrow 10\,000$  anos, ou seja, aproximadamente 100 séculos.

Alternativa correta: e

### Exercícios propostos:

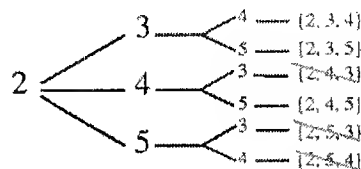
- 37.** Calcular o valor da expressão:  $3 \cdot P_2 + 2 \cdot A_{10,3}$
- 38.** Calcular o número de anagramas possíveis: a) da palavra AMIGO b) da palavra ESTUDAR, que começam por vogal.
- 39.** (Fuvest-SP) Quantos anagramas da palavra FUVEST começam e terminam por vogal?

**9. Combinações simples** Denomina-se combinação simples todo o subconjunto formado por  $p$  dos  $n$  elementos de um conjunto. Difere do arranjo porque, aqui, a ordem não é importante. Observe o exemplo:

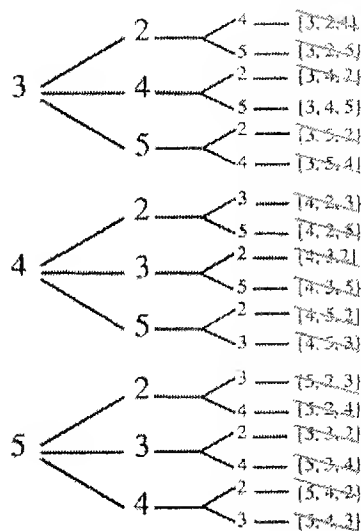
Num conjunto  $E = \{2, 3, 4, 5\}$ , os subconjuntos  $\{2, 3, 4\}$  e  $\{4, 2, 3\}$  são iguais, não importando a ordem em que aparecem seus elementos.

Observe o diagrama de árvore ao lado:

Temos 4 subconjuntos:  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 5\}$  e  $\{3, 4, 5\}$ :



Note que, para se obter o número de subconjuntos, basta determinarmos o número de arranjos simples e dividir esse resultado por seis ( $24 \div 6 = 4$ ). Ora, o fatorial do número de elementos de cada subconjunto também é seis ( $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ), donde podemos concluir que o número de combinações de  $n$  elementos em grupos de  $p$  elementos é igual ao número de arranjos de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  e divididos por  $p!$ , ou seja:



$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Logo, para determinarmos a combinação simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , utilizamos a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Observe que, no nosso exemplo, cada combinação simples gera 6 arranjos simples. Assim, por exemplo:

$$\{2, 3, 4\} \rightarrow \begin{array}{l} 234, 243, 324, 342, 423 \text{ e } 432 \\ (1 \text{ combinação}) \qquad (6 \text{ arranjos}) \end{array}$$

Daí a proporcionalidade:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ combinação} \qquad \qquad \qquad 6 \text{ arranjos} \\ C_{4,3} \text{ combinações} \qquad \qquad \qquad A_{4,3} \text{ arranjos} \end{array}$$

$$\text{Então: } \frac{1}{C_{4,3}} = \frac{6}{A_{4,3}} \Rightarrow 6 \cdot C_{4,3} = 1 \cdot A_{4,3}$$

$$C_{4,3} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{6} = \frac{\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1}}{6} = \frac{24}{6} =$$

$$= 4 \text{ combinações simples ou subconjuntos.}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular: a)  $C_{8,2}$  e b)  $\frac{C_{7,3} + C_{6,4}}{C_{5,2}}$

Resolução: a) Temos:  $n = 8$  e  $p = 2$   $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(2 \cdot 1)6!} = 28 \Rightarrow C_{8,2} = 28$$

$$\text{b) } \frac{\frac{7!}{3!4!} + \frac{6!}{4!2!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(3 \cdot 2 \cdot 1)4!} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!(2 \cdot 1)}}{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(2 \cdot 1)3!}} = \frac{35 + 15}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\frac{C_{7,3} + C_{6,4}}{C_{5,2}} = 5$$

2. Calcular o valor da expressão:  $X = 2 \cdot P_3 \cdot A_{4,2} \cdot C_{5,2}$

Resolução: Temos:  $X = 2 \cdot 3! - \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!} = 2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) - \frac{4!}{2!} + \frac{5!}{2!3!}$

$$= 2 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(2 \cdot 1)3!} = 12 - 12 + 10 = 10 \Rightarrow \boxed{X = 10}$$

3. Calcular o valor de  $x$  na equação:  $C_{x,2} = 10$

Resolução: Temos:  $\frac{x!}{2!(x-2)!} = 10 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{2 \cdot 1 \cdot (x-2)!} = 10 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 20$

$$x^2 - x = 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -4 \text{ (não satisfaz)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{5\}}$$

4. Com 8 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas?

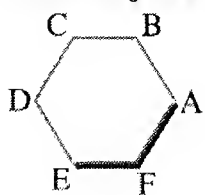
Resolução: Temos um típico problema de combinação simples, pois teremos grupos formados, onde os elementos de cada grupo são distintos e um grupo difere do outro apenas pela natureza dos elementos e não pela ordem deles, isto é, sendo um grupo composto, por exemplo, por: Rosângela, Sandra e Tânia  $\Rightarrow \{R, S, T\}$ , invertendo-se a ordem dessas pessoas, continuamos com a mesma comissão. Temos, então:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(3 \cdot 2 \cdot 1)5!} = \boxed{56 \text{ comissões}}$$

5. Em relação aos vértices do hexágono regular, pede-se:

a) quantos segmentos de reta podem ser formados com extremos nos vértices do hexágono; b) quantas diagonais tem o hexágono.

Resolução: a) Observando a figura:



Vamos escolher 2 pontos para cada segmento, por exemplo:  $\overline{AB} = \overline{BA}$ . Temos, então, o número de segmentos dado por:  $n = 6$  e  $p = 2$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = \boxed{15 \text{ segmentos possíveis}}$$

b) Temos 15 segmentos possíveis. Desses, alguns são lados do hexágono (como,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  etc.) e outros são diagonais (como,  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BE}$  etc.). Logo, subtraindo o número de lados do número total, temos 6 lados.

Portanto:  $n^\circ$  de segmentos total -  $n^\circ$  de lados =  $n^\circ$  de diagonais.

$$\text{Assim: } 15 - 6 = \boxed{9 \text{ diagonais}}$$

6. Cristina fez um jogo na Sena, apostando os seguintes números: 10, 12, 24, 25, 27 e 43. Pergunta-se: a) em quantas quinas ela jogou? b) em quantas quadras ela jogou? c) em quantos ternos ela jogou?

Resolução: a)  $C_{6,5} = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!} = \boxed{6 \text{ quinas}}$

b)  $C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!(2 \cdot 1)} = \boxed{15 \text{ quadras}}$

c)  $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \boxed{20 \text{ ternos}}$

7. Num colégio há 7 professores de Matemática, 5 de Física e 4 de Química. Quantas comissões podemos formar com 3 professores de cada disciplina?

Resolução: Como a ordem dos integrantes numa comissão não importa, estamos diante de uma questão de combinação simples. Como as comissões devem ter 3 professores de cada disciplina, devemos escolher os 3 matemáticos, depois, os 3 físicos e então os 3 químicos. Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$C_{7,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{4,3} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(3 \cdot 2)4!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!(2 \cdot 1)} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{3!1} = 35 \cdot 10 \cdot 4 = \boxed{1\,400 \text{ comissões}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

40. Calcular: a)  $C_{6,1}$  b)  $C_{7,0}$  c)  $C_{5,5}$

41. Calcular o valor da expressão:  $X = 3 \cdot A_{10,2} - 2 \cdot P_4 + C_{10,1}$

42. Resolver a equação:  $11 \cdot C_{x,2} = C_{x+2,4}$

43. No final de uma reunião, foram trocados 28 apertos de mãos. Sabendo-se que cada pessoa cumprimentou todas as outras, quantas pessoas havia nessa reunião?

44. Numa competição entre 10 participantes, determinar o número de possibilidades que podem ser formadas entre os 4 primeiros colocados.

45. Uma urna contém 5 bolas de cores distintas (preta, branca, azul, verde e amarela). Calcular as possibilidades diferentes:

a) se retirarmos 3 bolas de uma só vez; b) se retirarmos 3 bolas, uma de cada vez e recolocando na urna as sorteadas.

**46.** a) Quantas retas são determinadas por 7 pontos coplanares, dos quais 3 estão em linha reta?

b) Calcular o número de diagonais de um decágono regular.

**47.** Retirando-se 5 cartas de um baralho de 52 cartas, quantas possibilidades existem de saírem 3 valetes nesta retirada?

**10. Agrupamentos com repetição** Até agora vimos agrupamentos em que não se repetem elementos. Entretanto, existem casos em que os elementos de um conjunto repetem-se para formar novos subconjuntos. Nestes casos, devemos usar fórmulas de *agrupamentos com repetição*. Assim, teremos:

a) arranjo com repetição;

b) permutação com repetição;

c) combinação com repetição.

**a) Arranjo com repetição:** Arranjo com repetição, ou arranjo completo, é um grupo de  $p$  elementos de um dado conjunto, com  $n$  elementos distintos, onde a mudança de ordem determina grupos diferentes podendo porém, ter elementos repetidos.

Indicamos o arranjo completo por  $A R_{n, p}$ .

No arranjo simples, pelo princípio fundamental da contagem, tínhamos:

$$A_{n, p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$$

porque ele não admitia repetições. No arranjo com repetição, temos todos os elementos do conjunto à disposição a cada escolha, por isso, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$A R_{n, p} = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \text{ (com } p \text{ fatores)}$$

$$A R_{n, p} = n^p$$

### Exercícios resolvidos:

1. Considerando o conjunto  $E = \{a, b, c\}$ , calcular o número de arranjos com repetição de classe (ou ordem) 2 de  $E$ .

$$\text{Resolução: } \left. \begin{array}{l} (a, a), (a, b), (a, c) \\ (b, a), (b, b), (b, c) \\ (c, a), (c, b), (c, c) \end{array} \right\} \Rightarrow 9 \text{ arranjos com repetição}$$

Note que, utilizando a fórmula dos arranjos com repetição, obtemos o mesmo resultado:

$$\begin{cases} n = 3 \\ p = 2 \end{cases}, \text{ então } A R_{n,p} = n^p \Rightarrow A R_{3,2} = 3^2 =$$

9 arranjos com repetição

2. Seja o conjunto  $F = \{a, b\}$ . Calcular o número de arranjos com repetição de classe (ou ordem) 3 de  $F$ .

Resolução:  $\left. \begin{array}{l} (a, a, a), (b, b, b) \\ (a, a, b), (b, b, a) \\ (a, b, b), (b, a, a) \\ (a, b, a), (b, a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \text{ arranjos com repetição}$

Utilizando a fórmula dos arranjos com repetição, obtemos o mesmo resultado:

$$\begin{cases} n = 2 \\ p = 3 \end{cases} \Rightarrow A R_{n,p} = n^p \Rightarrow A R_{2,3} = 2^3 = 8$$

3. Quantas chapas de automóveis compostas de 2 letras nas duas primeiras posições, seguidas por quatro algarismos nas demais posições (sendo 26 letras do nosso alfabeto e sendo os algarismos do sistema decimal) podem ser formadas?

Resolução: O número de pares de letras que poderão ser utiliza-

1ª 2ª

das é:  $\downarrow \downarrow$ , pois não há condição de que sejam distintas  
 $\begin{matrix} 26 & 26 \end{matrix}$   
e podem, portanto, se repetir.

$$\text{Assim, temos: } A R_{26,2} = 26^2 = 676$$

A quantidade de quádruplas de números que poderão ser

1ª 2ª 3ª 4ª

utilizadas nas chapas é:  $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$   
 $\begin{matrix} 10 & 10 & 10 & 10 \end{matrix}$

$$\text{Assim, } A R_{10,4} = 10^4 = 10\,000$$

Então, o número total de chapas que poderão ser feitas é:

$$676 \cdot 10\,000 = \boxed{6\,760\,000 \text{ placas}}$$

Observação: caso não pudesse ser utilizada, por exemplo, a seqüência AB 0000, isto é, número de chapa com 4 zeros, teríamos:

$$A R_{10,4} = 676 \cdot 10^4 - 10^4 = 10^4 \cdot (676 - 1)$$



**b) Permutação com repetição:** Assim como na permutação simples, a diferença entre arranjo e permutação é que esta faz uso de todos os elementos do conjunto. Na permutação com repetição, como o próprio nome indica, as repetições são permitidas. Na permutação com repetição, podemos estabelecer, entre o número de elementos  $n$  e as vezes em que o mesmo elemento aparece, a fórmula.

$$\begin{array}{lll} a, a, a, \dots, a & \rightarrow & \alpha \text{ elementos de } a \\ b, b, b, \dots, b & \rightarrow & \beta \text{ elementos de } b \\ c, c, c, \dots, c & \rightarrow & \chi \text{ elementos de } c \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Sendo um conjunto  $E$  com  $n$  elementos, chama-se permutação com repetição desses  $n$  elementos cada maneira de escrever o conjunto  $E$  mudando a ordem desses  $n$  elementos.

Como:  $P_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!}$ ,  $P_n^\beta = \frac{n!}{\beta!}$ ,  $P_n^\chi = \frac{n!}{\chi!}$ , ... , então o número de permutações dos  $n$  elementos será dado por:

$$P^{(\alpha, \beta, \chi, \dots)} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \chi! \dots} \quad (\text{com } \alpha + \beta + \chi + \dots \leq n)$$

### Exercícios resolvidos:

1. Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

*Resolução:*

$$\begin{cases} n = 5 \\ \alpha = 3, \text{ pois temos 3 (A) nessa palavra} \\ \beta = 2, \text{ pois temos 2 (R) nessa palavra} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{n!}{\alpha! \beta!} \Rightarrow P_5^{(3, 2)} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! (2 \cdot 1)} = \boxed{10 \text{ anagramas}}$$

2. Quantos são os anagramas da palavra MARINA?

$$\text{Resolução: } \begin{cases} n = 6 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow p_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = \boxed{360 \text{ anagramas}}$$

3. De quantas maneiras podemos distribuir 7 doces entre 3 crianças, sendo que a mais nova recebe 3 doces e cada uma das outras recebe 2?

$$\text{Resolução: } \begin{cases} n = 7 \\ \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ \chi = 2 \end{cases} \Rightarrow P_n^{(\alpha, \beta, \chi)} = P_7^{(3, 2, 2)} = \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!(4)} = 210 \text{ maneiras}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

48. Quantos são os anagramas: a) da palavra MATEMÁTICA?

b) do nome IDALINA?

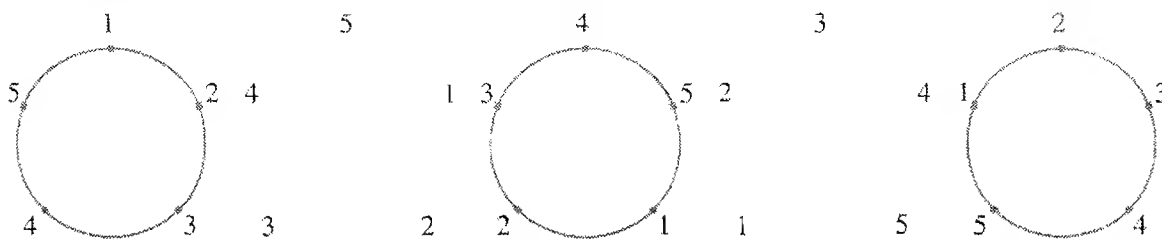
49. Quantos números distintos podem ser formados permutando-se os algarismos do número 21421?

50. De quantas maneiras 6 alunos podem ser repartidos em 2 equipes contendo 3 alunos cada uma?

**c) Permutação circular:** No caso da permutação com repetição existe um caso especial, a *permutação circular*. Observe o exemplo:

Vamos determinar de quantas maneiras cinco meninas que brincam de roda podem formá-la.

Fazendo um esquema, observamos que são posições iguais:



O total de posições é  $5!$  e cada 5 representa uma só permutação circular. Assim, o total de permutações circulares será dado por:

$$P_c^5 = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Generalizando, para determinar uma permutação circular, utilizamos a fórmula:

$$P_c^n = (n-1)!$$

### ⇒ Exercício proposto:

51. De quantas maneiras 7 meninas poderão formar a roda?

**d) Combinação com repetição:** Seja um conjunto com  $n$  elementos distintos, chama-se combinação com repetição, classe  $p$  (ou combinação completa  $p$  a  $p$ ) dos  $n$  elementos desse conjunto, a todo grupo formado por  $p$  elementos, distintos ou não, em qualquer ordem.

A fórmula da combinação com repetição é:  $C R_{n,p} = C_{n+p-1,p}$

Por exemplo, em uma combinação com repetição classe 2 do conjunto  $\{a, b, c\}$ , temos:

$$\left. \begin{array}{ccc} a & a & b & b \\ a & b & b & c \\ a & c & c & c \end{array} \right\} \Rightarrow 6 \text{ combinações com repetições}$$

Utilizando a fórmula da combinação com repetição, verificamos o mesmo resultado sem a necessidade de enumerar todas as possibilidades:

$$n = 3 \text{ e } p = 2 \Rightarrow C_{3,2} = C_{3+2-1,2} = C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{4} = 6$$

Em outro exemplo, em uma combinação com repetição classe 3 do conjunto  $\{a, b\}$ , temos:

$$\left. \begin{array}{ccc} a & a & a \\ a & a & b \\ a & b & b \\ b & b & b \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \text{ combinações com repetições}$$

Utilizamos a fórmula da combinação com repetição para alcançar o mesmo resultado:  $n = 2 \text{ e } p = 3 \Rightarrow C_{2,3} = C_{2+3-1,3} =$

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{(3 \cdot 2)1!} = 4$$

## Binômio de Newton

**1. Introdução** O teorema do binômio é atribuído ao físico e matemático inglês Isaac Newton (1623-1727), mas a sua forma empírica já era do conhecimento dos chineses e árabes nos séculos XII e XIII.

O nome de Newton permaneceu associado ao binômio porque foi ele quem generalizou seu estudo para expoentes racionais.

**2. Definição** Dados dois números  $n$  e  $p$  naturais, com  $p \leq n$ , denominamos *números binomiais* aos números de combinações simples de  $n$  elementos, tomados  $p$  a  $p$ .

Assim:

$$\boxed{\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}, \text{ onde } \binom{n}{p} \text{ (lê-se binomial de } n, \text{ classe } p).$$

Exemplos:

$$a) \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(3 \cdot 2 \cdot 1)4!} = 35 \text{ e } b) \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{(2 \cdot 1)8!} = 45$$

**3. Casos particulares** Da definição de binomial, temos três consequências:

$$I) \boxed{p = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} = 1}, (\forall n \in \mathbb{N}), \text{ pois: } \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$II) \boxed{p = 1 \Rightarrow \binom{n}{1} = n}, (\forall n > 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}), \text{ pois:}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1(n-1)!} = n$$

$$III) \boxed{p = n \Rightarrow \binom{n}{n} = 1}, (\forall n \in \mathbb{N}), \text{ pois:}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1$$

### Exercício resolvido:

1. Calcular X, sendo  $X = \binom{4}{4} + \binom{6}{0} + \binom{7}{1}$ .

Resolução:  $\frac{4!}{4!(4-4)!} + \frac{6!}{0!(6-0)!} + \frac{7!}{1!(7-1)!}$

$$X = \frac{4!}{4!0!} + \frac{6!}{0!6!} + \frac{7!}{1 \cdot 6!} \Rightarrow \frac{4!}{4!(1)} + \frac{6!}{(1)6!} + \frac{7 \cdot 6!}{6!} \Rightarrow X = 1 + 1 + 7$$

$$\boxed{X = 9}$$

**4. Números binomiais complementares** Dois binômios,  $\binom{10}{7}$  e

$\binom{10}{3}$ , são considerados complementares quando  $m = n$  e  $p + q = n$ ,

ou  $q = n - p$ . Desta forma, vale escrever:  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{n-p}$ . Exemplos:

a)  $\binom{6}{1}$  e  $\binom{6}{5}$  são complementares, pois:  $p + q = 1 + 5 = 6 = n$

b)  $\binom{5}{3}$  e  $\binom{5}{2}$  são complementares, pois:  $p + q = 3 + 2 = 5 = n$

c)  $\binom{n}{5}$  e  $\binom{n}{n-5}$  são complementares, pois:  $5 + (n-5) =$   
 $= 5 + n - 5 = n$

d)  $\binom{4w}{2w-1}$  e  $\binom{4w}{2w+1}$  são complementares, pois:  $2w-1 +$   
 $2w+1 = 4w = n$

**5. Propriedade dos números binomiais complementares** Pela definição de números binomiais, temos:

$$(a) \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$(b) \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

De onde concluímos que:  $(a) = (b)$ . Portanto, podemos afirmar que *números binomiais complementares são iguais*.

#### **Exercícios resolvidos:**

1. Calcule  $\binom{8}{3}$  e  $\binom{8}{5}$

**Resolução:** Observemos que os dois binomiais são complementares, pois:  $n = 8$  e  $n + p = 3 + 5 = 8 = n$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(6)5!} \text{ e}$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!(6)} = \boxed{56}$$

2. Resolver a equação:  $\binom{7}{x} = \binom{7}{5}$

**Resolução:** Esta igualdade compreende duas soluções:

a) se os binômios forem complementares, podemos escrever:

$$x + 5 = 7 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

b) se os binômios forem iguais, podemos escrever:  $\boxed{x = 5}$

Os dois valores satisfazem a existência de  $\binom{n}{p}$ ,  $(n, p, \in \mathbb{N}, \text{ e } p \leq n)$ ,

pois:  $\boxed{\binom{7}{2} = \binom{7}{5} \text{ e } \binom{7}{5} = \binom{7}{5}}$

3. Resolver a equação:  $\binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2}$ . Resolução:

$$\binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2} \begin{cases} \text{a) } p = q \\ 2x = x + 2 \Rightarrow 2x - x = 2 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ \text{b) } p + q = n \\ 2x + (x + 2) = 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{1, 2\}}$$

4. Resolver a equação:  $\binom{14}{3x-1} = \binom{14}{2x-5}$ . Resolução:

$$\binom{14}{3x-1} = \binom{14}{2x-5} \begin{cases} \text{a) } p = q \\ 3x - 1 = 2x - 5 \Rightarrow x = -4 \text{ não satisfaz} \\ \text{b) } p + q = n \\ 3x - 1 + 2x - 5 = 14 \Rightarrow 5x - 6 = 14 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$\boxed{S = \{4\}}$

Verificando:

Se  $x = -4$ , temos:  $\binom{14}{3 \cdot (-4) - 1} = \binom{14}{2 \cdot (-4) - 5} = \binom{14}{-13} = \binom{14}{-13}$

Então  $\boxed{p = -13, \text{ e } -13 \notin \mathbb{N}}$

### Exercícios propostos:

52. Calcular:

a)  $\binom{9}{6}$    b)  $\binom{7}{4}$    c)  $\binom{13}{0}$    d)  $\binom{21}{21}$    e)  $\binom{15}{1}$    f)  $\binom{5}{2}$    g)  $\binom{5}{3}$

**53.** Resolver as equações:

$$\text{a) } \binom{16}{2x+6} = \binom{16}{5x+3} \quad \text{b) } \binom{12}{2x} = \binom{12}{3} \quad \text{c) } \binom{12}{x+8} = \binom{12}{5x}$$

**6. Números binomiais consecutivos** Dois números binomiais dizem-se consecutivos quando eles têm o mesmo valor para  $n$  e suas classes respectivas são inteiros consecutivos.

Ex.:  $\binom{12}{9}$  e  $\binom{12}{10}$  são números binomiais consecutivos.

Sendo:  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{q}$  dois números binomiais, se eles são consecutivos, então  $\boxed{q = p - 1}$

Assim, pela definição, podemos escrever:  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{p-1}$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Verificar se os números binomiais são consecutivos:

$$\text{a) } \binom{8}{6} \text{ e } \binom{8}{5} \quad \text{b) } \binom{12}{x} \text{ e } \binom{12}{x+1}$$

Resolução:

$$\text{a) } \binom{n}{p} = \binom{8}{6} \text{ e } \binom{n}{q} = \binom{8}{5}, \text{ temos que: } q = p - 1 \Rightarrow 5 = 6 - 1.$$

Portanto  $\binom{8}{6}$  e  $\binom{8}{5}$  são números binomiais consecutivos.

b)  $x = q \Rightarrow x = (x + 1) - 1 \Rightarrow$  são consecutivos ( $\forall x \in \mathbb{N}$ ).

Logo,  $\binom{12}{x}$  e  $\binom{12}{x+1}$  são números binomiais consecutivos.

**7. Propriedade dos números binomiais consecutivos (Relação de Stifel)** Somando-se dois números binomiais consecutivos, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \\ & = \frac{(n-1)! [p + n - p]}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \end{aligned}$$

Logo,  $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ , que denominamos Relação de Stiffel.

## Exercícios resolvidos:

1. Calcular  $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

*Resolução:* Como  $\binom{5}{3}$  e  $\binom{5}{4}$  são números binomiais consecutivos, então, pela relação de Stiffel, temos:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}. \text{ Logo, } n-1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 \Rightarrow n = 6 \text{ e } p = 4$$

Portanto,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}$

2. Resolver a equação:  $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ x + 3 \end{pmatrix}$

**Resolução:** Temos que:  $x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$

### Exercício proposto:

**54.** Calcular  $\binom{10}{3} + \binom{10}{4}$ .

**8. Triângulo de Tartália-Pascal** É uma forma de dispor os números binomiais, formando um triângulo.

As propriedades desse triângulo, embora já fossem conhecidas desde o século XII ou XIII, foram sistematizadas somente no século XVII por Blaise Pascal.

Assim:

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & 1 & & & & & & \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} & 1 & 1 & & & & & \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} & 1 & 2 & 1 & & & & \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\binom{n}{5}\binom{n}{6}\binom{n}{7}\binom{n}{8}\binom{n}{9}\binom{n}{10}\binom{n}{11}\binom{n}{12}\binom{n}{13}\binom{n}{14}\binom{n}{15}\binom{n}{16}\binom{n}{17}\binom{n}{18}\binom{n}{19}\binom{n}{20}\binom{n}{21}\binom{n}{22}\binom{n}{23}\binom{n}{24}\binom{n}{25}\binom{n}{26}\binom{n}{27}\binom{n}{28}\binom{n}{29}\binom{n}{30}\binom{n}{31}\binom{n}{32}\binom{n}{33}\binom{n}{34}\binom{n}{35}\binom{n}{36}\binom{n}{37}\binom{n}{38}\binom{n}{39}\binom{n}{40}\binom{n}{41}\binom{n}{42}\binom{n}{43}\binom{n}{44}\binom{n}{45}\binom{n}{46}\binom{n}{47}\binom{n}{48}\binom{n}{49}\binom{n}{50}\binom{n}{51}\binom{n}{52}\binom{n}{53}\binom{n}{54}\binom{n}{55}\binom{n}{56}\binom{n}{57}\binom{n}{58}\binom{n}{59}\binom{n}{60}\binom{n}{61}\binom{n}{62}\binom{n}{63}\binom{n}{64}\binom{n}{65}\binom{n}{66}\binom{n}{67}\binom{n}{68}\binom{n}{69}\binom{n}{70}\binom{n}{71}\binom{n}{72}\binom{n}{73}\binom{n}{74}\binom{n}{75}\binom{n}{76}\binom{n}{77}\binom{n}{78}\binom{n}{79}\binom{n}{80}\binom{n}{81}\binom{n}{82}\binom{n}{83}\binom{n}{84}\binom{n}{85}\binom{n}{86}\binom{n}{87}\binom{n}{88}\binom{n}{89}\binom{n}{90}\binom{n}{91}\binom{n}{92}\binom{n}{93}\binom{n}{94}\binom{n}{95}\binom{n}{96}\binom{n}{97}\binom{n}{98}\binom{n}{99}
\end{array}$$



Observe a lei de formação nesse triângulo:

a) os binomiais que têm o mesmo valor para  $n$  estão colocados na mesma linha; b) os binomiais que têm o mesmo valor para  $p$  estão colocados na mesma coluna.

### 9. Propriedades do Triângulo de Pascal

a) Em toda linha o primeiro e o último elementos são iguais a 1,

pois têm a forma:  $\binom{n}{0}$  e  $\binom{n}{n}$ , respectivamente.

b) Numa linha qualquer, dois binomiais equidistantes dos extremos são iguais, pois são números binomiais complementares.

Observe as linhas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ & & \underline{1} & \underline{5} & \underline{10} & \underline{10} & \underline{5} & \underline{1} & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \end{array}$$

c) Qualquer elemento não extremo, a partir do segundo termo da 3ª linha, pode ser obtido aplicando-se a relação de Stiffel.

d) A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2, onde o expoente é a ordem da linha dada pelo

numerador. Assim, temos:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

### Exercício resolvido:

1. Obter o valor de  $n$ , sabendo-se que  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 4$ .

Resolução:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 4 \Rightarrow 2^n = 4 \Rightarrow 2^n = 2^2 \Rightarrow \boxed{n = 2}$

**10. Binômio de Newton** O triângulo de Pascal é extremamente útil no desenvolvimento de binômios do tipo  $(x + a)^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Observemos a relação entre o triângulo de Pascal e os binômios:

Coeficientes dos termos

$$\begin{array}{lcl} n = 0 \Rightarrow (x + a)^0 = 1 & \dots\dots\dots & \binom{0}{0} \\ n = 1 \Rightarrow (x + a)^1 = 1x + 1a & \dots\dots\dots & \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ n = 2 \Rightarrow (x + a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2 & \dots\dots\dots & \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \end{array}$$

$$n = 3 \Rightarrow (x + a)^3 = 1x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 1a^3 \dots \dots \dots \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$$

$$\dots \dots \dots n = n \Rightarrow (x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n \rightarrow \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \binom{n}{n}$$

Assim, podemos definir um binômio de Newton, em termos gerais, como:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0x^n + \binom{n}{1} a^1x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^nx^0$$

Note que: a) o número de termos do desenvolvimento de  $(x + a)^n$  é

$(n + 1)$  termos; b) os coeficientes binomiais  $\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \binom{n}{n}$  dos termos do desenvolvimento formam uma linha do triângulo de Pascal; c) os expoentes de  $a$  crescem de zero a  $n$ ; d) os expoentes de  $x$  decrescem de  $n$  a zero.

Vale salientar que, em binômios da forma  $(x - a)^n$ , os sinais devem ser alternados entre  $+$  e  $-$ . Exemplo:

Como  $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  e  $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , podemos verificar que a lei de formação dos termos é a mesma nesses binômios, porém os sinais são alternados entre  $+$  e  $-$ . Então, podemos generalizar esse resultado para:

$$(x - a)^n = \binom{n}{0} a^0x^n - \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} - \dots + \binom{n}{n} a^nx^0$$

### Exercícios resolvidos:

1. Desenvolver os binômios, utilizando o Binômio de Newton:

a)  $(x + 2)^2$       b)  $(x + 1)^3$

Resolução: a)  $(x + 2)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} x^1 + \binom{2}{2} \cdot 2^2$

$$1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = \boxed{x^2 + 4x + 4}$$

b)  $(x + 1)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 \cdot 1 + \binom{3}{2} x^1 \cdot 1^2 + \binom{3}{3} \cdot 1^3$

$$\boxed{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

2. Desenvolver o binômio  $(x + 2)^4$ .

Resolução:  $(x + 2)^4 =$

$$\begin{aligned} &= \binom{4}{0} x^4 \cdot 2^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 2^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot 2^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot 2^4 = \\ &= 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 4 + 4x^1 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16 = \\ &\quad \boxed{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16} \end{aligned}$$

3. Desenvolver o binômio  $(a - 2)^5$ .

$$\begin{aligned} \text{Resolução: } (a - 2)^5 &= \binom{5}{0} a^5 - \binom{5}{1} a^4 \cdot 2 + \binom{5}{2} a^3 \cdot 2^2 - \binom{5}{3} a^2 \cdot 2^3 + \\ &+ \binom{5}{4} a \cdot 2^4 - \binom{5}{5} 2^5 = 1 \cdot a^5 - 5a^4 \cdot 2 + 10a^3 \cdot 4 - 10a^2 \cdot 8 + 5a \cdot 16 - 1 \cdot 32 = \\ &= \boxed{a^5 - 10a^4 + 40a^3 - 80a^2 + 32} \end{aligned}$$

4. (UFAL) No desenvolvimento do binômio  $(x + a)^6$ , segundo as potências decrescentes de  $x$ , o termo central é  $540x^3$ . Nestas condições, o valor de  $a$  é: a)  $-3$ , b)  $-2$ , c)  $2$ , d)  $3$ , e)  $4$

Resolução: Desenvolvendo o binômio  $(x + a)^6$ , temos:

$$\begin{aligned} (x + a)^6 &= \binom{6}{0} x^6 + \binom{6}{1} x^5 a + \binom{6}{2} x^4 a^2 + \\ &+ \binom{6}{3} x^3 a^3 + \binom{6}{4} x^2 a^4 + \binom{6}{5} x a^5 + \binom{6}{6} a^6 \end{aligned}$$

O binômio tem 7 termos.

Logo, o termo central é o 4º termo:  $\binom{6}{3} x^3 a^3$

$$\binom{6}{3} x^3 a^3 = \frac{6!}{3!3!} x^3 a^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{(3 \cdot 2 \cdot 1)3!} x^3 a^3 = 20x^3 a^3$$

Como sabemos que o termo central é igual a  $540x^3$ ,

$$20x^3 a^3 = 540x^3 \Rightarrow a^3 = \frac{540x^3}{20x^3} \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

**Alternativa correta: D**

**11. Fórmula do termo geral** Observemos o desenvolvimento do binômio  $(x + a)^n$ :

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

Note a relação entre os expoentes dos termos e o binomial nos termos:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^0 x^n$$

$$T_2 = \binom{n}{1} a^1 x^{n-1}$$

$$T_3 = \binom{n}{2} a^2 x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$T_{n+1} = \binom{n}{n} a^n x^0 \Rightarrow \text{último termo}$$

De onde podemos concluir que a relação entre o índice do termo

e o denominador do binomial é de:  $T_n = \binom{n}{n-1}$

Se substituirmos o índice do termo pela expressão  $p + 1$ , teremos:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

Para o binômio-diferença  $(x - a)^n$ , temos 2 casos:

a) quando a classe é *par*, o sinal que precede o termo é (+), pois  $(-1)^{\text{par}} = +1$

b) quando a classe é *ímpar*, o sinal que precede o termo é (-), pois  $(-1)^{\text{ímpar}} = -1$

Assim, a fórmula do termo geral pode ser escrita:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

No exercício anterior, por exemplo, podemos achar o valor de  $a$  através da fórmula do termo geral. Assim, no binômio  $(x + a)^6$ , pelo triângulo de Pascal, temos 7 elementos. Portanto, o termo central é o 4º termo. Desta forma, temos:  $p + 1 = 4 \Rightarrow p = 4 - 1 \Rightarrow p = 3$   $n = 6$

Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$T_{3+1} = \binom{6}{3} a^3 x^{6-3} \Rightarrow T_4 = \frac{6!}{(3 \cdot 2 \cdot 1)3!} a^3 x^3 \Rightarrow T_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{6 \cdot 3!} a^3 x^3 = 20a^3 x^3$$

Igualando a  $540x^3$ , temos  $a = 3$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule o 10º termo do desenvolvimento de  $(x-y)^{12}$ .

Resolução:  $p+1 = 10 \Rightarrow p = 9$ ;  $n = 12$ ;  $a = y$  e  $x = x$

Substituindo esses valores na fórmula, vem:

$$T_{p+1} = (-1)^9 \cdot \binom{12}{9} \cdot y^9 \cdot x^{12-9} \Rightarrow T_{10} = (-1) \cdot \frac{12!}{9!3!} \cdot y^9 x^3$$

$$T_{10} = (-1) \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!(3 \cdot 2 \cdot 1)} y^9 x^3 \Rightarrow \boxed{T_{10} = -220y^9 x^3}$$

2. Dado o binômio  $(x+2)^8$ , determinar: a) o 5º termo, b) o 7º termo e c) o termo independente de  $x$ .

Resolução: a) para o 5º termo temos:  $p+1 = 5 \Rightarrow p = 4$ ,  $n = 8$ ,  $a = 2$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \Rightarrow T_{4+1} = \binom{8}{4} 2^4 x^{8-4}$$

$$T_5 = \frac{8!}{4!(8-4)!} \cdot 16x^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)4!} \cdot 16x^4 = 70 \cdot 16x^4 \Rightarrow \boxed{T_5 = 1120x^4}$$

b) para o 7º termo, temos:  $p+1 = 7 \Rightarrow p = 6$ ,  $n = 8$ ,  $a = 2$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \Rightarrow T_{6+1} = \binom{8}{6} 2^6 x^{8-6} \Rightarrow T_7 = \frac{8!}{6!(8-6)!} 64x^2$$

$$T_7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!(2-1)} 64x^2 \Rightarrow T_7 = 28 \cdot 64x^2 \Rightarrow \boxed{T_7 = 1792x^2}$$

c) para o cálculo do termo independente de  $x$ , devemos igualar o expoente de  $x$  do termo geral a zero. Temos:  $n = 8$ ,  $a = 2$ .

$$\text{O termo geral é: } T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

$$T_{p+1} = \binom{8}{p} 2^8 x^{8-p} \Rightarrow 8-p = 0 \Rightarrow p = 8$$

$$\text{Logo, } T_{8+1} = 8 \cdot 256 \cdot x^{8-8} \Rightarrow T_9 = 1 \cdot 256 \cdot x^0 \Rightarrow \boxed{T_9 = 256}$$

3. Calcular o termo em  $x^6$  no desenvolvimento de  $(x + a)^{15}$ .

Resolução: Temos:  $n = 15$  e o termo geral é:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \Rightarrow T_{p+1} = \binom{15}{p} a^p x^{15-p}$$

Queremos o termo em  $x^6$ , então:  $x^{15-p} = x^6 \Rightarrow 15-p = 6 \Rightarrow p = 9$

$$\text{Logo, } T_{p+1} = T_{9+1} = T_{10} = \binom{15}{9} a^9 x^6$$

### Exercícios complementares:

55. Calcular  $n$ , dado:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 512.$$

56. Calcular:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

57. Desenvolver os binômios:

a)  $(x-1)^5$       c)  $\left(1 + \frac{3}{2}a\right)^5$   
b)  $(2x-3y)^4$

58. (FEI-SP) Desenvolva, usando a fórmula do binômio de Newton:  $(x-1)^3 \cdot (x+1)^3$ .

59. (UFPI) No desenvolvimento do binômio  $(3x^2 + a)^4$ , o terceiro termo é: a)  $12x^4a^2$ ; b)  $12x^2a^3$ ; c)  $54x^4a^2$ ; d)  $108x^4a^2$ ; e)  $108x^6a$

60. (UFSC) Desenvolvendo o binômio  $(x + \frac{1}{x})^6$ , o valor do termo independente de  $x$  é:

61. (UFPA) O coeficiente do termo em  $x^{12}$  no desenvolvimento de  $(2x^2 + x)^{10}$  é igual a:

a) 180 b) 190 c) 45 d)  $A_{10,8}$  e)  $A_{10,2}$

62. (Mack-SP) Um dos termos no desenvolvimento de  $(x + 3a)^5$  é  $360x^3$ . Sabendo-se que  $a$  não depende de  $x$ , o valor de  $a$  é:

a)  $\pm 1$  b)  $\pm 2$  c)  $\pm 3$  d)  $\pm 4$  e)  $\pm 5$

63. (PUC-SP) Os valores de  $m$ , para

os quais  $\binom{11}{m-1} = \binom{11}{2m-3}$ , são:

a)  $m = 1, m = 2$  d)  $m = 3, m = 2$   
b)  $m = 3, m = 4$  e) n. d. a.  
c)  $m = 2, m = 5$

64. O valor de  $x$  na equação  $A_{x,2} = 380$  é: a) 14 b) 19 c) 25 d) 24 e) 20

65. (UFBA) Da análise combinatória, pode-se afirmar (some os valores correspondentes):

(01) No sistema de numeração decimal, existem 2 240 números ímpares formados por 4 algarismos distintos.

(02) Com os elementos do conjunto  $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$  podem-se formar 120 números de 3 algarismos distintos, começados por um algarismo par.

(04) Existem 3 024 números entre 10 000 e 20 000 formados com algarismos distintos de 1 a 9.

(08) Com os algarismos de 1 a 9, sem repeti-los, podem-se formar 7 200 números com 4 algarismos pares e 2 ímpares.

(16) Listando-se, em ordem crescente, todos os números de 6 algarismos distintos, formados com elementos do conjunto  $\{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , o número 768415 ocupa o 514º lugar.

# Capítulo XIII

## PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

### Probabilidade

**1. Introdução** A teoria das probabilidades surgiu no século XVI, com o estudo dos jogos de azar, tais como: jogos de cartas e roleta.

O primeiro matemático a conceituar *probabilidade*, parece ter sido Cardano, ou Cardan (1501-1576). Porém, o ponto de partida para o desenvolvimento da teoria das probabilidades deve-se, principalmente, a dois matemáticos: Pascal (1623-1662) e Fermat (1601-1665).

Esta teoria foi utilizada por Mendel em seus estudos sobre genética. Atualmente, a teoria das probabilidades está intimamente relacionada com a Estatística, que tem aplicações em diversos ramos do conhecimento.

**2. Definição** Às situações ou experimentos que, sendo realizados repetidas vezes, nas mesmas condições, apresentam resultados diferentes, chamamos experimentos probabilísticos ou aleatórios.

A teoria da probabilidade é o ramo da Matemática que cria e desenvolve modelos matemáticos para estudar os experimentos aleatórios.

**3. Elementos da teoria das probabilidades** Para que se possa efetuar qualquer cálculo utilizando a teoria das probabilidades, são necessários dois elementos:

- a) espaço amostral: é o conjunto  $U$ , de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório;
- b) evento: é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Assim, qualquer que seja  $E \subset U$ , onde  $E$  é evento e  $U$ , o espaço amostral.

Representamos o espaço amostral e os eventos por letras maiúsculas.

### Exercícios resolvidos:

1. Lança-se uma moeda e lê-se a figura da face voltada para cima.  
Pede-se: a) o espaço amostral; b) o número de elementos do espaço amostral e c) o número de elementos dos eventos.

Resolução: a) Espaço amostral:  $U = \{\text{cara, coroa}\}$ . Sendo  $c = \text{cara}$  e  $k = \text{coroa}$ , temos:  $U = \{c, k\}$

b) O número de elementos do espaço amostral  $U$  é 2. Então, escrevemos:  $n(U) = 2$

c) Sejam os eventos:  $E_1 = \{c\} \Rightarrow E_1 \subset U$  e  $E_2 = \{k\} \Rightarrow E_2 \subset U$

Portanto, a quantidade de elementos dos eventos é:

$$n(E_1) = 1 \text{ e } n(E_2) = 1$$

2. Lança-se um dado e lê-se o número voltado para cima: a) calcular o espaço amostral; b) calcular o número de elementos do espaço amostral; c) determinar o evento: ocorrência de um número maior que quatro e d) determinar o evento: ocorrência de um número par.

Resolução: a) espaço amostral:  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b)  $n(U) = 6$

c) evento  $E_1 = \{5, 6\}$

d) evento  $E_2 = \{2, 4, 6\}$

**4. Experimento composto** Quando temos dois ou mais experimentos realizados simultaneamente, dizemos que o experimento é *composto*.

Nesse caso, o número de elementos do espaço amostral é dado pelo produto dos números de elementos dos espaços amostrais de cada experimento. Ex.: Num jogo de dados, qual o espaço amostral ao lançarmos dois dados simultaneamente?

$$U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_1) = 6$$

$$U_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_2) = 6$$

Logo:  $n(U) = n(U_1) \cdot n(U_2)$ . Portanto,  $n(U) = 6 \cdot 6 = 36$  elementos.

Vamos descrever o espaço amostral  $U$ , representando os 36 elementos na *tabela de dupla entrada*:

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Como calculamos acima

$$n(U) = 36 \text{ elementos.}$$

Neste exemplo, os elementos do evento em que a soma dos pontos obtidos (nas fa-



ces sorteadas desses dois lados) é igual a 5 (evento  $E_1$ ) e do evento em que a soma dos pontos obtidos (nas faces sorteadas) é igual a 4 (evento  $E_2$ ), são:

$$E_1: \text{soma} = 5 \Rightarrow E_1 = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

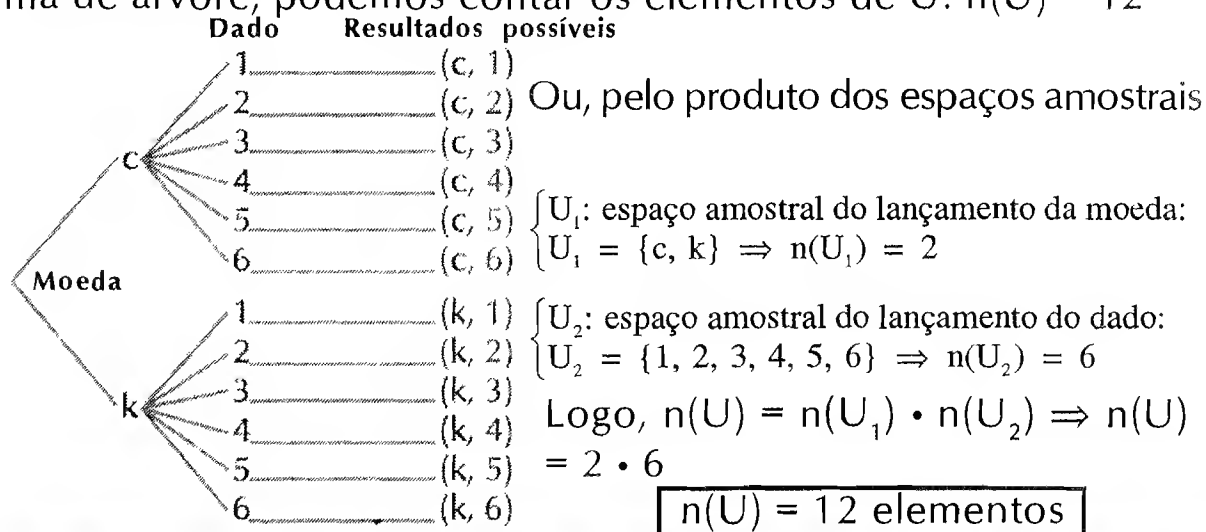
$$E_2: \text{soma} = 4 \Rightarrow E_2 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$$

Logo: o número de elementos dos eventos é:  $n(E_1) = 4$  pares de elementos e  $n(E_2) = 3$  pares de elementos.

### Exercícios resolvidos

1. Ao lançar uma moeda e um dado, simultaneamente: a) obter o espaço amostral  $U$ ; b) calcular o número de elementos de  $U$ .

**Resolução:** a) Vamos utilizar o diagrama de árvore para representar o espaço amostral, onde: c = cara e k = coroa. b) Pelo diagrama de árvore, podemos contar os elementos de  $U$ :  $n(U) = 12$



2. Obter o espaço amostral do seguinte experimento: lançamento simultâneo de 3 moedas.

**Resolução:** Temos: 1ª moeda:  $U_1 = \{c, k\}$ ; 2ª moeda:  $U_2 = \{c, k\}$  e 3ª moeda:  $U_3 = \{c, k\}$ .

Se quiséssemos saber o número de elementos do espaço amostral  $U$ , teríamos:  $n(U) = n(U_1) \cdot n(U_2) \cdot n(U_3)$

$$n(U) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow n(U) = 8 \text{ elementos}$$

Para determinar os elementos desse espaço amostral  $U$ , podemos efetuar os produtos cartesianos:

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = \{c, k\} \\ U_2 = \{c, k\} \end{array} \right\} U_1 \times U_2 = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1 \times U_2 = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\} \\ U_3 = \{c, k\} \end{array} \right\} U_1 \times U_2 \times U_3 =$$

$$= \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), \\ (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\} = U$$

De onde,  $n(U) = 8$  ternas de elementos

**5. Classificação dos eventos** Consideremos um jogo de bingo, cujo espaço amostral é:  $\{1, 2, 3, \dots, 74, 75\}$ . Temos:

- a) *Evento certo*: é o evento que é o próprio espaço amostral.  
Ex.: Sendo o evento  $E_1$  “a ocorrência de um número menor que 79”, temos:  $E_1 = U = \{1, 2, 3, \dots, 74, 75\}$ .
- b) *Evento impossível*: é o subconjunto vazio do espaço amostral.  
Ex.: Considere o evento  $E_2$ : “ocorrência de números maiores que 80”. Temos:  $E_2 = \emptyset$ .
- c) *Evento elementar*: é o evento que tem apenas um elemento.  
Ex.: Sendo  $E_3$ : “ocorrência do número 25”, então:  $E_3 = \{25\}$ .
- d) *Eventos mutuamente exclusivos*: são aqueles que apresentam conjuntos disjuntos, ou seja, que não possuem elementos comuns entre si.  
Ex.:  $E_4$  é a ocorrência de números menores que 21. Então:  $E_4 = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ .  
Dado  $E_5$ : ocorrência de números maiores que 40, temos:  $E_5 = \{41, 42, 43, \dots, 75\}$  e  $E_4 \cap E_5 = \emptyset$  (disjuntos), portanto,  $E_4$  e  $E_5$  são mutuamente exclusivos.
- e) *Evento união*: é a reunião dos eventos.  
Ex.: Sendo  $E_6$  a ocorrência de um número maior que 69  $E_6 = \{70, 71, 72, 73, 74, 75\}$  e sendo  $E_7$  a ocorrência de um número múltiplo de 20  $E_7 = \{20, 40, 60\}$ , temos:  $E_6 \cup E_7 = \{20, 40, 60, 70, 71, 72, 73, 74, 75\}$ .
- f) *Evento intersecção*: é a intersecção dos eventos.  
Ex.: qual a ocorrência de um número menor que 10 ( $E_8$ ) e múltiplo de 4 ( $E_9$ ) nos eventos:  $E_8 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  e  $E_9 = \{4, 8\}$ . Portanto,  $E_8 \cap E_9 = \{4, 8\}$ .
- g) *Eventos complementares*: Dois eventos são complementares quando:
  - g.1) a união entre os eventos é o próprio espaço amostral;
  - g.2) a intersecção entre os eventos é o conjunto vazio.
 Exemplos:  $E_{10}$ : ocorrência de um número menor que 30, então:  $E_{10} = \{1, 2, 3, \dots, 29\}$   
 $E_{11}$ : ocorrência de um número maior que 29, logo:  $E_{11} = \{30, 31, 32, \dots, 75\}$ .

Portanto:  $E_{10} \cup \bar{E}_{10} = \{1, 2, 3, \dots, 75\} = U \Rightarrow E_{10} \cap \bar{E}_{10} = \emptyset$

Portanto, os eventos  $E_{10}$  e  $E_{11}$  são complementares:  $E_{11} = \bar{E}_{10}$ .

### ⇒ Exercícios propostos:

1. Dê o espaço amostral dos seguintes experimentos:

a) No lançamento simultâneo de um dado e uma moeda, quantos elementos terá o espaço amostral? e b) Uma urna contém 3 bolas azuis e 3 bolas brancas. Quantos elementos terá o espaço amostral, se forem retiradas, sucessivamente, 3 bolas?

2. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 8. Uma delas será sorteada. Determinar:

a) o espaço amostral; b) o evento  $E_1$ : ocorrência de um número ímpar; c) o evento  $E_2$ : ocorrência de um número maior que 10 (classifique esse evento); d) o evento  $E_3$ : ocorrência de um número par primo (classifique esse evento); e) o evento  $E_4$ : ocorrência de um número ímpar ou de um número par primo (classifique esse evento); f) o evento  $E_5$ : ocorrência de um número par e múltiplo de 3 (classifique esse evento) e g) o evento  $E_6$ : ocorrência de um número menor que 9 (classifique esse evento).

**6. Probabilidade de um evento** Num espaço amostral  $U$ , equiprobabilístico (com elementos que têm chances iguais de ocorrer), com  $n(U)$  elementos, o evento  $E$ , com  $n(E)$  elementos, onde  $E \subset U$ , a probabilidade de ocorrer o evento  $E$ , denotado por  $p(E)$ , é o número real, tal que:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(U)}$$

As probabilidades podem ser escritas na forma decimal ou representadas em porcentagem. Assim:  $0 \leq p(E) \leq 1$ , onde:

$p(\emptyset) = 0$  ou  $p(\emptyset) = 0\%$  e  $p(U) = 1$  ou  $p(U) = 100\%$

### ⇒ Exercícios resolvidos:

1. Jogando uma moeda, qual a probabilidade de ocorrer “cara”?

**Resolução:** Temos:  $U = \{\text{cara, coroa}\} \Rightarrow n(U) = 2$

$E = \{\text{cara}\} \Rightarrow n(E) = 1$

Portanto:  $p(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{1}{2}$  ou 50%

2. Lançando-se um dado, qual a probabilidade de: a) ocorrer uma face igual a 5? e b) ocorrer uma face maior que 4?

**Resolução:** a) Temos:  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U) = 6$

$E_1$ : ocorrer uma face igual a 5  $\Rightarrow E_1 = \{5\} \Rightarrow n(E_1) = 1$

$$\text{Logo, } p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(U)} = \frac{1}{6} \approx 0,16\%$$

b)  $E_2$ : ocorrer uma face maior que 4  $\Rightarrow E_2 = \{5, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 2$

$$\text{Logo: } p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33\%$$

**3. De um baralho de 52 cartas, tira-se uma das cartas. Calcule a probabilidade de que a carta seja: a) um rei; b) um valete de paus; c) uma carta de ouros; d) uma carta que não seja de ouros.**

**Resolução:**  $n(U) = 52$

a)  $E_1$ : ocorrer um rei  $\Rightarrow E_1 = \{\text{rei de ouros, rei de paus, rei de copas, rei de espada}\} \Rightarrow n(E_1) = 4$ . Portanto:  $p(E_1) =$

$$\frac{n(E_1)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

b)  $E_2$ : um valete de paus  $\Rightarrow n(E_2) = 1$ . Logo:  $p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} = \frac{1}{52}$

c)  $E_3$ : uma carta de ouros. Como há 4 naipes, então cada naipe tem  $52 \div 4 = 13$  cartas  $\Rightarrow n(E_3) = 13$ . Logo:

$$p(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(U)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 25\%$$

d)  $E_4$ : uma carta que não seja de ouros. Temos 13 cartas de ouros, logo:  $52 - 13 = 39$  cartas que não são de ouros  $\Rightarrow n(E_4) = 39$

$$\text{Logo: } p(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(U)} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4} = 75\%$$

**4. De um baralho com 52 cartas, são retiradas, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Calcular a probabilidade dos eventos: a) ambas serem reis; b) ambas serem de copas.**

**Resolução:** Neste tipo de problema, o espaço amostral, bem como os eventos são muito grandes. Por isso, lançamos mão da análise combinatória para estabelecer  $n(U)$  e  $n(E)$ .

a)  $n(U) = C_{52, 2}$ , pois são retiradas 2 cartas;

$n(E_1) = C_{4, 2}$ , pois há 4 reis e espera-se retirar 2 reis.

$$\text{Temos: } p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(U)} = \frac{C_{4,2}}{C_{52,2}} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{52!}{2!50!}} = \frac{\frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{2!2!}}{\frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50!}}{2!50!}} = \frac{6}{1326} \Rightarrow$$

$$p(E_1) = \frac{1}{221}$$

b)  $n(U) = C_{52,2}$  e  $n(E_2) = C_{13,2}$ , pois temos 13 cartas de copas e espera-se sair 2 delas. Logo:

$$p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} = \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{\frac{13!}{2!11!}}{\frac{52!}{2!50!}} = \frac{\frac{13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{2!11!}}{\frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50!}}{2!50!}} = \frac{78}{1326} \Rightarrow p(E_2) = \frac{1}{17}$$

5. Uma classe é composta de 5 alunos do primeiro ano, 4 do segundo, 8 do terceiro e 3 do quarto. Um aluno é escolhido, ao acaso, para representar a classe. Calcular a probabilidade de que esse aluno seja: a) do 1º ano; b) do 2º ano; c) do 3º ano; d) do 4º ano.

Resolução:  $n(U) = 5 + 4 + 8 + 3 \Rightarrow n(U) = 20$

$$\text{a) } E_1: 1^\circ \text{ ano} \Rightarrow n(E_1) = 5 \Rightarrow p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(U)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } E_2: 2^\circ \text{ ano} \Rightarrow n(E_2) = 4 \Rightarrow p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{c) } E_3: 3^\circ \text{ ano} \Rightarrow n(E_3) = 8 \Rightarrow p(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(U)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\text{d) } E_4: 4^\circ \text{ ano} \Rightarrow n(E_4) = 3 \Rightarrow p(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(U)} = \frac{3}{20}$$

6. Num sorteio concorrem todos os números inteiros de 1 a 100. Escolhendo-se um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de que o número sorteado tenha 2 algarismos, sendo que todos são equiprobabilísticos?

Resolução:  $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \Rightarrow n(U) = 100$ . E: números de 2 algarismos  $\Rightarrow E = \{10, 11, 12, \dots, 99\} \Rightarrow n(E) = 90$

$$\text{Logo: } p(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 90\%$$

### ⇒ Exercícios propostos:

3. Lançando-se um dado, qual a probabilidade de ocorrer uma face ímpar? E par?
4. De um baralho de 52 cartas, tira-se ao acaso uma das cartas. Calcule a probabilidade de que a carta seja: a) um valete; b) um valete de copas; c) uma carta de ouros.
5. Lançando-se um dado, calcular a probabilidade de ocorrer: a) o número 2; b) um número maior que 6; c) um número menor que 3; d) um número menor que 7.
6. No lançamento simultâneo de dois dados, calcule a probabilidade de ocorrer: a) a soma deles ser igual a 7; b) os números serem iguais; c) os números serem diferentes.
7. Uma rifa é composta por 100 bilhetes. Sérgio compra 20 bilhetes e Morgana compra 25. Qual a probabilidade de cada um ser sorteado?
8. Numa urna há 50 cartões numerados de 1 a 50. Um cartão é retirado ao acaso. Determinar a probabilidade de que o número do cartão seja: a) primo; b) termine com algarismo 7.

### 7. Probabilidade da união de eventos

Considere o exemplo:

No lançamento de um dado, se nos for pedido que calculemos a probabilidade de se obter o número 5 *ou* um número primo, temos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U) = 6$$

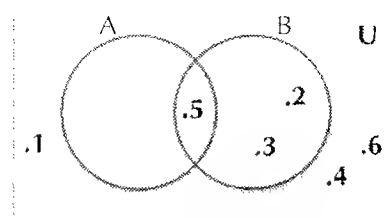
Evento A: ocorrer o número 5  $\Rightarrow A = \{5\}$

Evento B: ocorrer um número primo

$$\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}, n(A) = 1 \text{ e } n(B) = 3$$

$$A \cup B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(A \cup B) = 3$$

O número 5 é um elemento de intersecção, portanto:  $A \cap B = \{5\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$



Note o conectivo *ou* no enunciado do problema. Ele indica que o evento A *ou* B é representado pela reunião dos conjuntos. Observe que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & = & 1 & + & 3 & - & 1 \end{array}$$

Para obtermos a probabilidade da união dos eventos, dividimos os dois membros da equação acima por  $n(U)$ :

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

O que pode ser escrito, pela definição de probabilidades, da seguinte maneira:  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

caso  $p(A \cap B) = \emptyset$ , então:  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

### Exercícios resolvidos:

1. Lançando-se dois dados simultaneamente, qual a probabilidade de obtermos o evento: “a soma dos pontos é um múltiplo de 3” ou “a soma dos pontos é maior que 9”?

*Resolução:* Sejam: A o evento: a soma dos pontos é um múltiplo de 3, e B o evento: a soma dos pontos é maior que 9.

$$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$A \cup B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$A \cap B = \{(6, 6)\}$$

Temos:  $\begin{cases} n(U) = 6 \cdot 6 = 36 \\ n(A) = 12 \\ n(B) = 6 \\ n(A \cup B) = 17 \\ n(A \cap B) = 1 \end{cases}$  . Então:  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \Rightarrow \frac{12}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{17}{36}$$

Isso significa que  $p(A \text{ ou } B) = \frac{17}{36}$

2. Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplo de 2 ou múltiplo de 3?

*Resolução:*  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(U) = 10$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(A) = 5 \text{ e } B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$A \cap B = \{6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

Portanto, temos:  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = \frac{p(A)}{n(U)} + \frac{p(B)}{n(U)} - \frac{p(A \cap B)}{n(U)} \Rightarrow \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{7}{10}$$

### Exercícios propostos:

9. Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de ocorrer uma dama ou uma carta de ouros?

**10.** Lançando-se um dado, calcular a probabilidade de sair o número 5 ou um número par.

**11.** Retirando-se uma carta de um baralho comum (de 52 cartas), determine a probabilidade de sair rei ou dama.

**8. Probabilidade de um evento complementar** Para determinarmos a probabilidade de um evento complementar, devemos primeiro definir:



a) dois eventos  $E$  e  $\bar{E}$ , só são complementares se, e somente se  $E \cup \bar{E} = U$ . De onde podemos escrever:  $E + \bar{E} = U$

b) os dois eventos devem ser mutuamente exclusivos, ou seja:  $E \cap \bar{E} = \emptyset$

Se,  $E + \bar{E} = U$ , vale dizer que:  $n(E) + n(\bar{E}) = n(U)$

Dividindo-se os termos da equação por  $n(U)$ , temos:

$$\frac{n(E)}{n(U)} + \frac{n(\bar{E})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)} \Rightarrow \boxed{p(E) + p(\bar{E}) = 1}$$

Portanto, a soma das probabilidades de ocorrer o evento  $E$  e de não ocorrer o evento  $E$  (seu complementar,  $\bar{E}$ ) é 1.

### **Exercícios resolvidos:**

1. Demonstrar que, no lançamento de um dado, o evento complementar do evento “número ímpar” é o evento “número par”.

*Resolução:* Considerando  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , temos:  $E = \{1, 3, 5\}$  e  $\bar{E} = \{2, 4, 6\}$ . Observamos que:

$$a) \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow E \cup \bar{E} = U$$

$$b) \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset \Rightarrow E \cap \bar{E} = \emptyset$$

$$\text{Portanto: } p(E) + p(\bar{E}) = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1}$$

2. Demonstre que, ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, o evento “carta numerada” e o evento “carta com figura” são complementares.

*Resolução:*  $n(U) = 52$ . Existem 12 cartas com figuras: 4 valetes, 4 damas e 4 reis. Então:  $n(E) = 52 - 12 = 40$  e  $n(\bar{E}) = 12$

$$\text{Logo: } p(E) + p(\bar{E}) = 1 \Rightarrow \frac{40}{52} + \frac{12}{52} = \boxed{1}$$

3. De um lote de 14 televisores, dos quais 5 estão com defeito, escolhem-se 2, aleatoriamente. Determine a probabilidade de que: a) nenhum dos dois esteja com defeito; b) pelo menos um esteja com defeito.



**Resolução:** Vamos calcular a quantidade de maneiras de retirar os 2 televisores (o espaço amostral).

$$n(U) = C_{14,2} = \frac{14!}{2!12!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12!}{2 \cdot 12!} = 91 \text{ maneiras}$$

Dos 14 televisores, 5 estão com defeito. Então:  $14 - 5 = 9$  não estão com defeito

a) Com esses dados podemos calcular a probabilidade de que os dois televisores retirados não estejam com defeito:

$$n(E) = C_{9,2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2 \cdot 7!} = 36 \Rightarrow p(E) = \boxed{\frac{36}{91}}$$

b)  $\bar{E}$  é o evento “pelo menos um esteja com defeito”:

$$p(E) + p(\bar{E}) = 1 \Rightarrow \frac{36}{91} + p(\bar{E}) = 1 \Rightarrow p(\bar{E}) = 1 - \frac{36}{91} \Rightarrow p(\bar{E}) = \boxed{\frac{55}{91}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**12.** Seja o lançamento de dois dados. Calcule a probabilidade de que o máximo entre os dois resultados seja maior ou igual a 3. (*Sugestão:* considere  $E$ : “máximo entre dois resultados é maior ou igual a 3” e  $\bar{E}$ : “o máximo entre os dois resultados é menor que 3”)

**13.** Dado o evento: retirar uma carta de ouros de um baralho de 52 cartas. Calcular  $p(E)$  e  $p(\bar{E})$ .

**14.** Três lâmpadas são retiradas, ao acaso, de um grupo de 15 lâmpadas, das quais 5 são defeituosas. Calcular a probabilidade de que: a) nenhuma seja defeituosa; b) só uma seja defeituosa; c) pelo menos uma seja defeituosa.

**9. Probabilidade da intersecção de eventos** Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos independentes de um mesmo espaço amostral  $U$ . Então, vale a igualdade:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

conhecida por *Teorema do Produto*. O conectivo que indica a intersecção de eventos é o  $e$ .

### Exercícios resolvidos:

1. No lançamento de um dado e de uma moeda, considerando  $E_1$  o evento “face cara” e  $E_2$ , o evento “face par”, obter o evento “face cara e face par”.

**Resolução:** Analisando isoladamente cada evento, temos:

$$E_1 = \{c\} \Rightarrow n(E_1) = 1 \text{ e } U_1 = \{\text{cara, coroa}\} \Rightarrow n(U_1) = 2$$

$$E_2 = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 3 \text{ e } U_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_2) = 6$$

$$\text{Logo: } p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) \Rightarrow p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{p(E_1 \cap E_2) = 25\%}$$

2. Lançando-se uma moeda duas vezes, qual é a probabilidade de sair cara nos dois lançamentos?

*Resolução:* Note que, se tivermos cara no primeiro lançamento, isso não interfere no segundo lançamento (são independentes). Sendo A e B esses dois eventos, temos:

$$p(A \text{ e } B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{p(A \cap B) = 25\%}$$

3. Retiram-se duas cartas, aleatoriamente e sem reposição, de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade da primeira ser de ouros e a segunda ser de copas.

*Resolução:*  $E_1$ : é o evento "carta de ouros"  $\Rightarrow n(E_1) = 13$

$U_1$ : é o espaço amostral que contém  $E_1 \Rightarrow n(U_1) = 52$

$E_2$ : é o evento "carta de paus"  $\Rightarrow n(E_2) = 13$

$U_2$ : é o espaço amostral que contém  $E_2 \Rightarrow n(U_2) = 51$ , pois, como não há reposição:  $52 - 1 = 51$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) \Rightarrow p(E_1 \cap E_2) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \Rightarrow \boxed{p(E_1 \cap E_2) = \frac{13}{204}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

15. Jogando-se um dado 4 vezes seguidas, qual a probabilidade de ocorrer o número 3 (face 3) quatro vezes?

16. Numa urna há 10 bolas: 7 azuis e 3 brancas. Numa outra urna há 7 bolas: 5 azuis e 2 brancas. Sorteando-se uma bola de cada urna, determine a probabilidade de que: a) a bola retirada da primeira urna seja azul e a da segunda urna seja branca; b) a bola retirada da primeira urna seja branca e a da segunda urna seja azul.

17. Qual a probabilidade de um casal ter 4 filhos e todos do sexo masculino?

18. Numa caixa há papezinhos numerados de 1 a 9; noutra, há papezinhos numerados de 11 a 19. Sorteando um papelzinho de cada caixa, qual a probabilidade de serem escolhidos: a) dois papezinhos com números pares? e b) dois papezinhos com números ímpares?

**19.** Retirando-se uma carta, ao acaso, de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de que a carta seja um valete de ouros?

**20.** Sejam duas caixas A e B. Na caixa A temos 4 bolas amarelas e 6 bolas verdes. Na caixa B, temos 8 bolas amarelas e 2 bolas verdes. Escolhemos, ao acaso, uma caixa e, em seguida, tiramos dela uma bola. Calcular a probabilidade de que esta bola seja: a) amarela; b) verde.

**10. Probabilidade condicional** Quando se impõe uma *condição* que reduz o espaço amostral, dizemos que se trata de uma probabilidade condicional. Por exemplo:

Márcia tem quatro bilhetes com números pares para um sorteio em que concorrem 100 bilhetes com os números inteiros de 1 a 100. Sabendo-se que o bilhete sorteado é par, vamos calcular a possibilidade de que ela seja sorteada.

Note que o problema impõe a condição do número par, o que reduz o espaço amostral inicial de 100 números para um espaço amostral de cinquenta elementos. Então:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}, \text{ (lê-se: probabilidade de A condicionada a B)}$$

Assim, definimos: sejam A e B dois eventos de um espaço amostral U, com  $p(B) \neq 0$ . Chama-se probabilidade de A *condicionada* a B, a probabilidade de ocorrência do evento A, sabendo-se que já ocorreu ou que vai ocorrer, o evento B.

Analogamente, temos:

$$p(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}, \text{ (lê-se: probabilidade de B condicionada a A)}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Jogando-se um dado e sabendo-se que ocorreu um número maior que 3, qual é a probabilidade de sair um número ímpar?

*Resolução:*  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $E_1 = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(E_1) = 3$ ;  $E_2 = \{4, 5, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 3$

Temos que  $E_1 \cap E_2 = \{5\}$  e  $n(E_1 \cap E_2) = 1$

$$\text{Logo: } p(E_1/E_2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_2)} \Rightarrow p(E_1/E_2) = \frac{1}{3}$$

2. Numa caixa há papeizinhos numerados de 1 a 10. Um deles será sorteado. Sabendo-se que o número desse papelzinho é menor que 6, determinar a probabilidade de ele ser par.

Resolução:  $E_1$ : número menor que 6  $\Rightarrow E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow n(E_1) = 5$

$E_2$ : número par  $\Rightarrow E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(E_2) = 5$

$E_1 \cap E_2 = \{2, 4\} \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 2$

$$\text{Então: } p(E_2/E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{p(E_2/E_1) = 40\%}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

21. Numa caixa há 5 papeizinhos numerados de 1 a 5. Serão retirados sucessivamente 2 papeizinhos da caixa, sem reposição do primeiro. Qual é a probabilidade de que os dois números sorteados sejam ímpares?

22. (PUCC) Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos dois dados é 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

**11. Lei binominal das probabilidades** A lei binominal das probabilidades é dada pela fórmula:

$$p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Sendo:

$n$ : número de tentativas independentes;

$p$ : probabilidade de ocorrer o evento em cada experimento (sucesso);

$q$ : probabilidade de *não* ocorrer o evento (fracasso);

$$\boxed{q = 1 - p}$$

$k$ : número de sucessos.

Considere o problema: Uma moeda é lançada 4 vezes. Calcular a probabilidade de ocorrerem duas caras.

Nesse caso:

$n$ : número de tentativas  $\Rightarrow n = 4$

$p$ : probabilidade de ocorrer “cara” em um lançamento (sucesso)  $\Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$q$ : probabilidade de ocorrer “coroa” em um lançamento (fracasso):

$$q = 1 - p \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

k: número de sucessos (ocorrerem duas caras)  $\Rightarrow k = 2$

Substituindo esses valores na igualdade, vem:

$$p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow p = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} \Rightarrow p = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$p = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow p = \frac{6}{16} \Rightarrow p = \frac{3}{8}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrerem 2 caras é de  $\boxed{\frac{3}{8}}$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Lançando-se um dado 5 vezes, qual a probabilidade de ocorrerem três faces 6?

Resolução: n: número de tentativas  $\Rightarrow n = 5$

k: número de sucessos  $\Rightarrow k = 3$

p: probabilidade de ocorrer face 6  $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$

q: probabilidade de não ocorrer face 6  $\Rightarrow q = 1 - p \Rightarrow q = \frac{5}{6}$

Logo, a probabilidade é dada por:

$$p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow p = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} \Rightarrow p = \frac{5!}{3!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$p = \frac{250}{6^5} \Rightarrow \boxed{p = \frac{125}{3888} \approx 0,032 \approx 3,2\%}$$

2. Uma urna contém 10 bolas, sendo 4 pretas e 6 brancas. Calcule a probabilidade de saírem 3 bolas pretas em 5 retiradas.

Resolução:  $n(U) = 10$  (total de bolas)

$$p = \frac{4 \text{ (total de bolas pretas)}}{10 \text{ (total de bolas)}} \Rightarrow p = \frac{2}{5}$$

$$q = 1 - p \Rightarrow q = 1 - \frac{2}{5} \Rightarrow q = \frac{3}{5}$$

$n = 5$  e  $k = 3$

Substituindo esses valores em:  $p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ , temos:

$$p = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{5-3} \Rightarrow p = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{2^3}{5^3} \cdot \frac{3^2}{5^2} = \frac{10 \cdot 72}{5^5} = \frac{144}{625}$$
$$p \approx 0,23 \Rightarrow \boxed{p \approx 23,04\%}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**23.** Um jogador tem probabilidade  $\frac{2}{3}$  de vencer sempre que jogar. Se ele realiza 4 jogos, determinar a probabilidade de que ele vença: a) exatamente 2 jogos; b) mais da metade dos jogos.

**24.** Mirthes tem a probabilidade  $\frac{1}{4}$  de acertar num alvo. Se ela atira 7 vezes, qual a probabilidade de ela acertar no alvo pelo menos duas vezes?

**25.** A probabilidade de que um estudante universitário não se forme é 0,3. Escolhem-se 5 estudantes universitários ao acaso. Determinar a probabilidade de que: a) um deles não se forme; b) três deles não se formem; c) pelo menos um não se forme.

**26.** (Mauá-SP) Lançam-se dois dados com faces numeradas de 1 a 6. Calcule a probabilidade de que a soma obtida seja 10.

**27.** (FEI-SP) Jogando-se dois dados, qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 4 ou 5?

**28.** (UFMG) Dos 100 alunos de uma turma, 40 gostam de Álgebra, 30 gostam de Geometria, 15 gostam de Álgebra e Geometria. Um aluno é escolhido ao acaso. De quanto por cento é a probabilidade de que ele não goste de Álgebra nem de Geometria?

**29.** (Vunesp-SP) Numa gaiola estão 9 camundongos rotulados de 1, 2, 3, ..., 9. Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos têm igual possibilidade de ser escolhidos), a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é: a) 0,3777...; b) 0,47; c) 0,17; d) 0,2777...; e) 0,1333...

**30.** (Fuvest-SP) Uma urna contém 3 bolas: uma verde, uma azul e uma branca. Tira-se uma bola ao acaso, registra-se a cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se essa experiência mais duas vezes. Qual a probabilidade de serem registradas três cores distintas?

**31.** (Cescea-SP) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento: retirada de uma bola, considere os eventos:

$A = \{ \text{a bola retirada possui um número múltiplo de 2} \}$

$B = \{ \text{a bola retirada possui um número múltiplo de 5} \}$

Então a probabilidade do evento  $A \cup B$  é:

- a)  $\frac{13}{20}$    b)  $\frac{4}{5}$    c)  $\frac{7}{10}$    d)  $\frac{3}{5}$    e)  $\frac{11}{20}$

**32.** (UFRJ) De uma urna que contém 2 bolas vermelhas, 2 brancas e 2 verdes, retiramos 4 bolas sem repô-las. Qual a probabilidade de entre as bolas retiradas haver: a) um par de bolas de mesma cor; b) apenas duas cores.

**33.** (Cesgranrio-RJ) Considerando-se um hexágono regular e tomando-se ao acaso uma de suas diagonais, a probabilidade de que ela passe pelo centro do hexágono é de: a)  $\frac{1}{9}$ ; b)  $\frac{1}{6}$ ; c)  $\frac{1}{3}$ ; d)  $\frac{2}{9}$ ; e)  $\frac{2}{3}$

## Estatística

**1. Introdução** Diariamente, tentamos prever acontecimentos que podem interferir, de alguma forma, em nossas vidas. Algumas destas previsões podem ser meramente intuitivas, outras, entretanto, são feitas sobre uma base numérica.

**2. Definição** A Estatística é a ciência que faz uso de números para descrever fatos.

Na Estatística, chamamos *dados estatísticos* os dados numéricos que nos permitem descrever e avaliar os fatos para fazermos previsões, estimativas ou tomadas de decisões.

Os dados estatísticos podem ser representados através de tabelas ou gráficos.

**a) Tabelas:** As tabelas dispõem os dados estatísticos de modo comparativo. Por exemplo:

Para determinar a preferência pelos jornais A, B ou C, foram entrevistadas 2 000 pessoas. A pesquisa revelou o seguinte:

Jornais	Nº de Pessoas	% das pessoas
A	1400	70 %
B	240	12 %
C	360	18 %
Total	2000	100 %

Com base nesta pesquisa, os jornais B e C podem concluir que seus produtos devem sofrer algum tipo de modificação para ganhar o público-leitor.

**b) Gráficos:** As representações gráficas dos dados estatísticos facilitam a “leitura” dos resultados, que tornam-se bem mais visíveis do que em tabelas.

Os gráficos mais utilizados são:

*Gráfico de segmento de reta:*

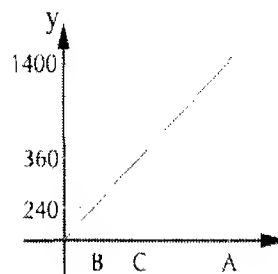


Gráfico de barras ou histograma:

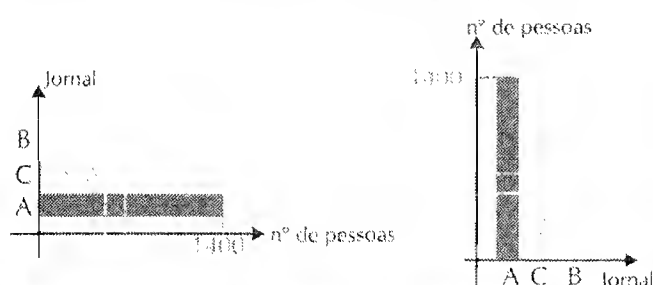
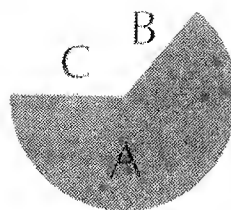


Gráfico setorial:

A representa 70%  
B representa 12%  
C representa 18%



### 3. Média aritmética, moda e mediana

Uma maneira útil de descrever um grupo como um todo consiste em encontrar um único número que represente o que é “médio” ou característico naquele particular conjunto de dados.

Quando se trata de pesquisa, esse valor é conhecido por *medida de tendência central*, pois ela geralmente se localiza em torno do meio ou centro de uma distribuição.

As três medidas de tendência central mais conhecidas são: média aritmética, moda e mediana.

**a) Média aritmética (Ma):** É a medida de tendência central mais usada. A média aritmética é o quociente entre a soma de  $n$  valores e o número  $n$  de valores desse conjunto. Exemplo:

Maísa teve as seguintes notas nas provas de Matemática do 1º bimestre: 6,5; 7,0; 9,5; 4,0 e 8,0.

Para obter uma nota que representará seu aproveitamento no bimestre, calculamos a média aritmética (Ma) de suas notas:

$$Ma = \frac{6,5 + 7,0 + 9,5 + 4,0 + 8,0}{5} = \frac{35,0}{5} = 7,0$$

**b) Moda (Mo):** A moda de um conjunto de  $n$  números é o valor que ocorre com maior frequência, isto é, o valor mais comum. Exemplo:

Na seqüência numérica: 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 a moda é 9, pois é o número que aparece com maior frequência ( $Mo = 9$ ).

Há casos em que pode haver mais de uma moda, por exemplo, na seqüência: 5, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10; há duas modas: 7 e 10. Portanto:  $Mo = 7$  e 10. E em outros, pode não existir a moda.

**c) Mediana (Md):** Mediana de um conjunto de  $n$  valores é o valor que ocupa a posição central quando esses dados são colocados em ordem crescente ou decrescente. Exemplo:



Nos dados: 126, 198, 164, 460 e 188, temos cinco elementos que, colocados em ordem crescente, nos fornecerão a mediana: 126, 164, 188, 198, 460. Como a mediana é o termo central da sequência numérica, temos:  $Md = 188$ .

No caso do número de elementos ser par, a mediana será a média aritmética entre os dois termos centrais. Exemplo:

68, 72, 78, 84, 87, 91  
    (termos centrais)

A mediana é a média aritmética entre 78 e 84, portanto temos:

$$Md = \frac{78 + 84}{2} = \frac{162}{2} = 81.$$

Para complementar o estudo das médias, vale ainda acrescentar:

**d) Média aritmética ponderada:** É a somatória do produto de cada elemento pelo seu respectivo peso, dividida pela soma dos pesos totais:

$$P = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Por exemplo, para calcular a média ponderada de 3, 5, 8, 1 com seus respectivos pesos: 2, 3, 1, 4, temos:

$$P = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{2 + 3 + 1 + 4} = \frac{33}{10} = 3,3$$

**e) Média geométrica:** É dada por  $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

Calculamos a média geométrica de, por exemplo, 5, 2, 4 e 10, da seguinte maneira:

$$n = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10} \Rightarrow G = \sqrt[4]{400} \Rightarrow G = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5^2} \Rightarrow G = 2\sqrt[4]{25}$$

**f) Média harmônica**

$$\text{É dada pela fórmula: } H = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Por exemplo, utilizamos a fórmula acima para calcular a média harmônica de 3, 4, 8, 2, 5 e 7. Como  $n = 6$ , temos:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = \\
 &= \frac{1}{\frac{280 + 210 + 105 + 420 + 168 + 120}{840}} = \\
 &= \frac{1}{\frac{1303}{840}} = \frac{840}{1303}
 \end{aligned}$$

### Exercícios complementares:

34. Determinar a média aritmética, a mediana e a moda nos dados abaixo:

- a) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6
- b) 50, 35, 20, 90, 15
- c) 3, 3, 4, 3, 1, 6, 5, 6, 6, 4
- d) 5, 4, 6, 6, 1, 3

35. Oito empregados diaristas numa companhia de porte médio ganham R\$ 153,00; R\$ 136,00; R\$ 153,00; R\$ 68,00; R\$ 17,00; R\$ 102,00; R\$ 51,00 e R\$ 17,00. Calcular:

- a) o salário-diário modal (isto é: a moda);
- b) o salário-diário mediano;
- c) o salário-diário médio.

36. (UFGO) Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais positivos. Define-se a média aritmética e a média geo-

métrica entre esses números da seguinte forma:

$$A = \left( \frac{x + y}{2} \right) \text{ (média aritmética)}$$

$$G = \sqrt{x \cdot y} \text{ (média geométrica)}$$

Nestas condições, pode-se afirmar que:

- (01) Caso  $x = 14$  e  $y = 56$ ,  $A = 35$  e  $G = 28$
- (02) Se  $x = y$ , então  $A = G$ .
- (04) Se  $0 < x < y$ , então  $x < A < y$ .
- (08) Se  $0 < x < y$ , temos  $G < A$ .
- (16) Quaisquer que sejam  $x$ ,  $y$  positivos,  $|A - x| = |A - y|$

$$(32) \log G = \frac{(\log x + \log y)}{2}$$

Some os valores das alternativas corretas

# Capítulo XIV

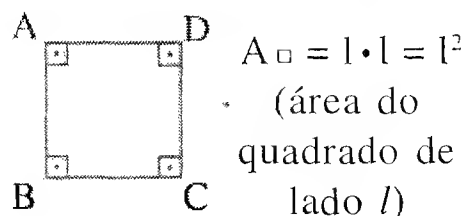
## GEOMETRIA ESPACIAL

**1. Introdução** Por volta de 300 a.C., na cidade de Alexandria, o matemático grego Euclides reuniu todas as descobertas dos babilônios, dos egípcios e dos gregos Tales de Mileto, Pitágoras e Eudóxio, a respeito da geometria.

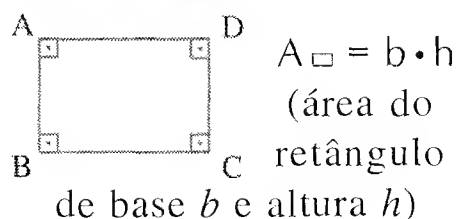
A obra de Euclides – *Elementos* – é composta de treze volumes e trata a geometria como uma ciência dedutiva. Essa dedução parte de um grupo de axiomas ou postulados que são a base dos teoremas de geometria.

**2. Figuras planas: áreas** Para estudarmos os sólidos geométricos, faz-se necessária uma recordação das áreas das figuras planas.

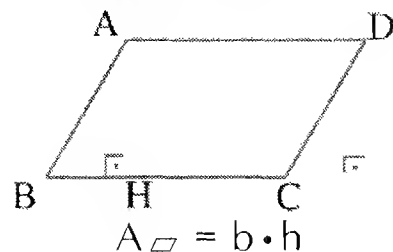
### a) Quadrado



### b) Retângulo

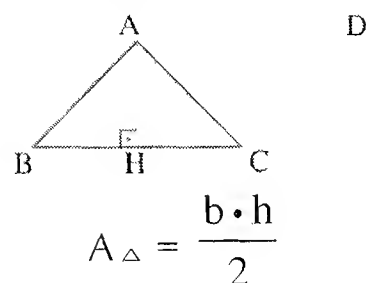


### c) Paralelogramo



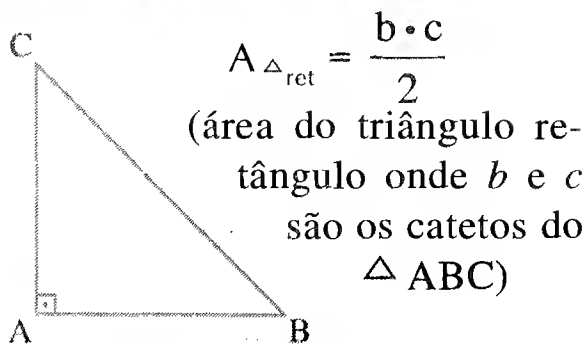
(área do paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$ )

### d) Triângulo

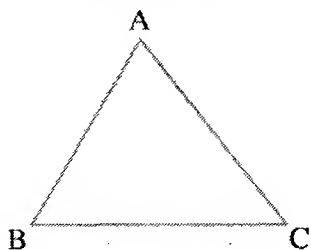


(área do triângulo de base  $b$  e altura  $h$ )

### d.1) Triângulo retângulo

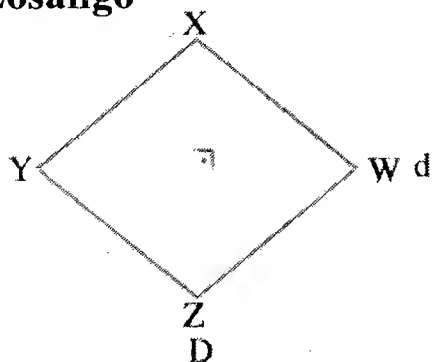


### d.3) Área de um triângulo conhecendo-se as medidas de dois lados e a medida do ângulo formado por esses lados



$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}, \text{ onde } \hat{A} \text{ é o ângulo, e } b \text{ e } c \text{ são os lados do triângulo } ABC.$$

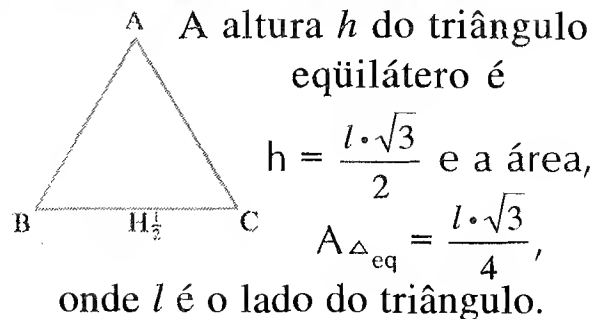
### e) Losango



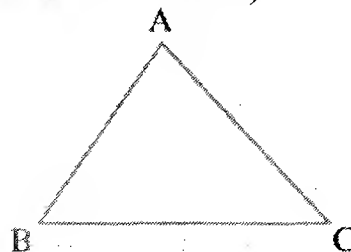
$$A_{\diamond} = \frac{d \cdot D}{2}$$

(área do losango de diagonal menor  $d$  e diagonal maior  $D$ )

### d.2) Triângulo equilátero



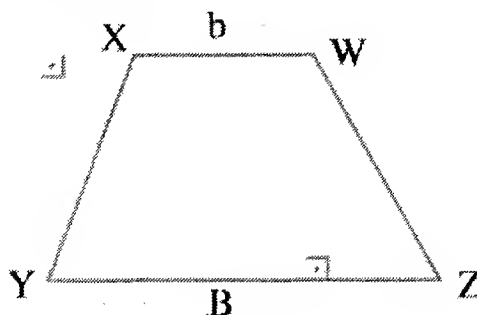
### d.4) Área de um triângulo conhecendo-se as medidas dos três lados (fórmula de Herão)



Dadas as medidas dos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e sendo  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , o semiperímetro do triângulo  $ABC$ , então sua área é:

$$A_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

### f) Trapézio



$$A_{\square} = \frac{(b+B) \cdot h}{2}$$

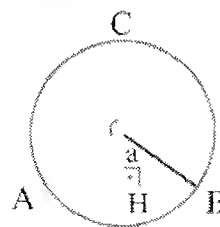
(área do trapézio de base menor  $b$ , base maior  $B$  e altura  $h$ )

**g) Polígono, regular inscrito na circunferência**

Cálculo das medidas do lado  $l$  e do apótema  $a$  de alguns polígonos regulares inscritos, de  $n$  lados em função do raio  $r$ .

Observe que o apótema  $a$  é a distância do centro do polígono aos lados.

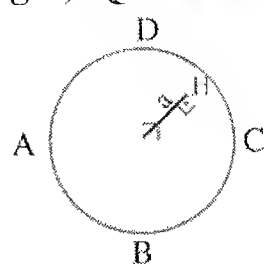
**g.1) Triângulo equilátero inscrito**



$$l = r\sqrt{3}$$

$$a = \frac{r}{2}, \text{ onde } l \text{ é o lado do triângulo ABC}$$

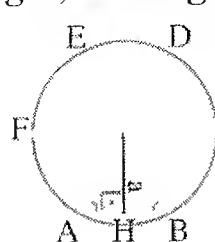
**g.2) Quadrado inscrito**



$$l = r\sqrt{2}$$

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}, \text{ onde } l \text{ é o lado do quadrado ABCD}$$

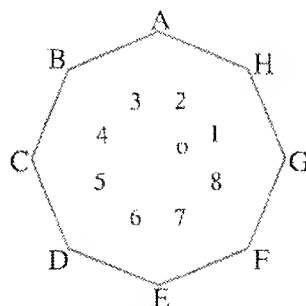
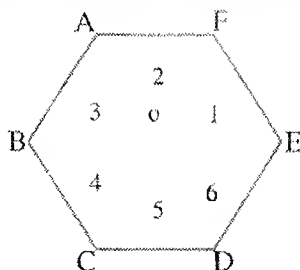
**g.3) Hexágono inscrito**



$$l = r$$

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}, \text{ onde } l \text{ é o lado do hexágono}$$

**h) Polígono regular**



A área do polígono regular é dada pela soma das áreas dos triângulos:

$$A_p = A_{\triangle_1} + A_{\triangle_2} + A_{\triangle_3} + \dots + A_{\triangle_n}$$

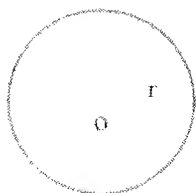
$$\text{Mas: } A_{\triangle_1} = A_{\triangle_2} = \dots = A_{\triangle_n} = \frac{l \cdot a}{2}$$

sendo que  $n$  é o número de lados (igual ao número de triângulos no polígono);  $p$  é o perímetro;  $A_p$  é a área do polígono regular;  $l$  é a medida do lado e  $a$  é a medida do apótema.

$$\text{Então: } A_p = n \cdot A_{\triangle_n}$$

$$A_p = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}, \text{ mas } n \cdot l = p. \text{ Logo } A_p = \frac{p \cdot a}{2}$$

### i) Círculo

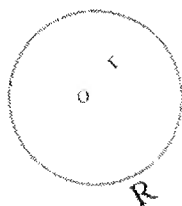


$A_c = p \cdot r^2$ , onde  $r$  é o raio e  $p$  é um número irracional que vale aproximadamente 3,14159...

Lembremos, ainda, que o comprimento da circunferência é dado pela fórmula:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

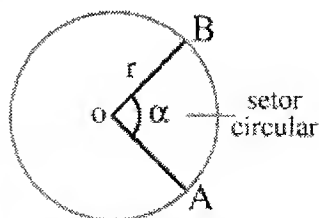
### j) Coroa circular



A área da coroa circular é igual a diferença entre as áreas dos círculos maior e menor. Assim:

$A_{cc} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ , onde  $R$  é o raio da circunferência maior e  $r$  é o raio da circunferência menor.

### k) Setor circular



$$A_{\text{setor}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$$

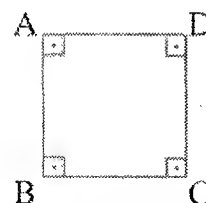
## Exercícios resolvidos:

1. Calcular a área do quadrado de 3,0 cm de lado:

Resolução:

$$A_{\square} = l \cdot l \Rightarrow A_{\square} = 3,0 \text{ cm} \cdot 3,0 \text{ cm}$$

$$\boxed{A_{\square} = 9,0 \text{ cm}^2}$$



2. Sabendo-se que a área de um quadrado é de 50 cm<sup>2</sup>, determinar o lado desse quadrado.

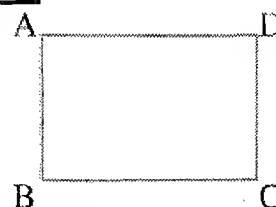
$$\text{Resolução: } A_{\square} = l \cdot l = l^2 \Rightarrow 50 \text{ cm}^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{50 \cdot \text{cm}^2}$$

$$l = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot \text{cm}^2} \Rightarrow \boxed{l = 5\sqrt{2} \text{ cm}}$$

3. Calcular a área do retângulo abaixo de base 4 cm e altura 3 cm.

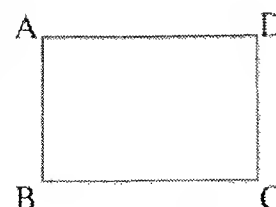
$$\text{Resolução: } A_{\square} = b \cdot h \Rightarrow A_{\square} = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$$

$$\boxed{A_{\square} = 12 \text{ cm}^2}$$



4. A base de um retângulo está para a altura, assim como 3 está para 2. Sabendo-se que o perímetro desse retângulo é de 30 cm, calcular a sua área.

Resolução: Seja o retângulo ao lado:



Temos:  $\frac{3}{2} = \frac{b}{h}$  (I) e o perímetro do retângulo será:

$$b + b + h + h = 30 \text{ cm} \Rightarrow 2b + 2h = 30 \text{ cm}$$

$$b + h = 15 \text{ cm}$$

Pela propriedade das proporções, podemos desenvolver (I).

$$\text{Assim: } \frac{b}{h} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{b+h}{b} = \frac{3+2}{3} \text{ ou } \frac{b+h}{h} = \frac{3+2}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{15}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5b = 3 \cdot 15 \Rightarrow b = 9 \text{ cm} \\ \frac{15}{h} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5h = 2 \cdot 15 \Rightarrow h = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$A_{\square} = b \cdot h \Rightarrow A_{\square} = 9 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{A_{\square} = 54 \text{ cm}^2}$$

5. Calcular a área do paralelogramo, onde a medida da altura é 15 cm e a medida da base é igual a  $\frac{2}{5}$  da medida da altura.

Resolução: Temos:  $h = 15 \text{ cm}$  e  $b = \frac{2}{5} \cdot h \Rightarrow b = \frac{2}{5} \cdot 15 \Rightarrow b = 6 \text{ cm}$

Então, a área do paralelogramo será:

$$A_{\square} = b \cdot h \Rightarrow A_{\square} = 15 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{A_{\square} = 90 \text{ cm}^2}$$

6. Determinar a base e a altura de um paralelogramo, sabendo-se que sua área é de  $72 \text{ cm}^2$  e que a base é o dobro da medida da altura.

Resolução: Temos:  $h = x$ ,  $b = 2h \Rightarrow b = 2x$  e  $A_{\square} = 72 \text{ cm}^2$

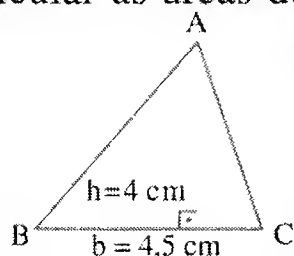
Sendo  $A_{\square} = b \cdot h$ , então:  $72 \text{ cm}^2 = x \cdot 2x$

$$72 \text{ cm}^2 = \Rightarrow = 6 \text{ e } 2x = 2 \cdot 6 = 12$$

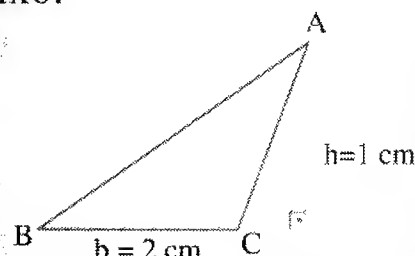
Portanto:  $\boxed{h = 6 \text{ cm e } b = 12 \text{ cm}}$

7. Calcular as áreas dos triângulos abaixo:

a)



b)



$$\text{Resolução: a) } A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\triangle} = \frac{4,5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{A_{\triangle} = \frac{18}{2} \text{ cm}^2}$$

$$\boxed{A_{\triangle} = 9 \text{ cm}^2}$$

$$b) A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{2 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{2}{2} \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_{\Delta} = 1 \text{ cm}^2}$$

8. Sabendo-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo mede 5 cm e um dos catetos mede 3 cm, determinar a área desse triângulo.

Resolução:  $A_{\Delta_{\text{ret}}} = \frac{b \cdot c}{2}$ , onde  $b$  e  $c$  são catetos

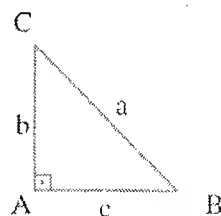
Temos:  $a = 5 \text{ cm}$  (hipotenusa),  $b = 3 \text{ cm}$  e  $c = ?$

Aplicando a relação de Pitágoras, temos:

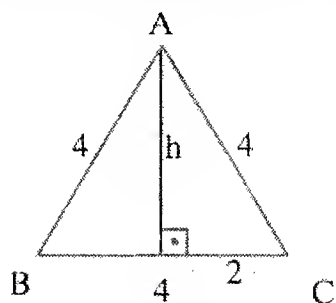
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 \text{ cm}$$

Logo, a área do triângulo será:

$$A_{\Delta_{\text{ret}}} = \frac{3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} \Rightarrow A_{\Delta_{\text{ret}}} = \frac{12}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_{\Delta_{\text{ret}}} = 6 \text{ cm}^2}$$



9. Um triângulo equilátero tem 4 cm de lado. Determinar a área e a altura desse triângulo.



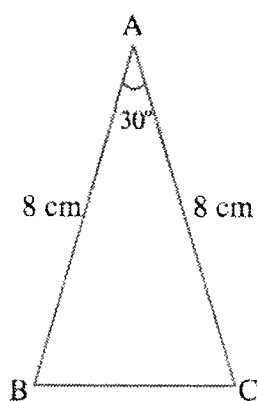
$$\text{Resolução: } A_{\Delta_{\text{eq}}} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\Delta_{\text{eq}}} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\Delta_{\text{eq}}} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Para a altura } h: h = \frac{l \sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{4 \sqrt{3}}{2}$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

10. Calcular a área do triângulo abaixo, dado  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .



Resolução: Podemos usar a fórmula:

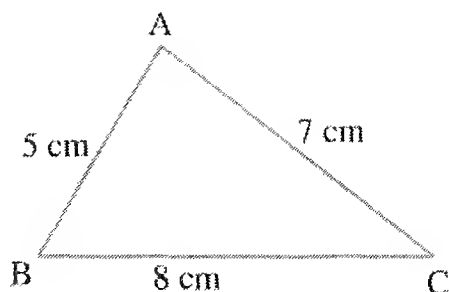
$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}, \text{ já que conhecemos as medidas de dois de seus lados e o ângulo formado por esses lados. Portanto: } A_{\Delta} = \frac{8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$\boxed{A_{\Delta} = 16 \text{ cm}^2}$$

11. Um triângulo tem os lados medindo, respectivamente: 5 cm, 7 cm e 8 cm. Determinar a sua área.

Resolução: Podemos usar a fórmula de Herão, pois são dados os três lados do triângulo:





$$A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

onde  $p$  é o semi-perímetro do triângulo.

$$p = \frac{5 + 7 + 8}{2} \Rightarrow p = 10$$

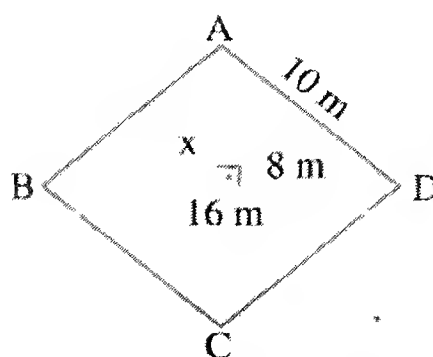
$$A_{\Delta} = \sqrt{10 \cdot (10-5) \cdot (10-7) \cdot (10-8)} =$$

$$= \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{300} \Rightarrow \boxed{A_{\Delta} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

12. Resolver: a) A área de um losango mede  $16 \text{ cm}^2$ . Sabendo-se que a diagonal menor mede  $4 \text{ cm}$ , determine a medida da diagonal maior e b) O lado de um losango mede  $10 \text{ cm}$ . Sabendo-se que a diagonal maior mede  $16 \text{ m}$ , calcule a área desse losango.

Resolução: a) Temos:  $A_{\diamond} = \frac{d \cdot D}{2} \Rightarrow A_{\diamond} = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow d = 4 \text{ cm}$

Então:  $16 \text{ cm}^2 = \frac{4 \text{ cm} \cdot D}{2} \Rightarrow D = \frac{16 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{D = 8 \text{ cm}}$



b) Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo retângulo hachurado na figura, temos:

$$10^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow x = 6 \text{ m}$$

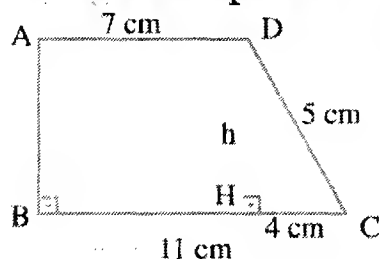
Assim, a diagonal menor é:

$$d = 2 \cdot x \Rightarrow d = 2 \cdot 6 \Rightarrow d = 12 \text{ m}$$

Logo, a área do losango:

$$A_{\diamond} = \frac{d \cdot D}{2} \Rightarrow A_{\diamond} = \frac{12 \text{ m} \cdot 16 \text{ m}}{2} \Rightarrow \boxed{A_{\diamond} = 96 \text{ m}^2}$$

13. Num trapézio retângulo a base menor mede  $7 \text{ cm}$ , a base maior mede  $11 \text{ cm}$  e o lado oblíquo desse trapézio mede  $5 \text{ cm}$ . Determinar a área do trapézio.



Resolução: Como a base maior mede  $11 \text{ cm}$ , isto é:  $\overline{BC} = 11 \text{ cm}$ , então  $\overline{HC} = 11 - 7$   
 $\overline{HC} = 4 \text{ cm}$ .

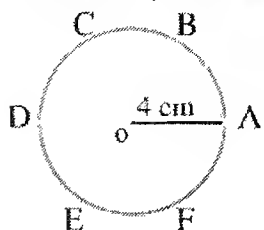
Logo, pela relação de Pitágoras no triângulo retângulo DHC, temos:

$$5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 16 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

Portanto, a área  $A_{\square} = \frac{(b+B) \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\square} = \frac{(7 \text{ cm} + 11 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ cm}}{2}$

$$A_{\square} = \frac{18 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}{2} \Rightarrow A_{\square} = 27 \text{ cm}^2$$

14. Calcular a área do hexágono regular inscrito abaixo e a área do círculo (considere:  $\pi = 3,14$ ).



Resolução: Temos:  $l = r = 4 \text{ cm}$

$$a = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$n = 6 \text{ (número de lados do hexágono)}$$

a) Área do hexágono regular inscrito:  $A_p = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$

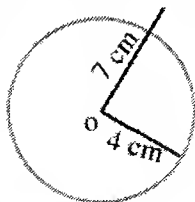
$$A_{\text{hex}} = \frac{6 \cdot 4 \text{ cm} \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm}}{2} \Rightarrow A_{\text{hex}} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b) Área do círculo:  $A_c = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_c = 3,14 \cdot (4 \text{ cm})^2 \Rightarrow$

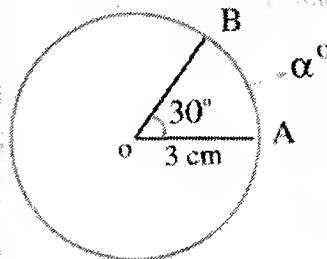
$$A_c = 50,24 \text{ cm}^2$$

15. Calcular as áreas nas figuras abaixo:

a)



b)



Resolução: a) A área da coroa circular é:

$$A_{cc} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2), \text{ onde } R = \text{raio maior e } r = \text{raio menor.}$$

$$A_{cc} = 3,14 \cdot [(7 \text{ cm})^2 - (4 \text{ cm})^2]$$

$$A_{cc} = (3,14) \cdot (33 \text{ cm}^2) \Rightarrow A_{cc} = 103,62 \text{ cm}^2$$

b) A área do setor circular é:  $A_{\text{setor}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$

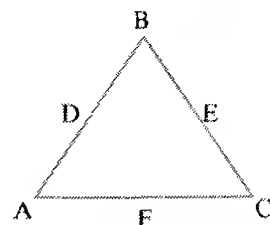
$$A_{\text{setor}} = \frac{3,14 \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} \Rightarrow A_{\text{setor}} = \frac{3,14 \cdot 9 \text{ cm}^2}{12} \Rightarrow A_{\text{setor}} = 2,35 \text{ cm}^2$$

### Exercícios propostos:

1. Um triângulo tem os seus lados medindo, respectivamente, 10 cm, 24 cm e 26 cm. Calcular a área desse triângulo.

2. (UFAM) No triângulo equilátero ABC de lado  $x \text{ m}$ , D, E e F são pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, conforme a figura ao lado:

A área do triângulo DEF mede:



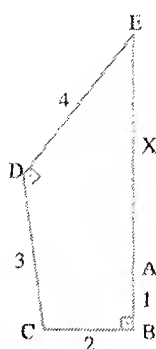
a)  $\frac{x^2\sqrt{3}m^2}{2}$

b)  $\frac{3x^2 m^2}{4}$

c)  $\frac{x^2\sqrt{3} m^2}{4}$

d)  $\frac{x^2\sqrt{3} m^2}{16}$

3. (UFSE) Os triângulos representados na figura abaixo são retângulos. A medida  $x$ , do lado  $\overline{AE}$ , é:



a)  $\sqrt{30}$

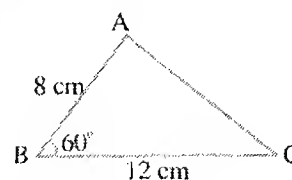
b) 5

c)  $2\sqrt{6}$

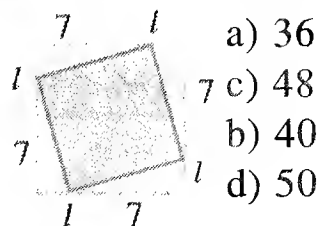
d) 4,8

e)  $\sqrt{20}$

4. Calcular a área do triângulo abaixo:



5. (PUC-SP) A área do quadrado sombreado na figura é:



a) 36

c) 48

b) 40

d) 50

6. Um quadrado tem diagonais iguais a  $5\sqrt{2}$  cm. Qual é a área desse quadrado?

7. Um retângulo tem 6 cm de base e 4 cm de altura (largura). Calcular a diagonal desse retângulo.

8. Os lados de um triângulo isósceles medem 7 cm, 7 cm e 10 cm. Determine a área desse triângulo.

9. A altura e a base de um paralelogramo estão entre si, assim como 2 está para 7. Sabendo-se que o perímetro desse paralelogramo é 54 cm, então sua área é de: a) 54 cm<sup>2</sup>, b) 216 cm<sup>2</sup>, c) 126 cm<sup>2</sup>, d) 63 cm<sup>2</sup>, e) 108 cm<sup>2</sup>.

10. Determinar as bases de um trapézio de 45 m<sup>2</sup> de área, sabendo que uma base é o dobro da outra e que a altura tem 6 m.

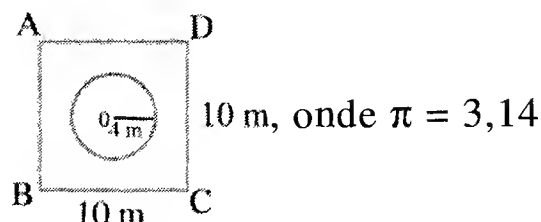
11. Calcular a área do losango de perímetro 40 cm e diagonal 12 cm.

12. Obter o perímetro do trapézio isósceles de 84 m<sup>2</sup> de área e bases de 24 m e 32 m.

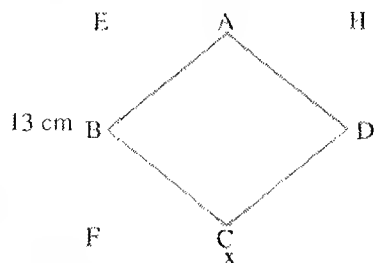
13. (Vunesp-SP) A área de um trapézio isósceles de lados de medidas 2, 5, 10 e 5 é igual a: a) 24, b) 22, c) 20, d) 18, e) 16.

14. (UFGO) Calcule a área de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 1.

15. Determine a área da região hachurada:



**16.** Determine o valor de  $x$  na figura ao lado, sabendo que a área do retângulo é de  $208 \text{ cm}^2$ .



**17.** (FAAP-SP) Qual é a área do hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 12 m?

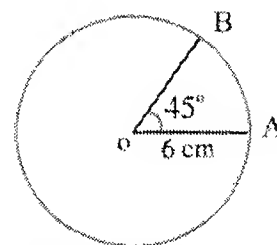
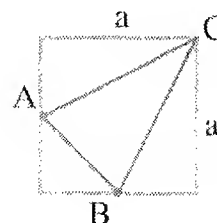
**19.** Determinar a área de uma coroa circular sendo respectivamente 5 cm e 2 cm os raios das circunferências externa e interna (dado:  $\pi = 3,14$ ).

**20.** A área do setor circular na figura ao lado é:  
(dado:  $\pi = 3,14$ )

- a) 14, 13 cm<sup>2</sup>  
b) 508,68 cm<sup>2</sup>  
c) 270,0 cm<sup>2</sup>  
d) 37,68 cm<sup>2</sup>  
e) n. d. a.

**21.** Uma circunferência tem 10 cm de diâmetro. Calcule a área de um quadrado inscrito nessa circunferência.

**18.** (Cessem) A figura abaixo mostra um quadrado de lado  $a$  e um triângulo ABC, onde A e B são pontos médios dos lados do quadrado. Calcule a área do triângulo ABC.



## Geometria espacial de posição

**1. Definição** Na geometria espacial o conjunto-universo será o *espaço*. O espaço é o conjunto de todos os pontos.

Só para recordarmos, *ponto*, *reta* e *plano* são idéias intuitivas, ou seja, são aceitas sem definição.

Indicamos o *ponto* por: letras latinas maiúsculas

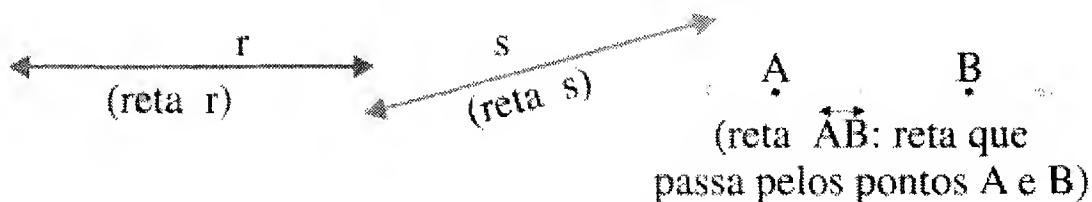
A.

(ponto A)

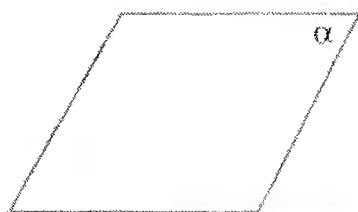
• B

(ponto B)

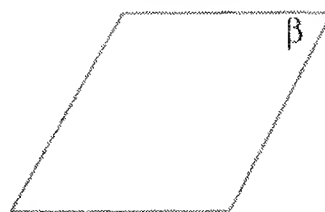
Indicamos a *reta* por letras latinas minúsculas



Indicamos o *plano* por letras gregas minúsculas



(plano  $\alpha$ )



(plano  $\beta$ )

**2. Postulados ou axiomas** São proposições consideradas como verdadeiras sem serem demonstradas e apoiadas em conceitos primitivos ou intuitivos. Esses postulados ou axiomas estabelecem as relações básicas entre ponto, reta e plano.

**a) Postulados do espaço**

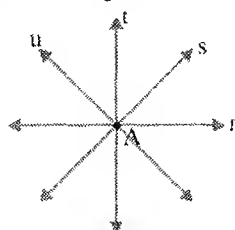
- a.1) O espaço contém infinitos pontos.
- a.2) No espaço há infinitas retas.
- a.3) No espaço há infinitos planos.

**b) Postulados da reta**

b.1) Numa reta, e fora dela, existem infinitos pontos.



b.2) Por um ponto, podem-se traçar infinitas retas.



b.3) Por dois pontos distintos, pode-se traçar uma única reta.

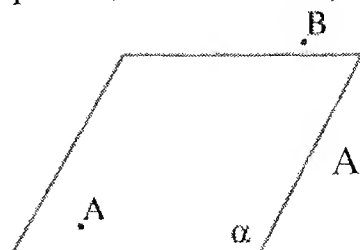


b.4) Um ponto qualquer da reta divide-a em duas semi-retas.



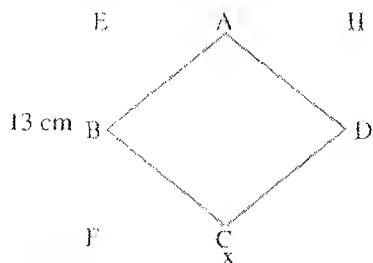
**c) Postulados do plano**

c.1) Num plano, e fora dele, existem infinitos pontos.



$A \in \alpha, B \notin \alpha$

**16.** Determine o valor de  $x$  na figura ao lado, sabendo que a área do retângulo é de  $208 \text{ cm}^2$ .

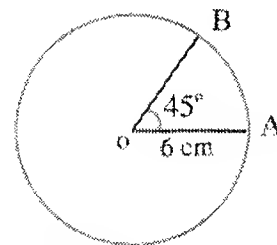


**17.** (FAAP-SP) Qual é a área do hexágono regular inscrito numa circunferência de raio  $12 \text{ m}$ ?

**19.** Determinar a área de uma coroa circular sendo respectivamente  $5 \text{ cm}$  e  $2 \text{ cm}$  os raios das circunferências externa e interna (dado:  $\pi = 3,14$ ).

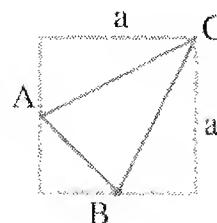
**20.** A área do setor circular na figura ao lado é: (dado:  $\pi = 3,14$ )

- a)  $14,13 \text{ cm}^2$
- b)  $508,68 \text{ cm}^2$
- c)  $270,0 \text{ cm}^2$
- d)  $37,68 \text{ cm}^2$
- e) n. d. a.



**21.** Uma circunferência tem  $10 \text{ cm}$  de diâmetro. Calcule a área de um quadrado inscrito nessa circunferência.

**18.** (Cessem) A figura abaixo mostra um quadrado de lado  $a$  e um triângulo ABC, onde A e B são pontos médios dos lados do quadrado. Calcule a área do triângulo ABC.



## Geometria espacial de posição

**1. Definição** Na geometria espacial o conjunto-universo será o *espaço*. O espaço é o conjunto de todos os pontos.

Só para recordarmos, *ponto*, *reta* e *plano* são idéias intuitivas, ou seja, são aceitas sem definição.

Indicamos o *ponto* por: letras latinas maiúsculas

A •

• B

(ponto A)

(ponto B)

Indicamos a *reta* por letras latinas minúsculas

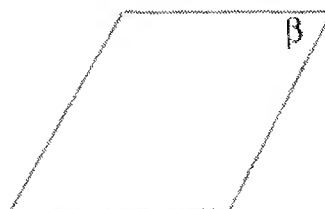


A • B  
(reta  $\overleftrightarrow{AB}$ : reta que passa pelos pontos A e B)

Indicamos o *plano* por letras gregas minúsculas



(plano  $\alpha$ )



(plano  $\beta$ )

## 2. Postulados ou axiomas

São proposições consideradas como verdadeiras sem serem demonstradas e apoiadas em conceitos primitivos ou intuitivos. Esses postulados ou axiomas estabelecem as relações básicas entre ponto, reta e plano.

### a) Postulados do espaço

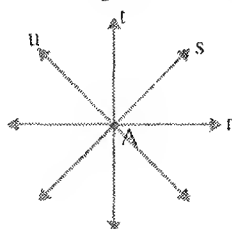
- a.1) O espaço contém infinitos pontos.
- a.2) No espaço há infinitas retas.
- a.3) No espaço há infinitos planos.

### b) Postulados da reta

b.1) Numa reta, e fora dela, existem infinitos pontos.



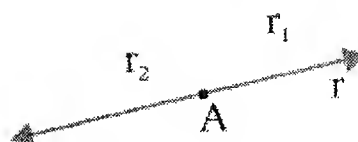
b.2) Por um ponto, podem-se traçar infinitas retas.



b.3) Por dois pontos distintos, pode-se traçar uma única reta.

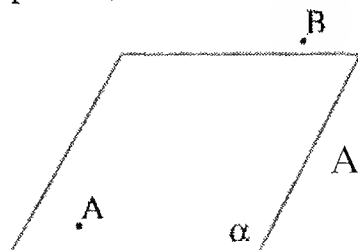


b.4) Um ponto qualquer da reta divide-a em duas semi-retas.



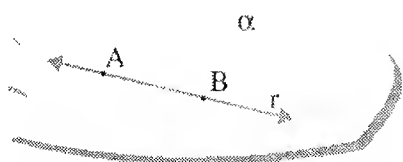
### c) Postulados do plano

c.1) Num plano, e fora dele, existem infinitos pontos.

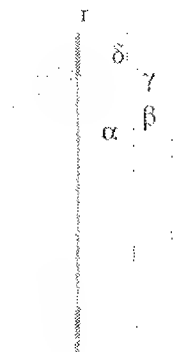


$A \in \alpha, B \notin \alpha$

c.2) Toda reta que possui dois pontos distintos num mesmo plano, fica inteiramente contida neste plano, logo, a reta é um subconjunto do plano.

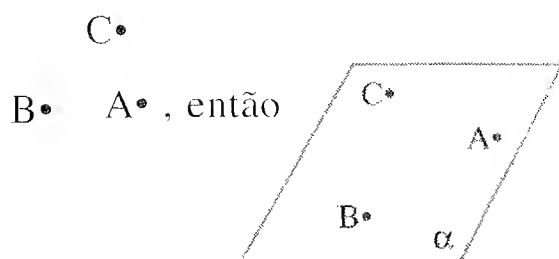


c.3) Por uma reta, podem-se traçar infinitos planos.

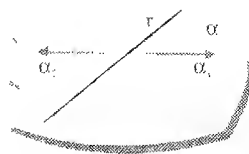


c.4) Três pontos não alinhados determinam um único plano.

Se temos:



c.5) Uma reta qualquer de um plano, divide-o em duas partes chamadas semi-planos.



A reta chama-se *origem* dos semi-planos:  $r \in \alpha_1$  e  $r \in \alpha_2$

Esses semi-planos

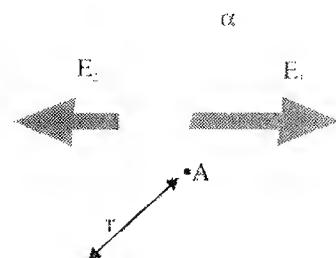
são chamados *opostos*:

$$\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha \text{ e } \alpha_1 \cap \alpha_2 = r$$

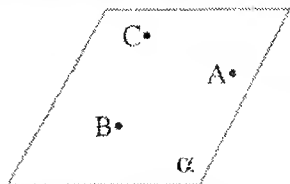
c.6) Um plano divide o espaço em duas partes chamadas semi-espacos.

O plano  $\alpha$  é a origem dos dois semi-espacos.

Se uma reta  $r$  passar de um semi-espaco para outro, então  $r$  necessariamente intercepta o plano  $\alpha$ .

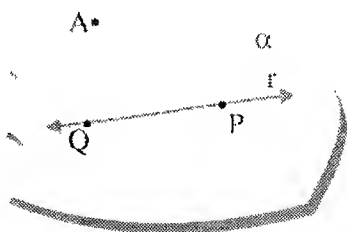


**3. Determinando um plano** Através do postulado de que três pontos não-colineares determinam um plano.



podemos concluir que um plano pode ser determinado, também, por:

a) Uma reta  $r$  e um ponto não-pertencente a  $r$

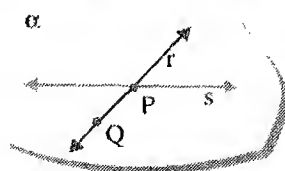


Pois, se destacarmos dois pontos P e Q da reta  $r$ , temos três pontos não-colineares A, P e Q, o que, pela definição, determina um plano.

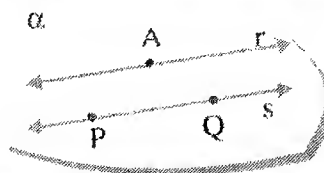


Ou seja, se  $A \notin r$ , então existe um único plano  $\alpha$  tal que  $A \in \alpha$  e  $r \subset \alpha$ .

b) Duas retas concorrentes



c) Duas retas paralelas



### Exercícios propostos:

22. Classificar as afirmações abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F).

- Por um ponto passam infinitas retas ..... ( )
- Se  $r$  é uma reta tal que os pontos  $P$  e  $Q$  ( $P \neq Q$ ) pertencem a essa reta, então  $r$  está inteiramente contida nesse plano ..... ( )
- Por um ponto passa uma e uma só reta ..... ( )
- Dois pontos distintos são sempre colineares ..... ( )
- Numa reta existem apenas dois pontos ..... ( )
- Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , tal que  $P \notin r$ , então, por  $r$  e  $P$  passa um único plano  $\alpha$  ..... ( )
- Por três pontos colineares (alinhados), passa um e somente um plano ..... ( )
- Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém ..... ( )

23. (FEI-SP) Na determinação de um plano são suficientes os seguintes elementos:

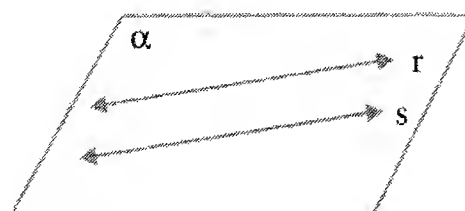
- duas retas distintas
- uma reta e um ponto
- duas retas reversas
- duas retas concorrentes
- n. d. a.

**4. Posições relativas de duas retas no espaço** Duas retas distintas, no espaço, podem ser:

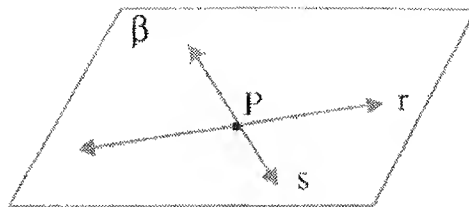
a) Coplanares

Duas retas  $r$  e  $s$  ( $r \neq s$ ) se dizem *coplanares*, quando existe um plano que a contém.

Ex.: Retas paralelas  $r \cap s = \emptyset$



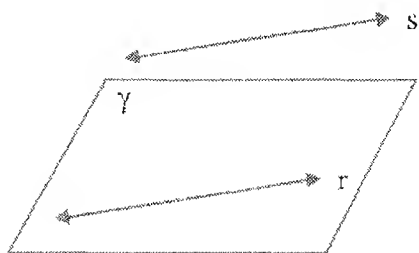
Retas concorrentes  $r \cap s = \{P\}$



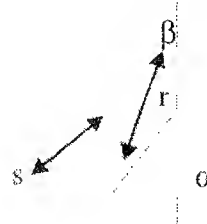
## b) Reversas

Duas retas  $r$  e  $s$  ( $r \neq s$ ) são *reversas* quando não estão contidas num mesmo plano e não têm ponto comum. Ex.:

$r$  e  $s$  são reversas



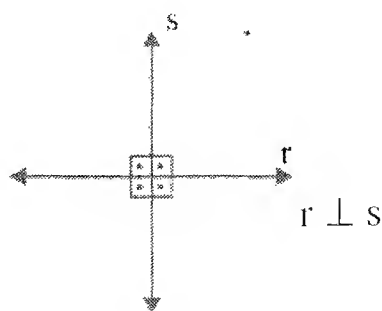
$r$  e  $s$  são reversas



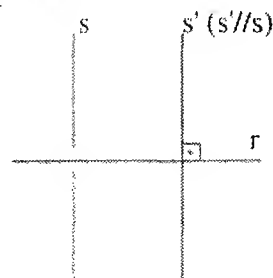
Se  $r$  e  $s$  são reversas,  $r \cap s = \emptyset$ , mas diferem das retas paralelas por não estarem no mesmo plano.

## 5. Diferenças entre retas perpendiculares e retas ortogonais

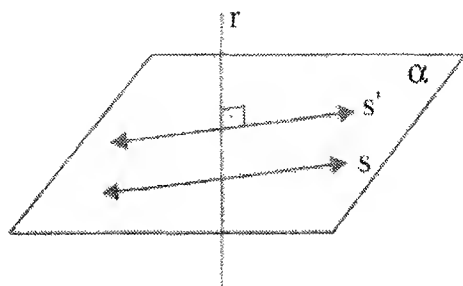
a) Duas retas concorrentes são *perpendiculares* quando formam quatro ângulos retos e são coplanares.



b) Duas retas são *ortogonais* se existir uma reta paralela a uma delas e perpendicular à outra, sendo que elas não estão no mesmo plano.



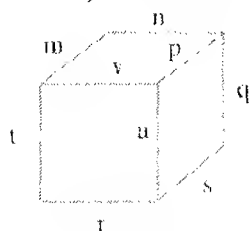
Na figura notamos que  $s \parallel s'$  e  $s' \perp r \Rightarrow r$  e  $s$  são ortogonais ( $r \perp s$ ). Vejamos outro exemplo:



$$s' \parallel s \text{ e } s' \perp r \Rightarrow r \perp s$$

Exemplos:

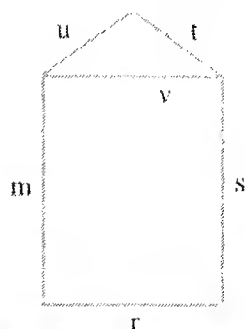
a) No cubo abaixo, temos:



$r \perp t$  ( $r$  é perpendicular a  $t$ )  
 $s \perp u$  ( $s$  é perpendicular a  $u$ )  
 $t \perp s$  ( $t$  é ortogonal a  $s$ )  
 $q \perp r$  ( $q$  é ortogonal a  $r$ )

coplanares  
 não coplanares

b) No poliedro convexo abaixo, temos:

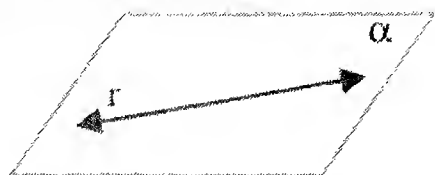


As retas  $u$  e  $t$  são concorrentes:  $u \times t$   
 As retas  $m$  e  $s$  são paralelas:  $m \parallel s$

## 6. Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

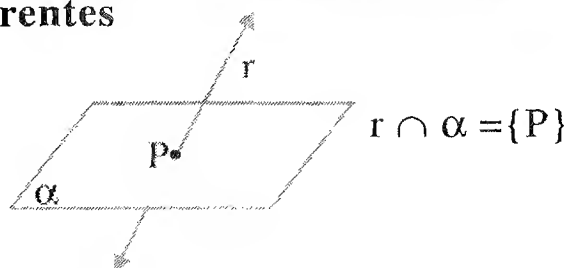
Há três posições de uma reta em relação a um plano:

a) A reta está contida no plano



Todos os pontos da reta pertencem ao plano.

b) A reta e o plano são concorrentes

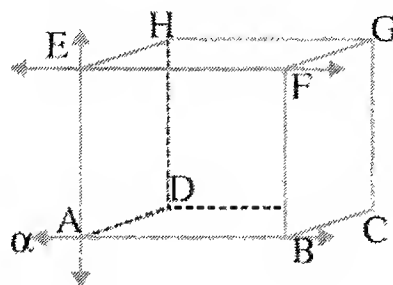


c) A reta é paralela ao plano



$$r \cap \alpha = \emptyset \Leftrightarrow r \parallel \alpha$$

Exemplo: Na figura temos:



A reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , no exemplo, está contida no plano  $\alpha$

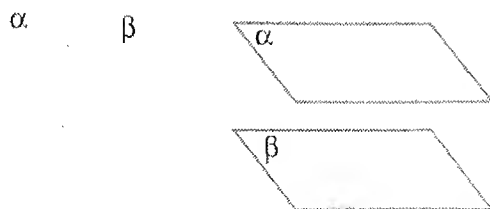
A reta  $\overleftrightarrow{AE}$  e o plano  $\alpha$  são concorrentes (a reta  $\overleftrightarrow{AE}$  fura o plano  $\alpha$ ) e tem o ponto  $A$  em comum, isto é:  $\overleftrightarrow{AE} \cap \alpha = \{A\}$

A reta  $\overleftrightarrow{EF}$  é paralela ao plano  $\alpha$ , isto é,  $\overleftrightarrow{EF} \cap \alpha = \emptyset$

## 7. Posições relativas de dois planos no espaço

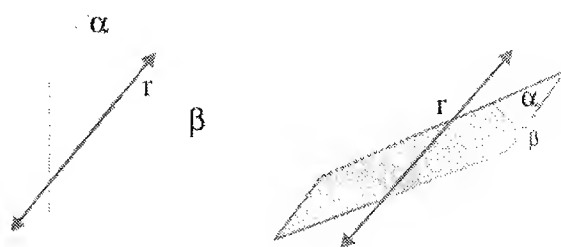
Dados dois planos, podemos ter duas posições relativas:

a) **Planos paralelos:** Dois planos distintos são paralelos quando eles não têm pontos em comum.



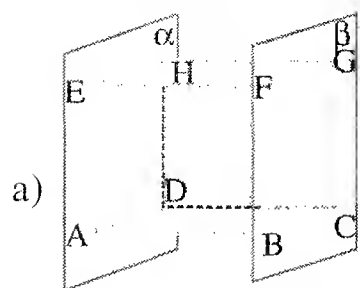
$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

b) **Planos secantes (ou concorrentes):** Dois planos distintos são secantes quando têm uma única reta em comum.

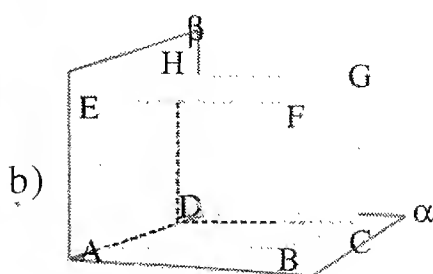


$\alpha \cap \beta = r$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  são planos secantes.

Nas figuras abaixo:



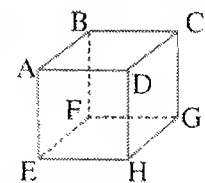
$\alpha // \beta$



Os planos  $\beta$  e  $\alpha$  se cortam na reta  $\overleftrightarrow{AD}$ , logo, são secantes.

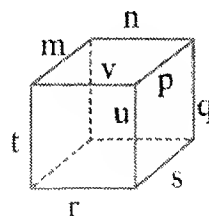
### ⇒ Exercícios propostos:

24. (UFAL) Considerando o cubo abaixo representado, é verdade que as retas  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AH}$  são:



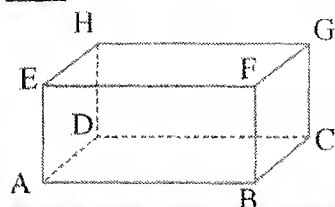
- |               |                 |
|---------------|-----------------|
| a) reversas   | d) coincidentes |
| b) paralelas  | e) concorrentes |
| c) ortogonais |                 |

25. Observando o cubo ao lado, classificar as sentenças a seguir em verdadeiras (V) ou falsas (F).



- a)  $r$  e  $s$  são retas concorrentes
- b)  $t$  e  $s$  são retas reversas
- c)  $q$  e  $s$  são retas ortogonais ( $q \perp s$ )
- d)  $v$  e  $n$  são retas paralelas
- e)  $q$  e  $m$  são retas perpendiculares ( $q \perp m$ )

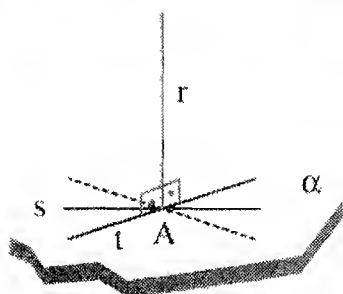
**26.** Considerando a figura abaixo:



- a) Dê um plano paralelo ao plano (ABCD)
- b) Dê um plano secante ao plano (EFGH)
- c) Dê um plano paralelo ao plano (BCFG)
- d) Dê um plano secante ao plano (ADEH)

## 8. Perpendicularismo entre reta e plano

Se  $r$  é uma reta perpendicular a duas retas  $s$  e  $t$  de um plano  $\alpha$ , que passam pela intersecção de  $r$  com o plano  $\alpha$ , então  $r$  é perpendicular a qualquer reta que passe por essa intersecção e esteja contida no plano  $\alpha$ .



$r$  fura o plano  $\alpha$  em  $A$

$s$  e  $t$  são retas de  $\alpha$  passando por  $A \Rightarrow r \perp \alpha$

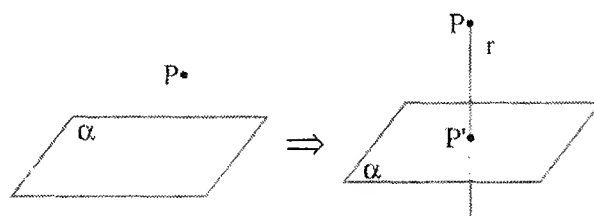
logo:  $r \perp s$ ,  $r \perp t$

Esse resultado é conhecido vulgarmente como “teorema do pé-de-galinha”. Note uma aplicação prática na figura abaixo.



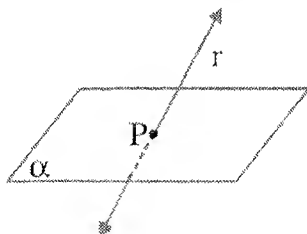
## 9. Projeção ortogonal

a) De um ponto  $P$  sobre o plano  $\alpha$ : Dados um ponto  $P$  e um plano  $\alpha$ , podemos traçar por  $P$  uma reta  $r$  perpendicular a  $\alpha$ , de modo que  $r$  fure  $\alpha$  no ponto  $P'$ .

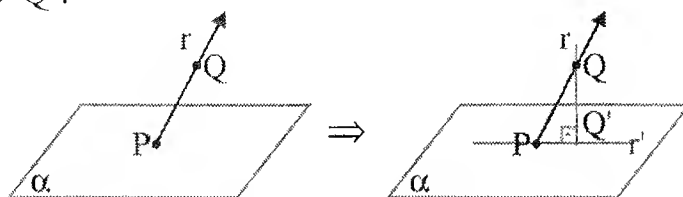


Chamamos esse ponto  $P'$  de projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre o plano  $\alpha$ .

**b) De uma reta sobre o plano  $\alpha$ :** Seja  $r$  uma reta oblíqua a um plano  $\alpha$ , transpassando esse plano no ponto  $P$ .

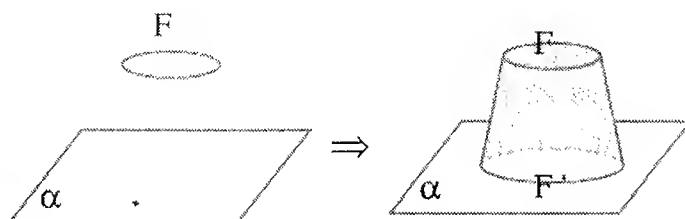


Tomando-se um ponto  $Q$  em  $r$ , a projeção ortogonal de  $Q$  em  $\alpha$ , origina o ponto  $Q'$ .



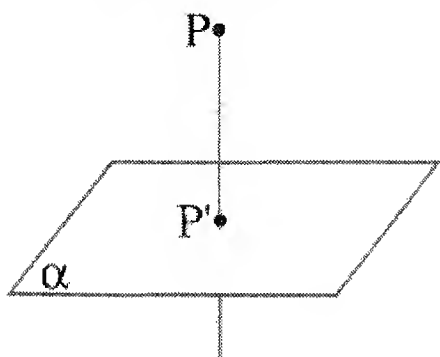
A reta  $r'$ , obtida através dos pontos  $P$  e  $Q'$ , é a projeção ortogonal de  $r$  sobre o plano  $\alpha$ .

**c) De uma figura geométrica sobre o plano  $\alpha$ :** Figura geométrica é um conjunto de pontos. Seja uma figura  $F$  e um plano  $\alpha$ . Vamos determinar a projeção ortogonal de todos os pontos da figura  $F$  sobre o plano  $\alpha$ . Obteremos, então, a figura  $F'$ .



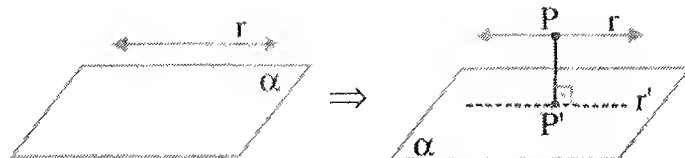
Assim, obtemos a figura  $F'$ , projeção ortogonal de  $F$  sobre  $\alpha$ .

**10. Distâncias** A distância de um ponto  $P$  a um plano  $\alpha$  ( $P \notin \alpha$ ), é dada pela medida do segmento  $PP'$ , sendo  $P'$  a projeção ortogonal de  $P$  no plano  $\alpha$ .

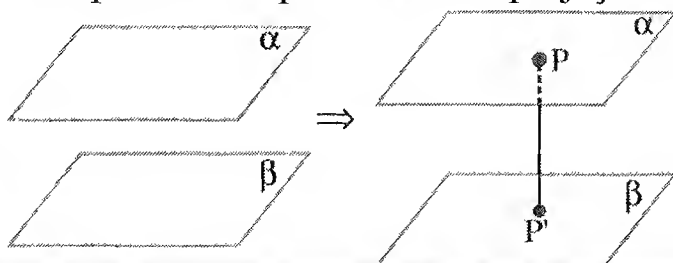


Lembremo-nos de que tanto a reta quanto o plano são constituídos de inúmeros pontos, por isso, basta-nos determinar a distância de um ponto  $P$  ( $P \in r$ ), qualquer, ao plano  $\alpha$  paralelo.

Então, a distância entre uma reta  $r$  ( $r \not\subset \alpha$ ) e um plano  $\alpha$  ( $r \parallel \alpha$ ) é a distância entre qualquer ponto da reta  $r$  e o plano  $\alpha$ :



Bem como a distância dos planos  $\alpha$  a  $\beta$  ( $\alpha \parallel \beta$ ) é dada pela distância entre um ponto  $P$  no plano  $\alpha$  e sua projeção ortogonal  $P'$  em  $\beta$ .



### Exercícios propostos:

27. (Mauá-SP) São dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não alinhados e um ponto  $P$  fora do plano  $ABC$ . Assinalar a sentença correta:

- a) Existe um plano por  $P$  e a igual distância dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- b) Existem três planos por  $P$  e a igual distância dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- c) Existem quatro planos por  $P$  e a igual distância dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- d) n. d. a.

28. (Mack-SP) Sejam as afirmações:

- a – Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta dada.
  - b – Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro.
  - c – Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
  - d – Se duas retas não têm ponto comum, então elas são paralelas.
- O número de afirmações verdadeiras é: a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) 4

**11. Teoremas do paralelismo** São muitos os teoremas sobre paralelismo, por isso, veremos apenas os que consideramos fundamentais.

**Teorema 1 – Se uma reta  $r$ , não contida em  $\alpha$ , é paralela a uma reta  $s$ , contida em  $\alpha$ , então  $r$  e  $\alpha$  são paralelos.**

Hipótese

$r \not\subset \alpha$

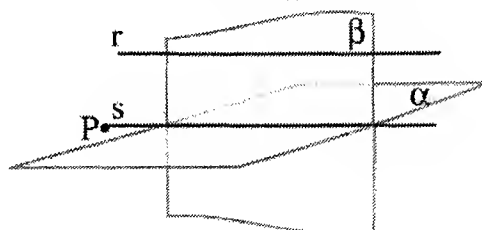
$s \subset \alpha$

$r \parallel s$

Tese

$r \parallel \alpha$

Demonstração



O plano  $\beta$ , determinado pelas retas  $r$  e  $s$ , é secante a  $\alpha$ .

Supondo que  $r$  e  $\alpha$  tivessem um ponto comum  $P$ , então  $P \in \alpha$  e  $P \in \beta$ . Logo, o ponto  $P$  pertenceria a  $r$  e a  $s$ , o que contraria a hipótese. Portanto,  $r \parallel \alpha$ .

**Teorema 2 – Se uma reta  $r$  é paralela a um plano  $\alpha$  e existe um plano  $\beta$  que contém  $r$  e é secante a  $\alpha$  pela reta  $s$ , então as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.**

Hipótese

$r \parallel \alpha$

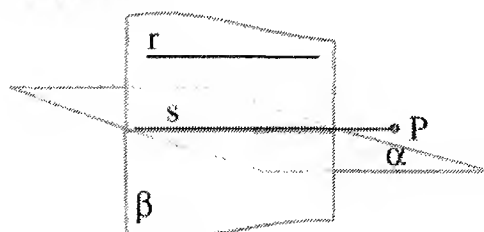
$b \supset r$

$a \cap b = s$

Tese

$r \parallel s$

Demonstração



Suponha que  $r$  e  $s$  não fossem paralelas. Por estarem contidas no plano  $b$ , deveriam então, existir um ponto comum  $P$  e então,  $P$  pertenceria à reta  $r$  e ao plano  $a$ . Mas isso contraria a hipótese. De onde,  $r \parallel s$ .

**Teorema 3 – Se dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos, então qualquer reta  $r$  contida em  $\alpha$  é paralela ao plano  $\beta$ .**

Hipótese

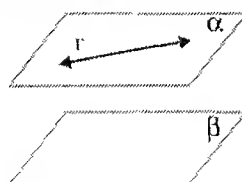
$\alpha \parallel \beta$

$r \subset \alpha$

Tese

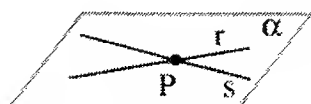
$r \parallel \beta$

Demonstração



Supondo que  $r$  não fosse paralela a  $\beta$ , então haveria um ponto em  $\beta$ , comum a  $\alpha$  e  $\beta$ , o que contradiz a hipótese. Portanto,  $r \parallel \beta$ .

**Teorema 4 – Se um plano  $\alpha$  contém duas retas  $r$  e  $s$  concorrentes, e sendo  $r$  e  $s$  paralelas a outro plano  $\beta$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos.**



Hipótese

$r \subset \alpha, s \subset \alpha$

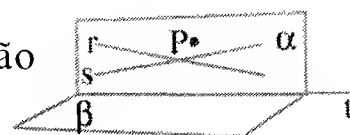
$r \times s$  ( $r$  e  $s$  são concorrentes)

$r \parallel \beta, s \parallel \beta$

Tese

$\alpha \parallel \beta$

Demonstração



Supondo que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  não fossem paralelos, então se interceptariam numa reta  $t$ . Mas  $r$  e  $s$  seriam, então, paralelas a  $t$ . Logo, pelo ponto  $P$ , intersecção de  $r$  e  $s$ , obteríamos duas retas paralelas a  $t$ , o que é absurdo. Portanto,  $\alpha \parallel \beta$ .



### Exercícios propostos:

29. (Mack) A reta  $r$  é paralela ao plano  $\alpha$ . Então:

- a) Todas as retas de  $\alpha$  são paralelas a  $r$ .
- b) A reta  $r$  não pode ser coplanar com nenhuma reta de  $\alpha$ .
- c) Existem em  $\alpha$  retas paralelas a  $r$  e também existem em  $\alpha$  retas reversas em relação a  $r$ .
- d) Existem em  $\alpha$  retas paralelas a  $r$  e retas perpendiculares a  $r$ .
- e) Todo plano que contém  $r$  é paralelo a  $\alpha$ .

30. (Cesem-SP) Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que:

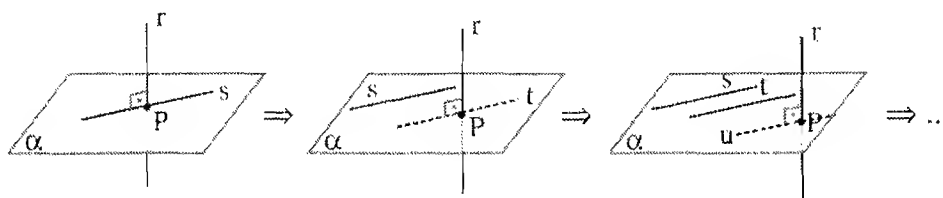
- a) uma reta de um seja paralela ao outro.
- b) duas retas de um sejam paralelas ao outro.
- c) duas retas paralelas de um sejam paralelas ao outro.
- d) toda reta de um seja paralela a qualquer reta do outro.
- e) um deles contenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.

31. (Fund. Carlos Chagas-SP) Do enunciado: "A condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano que não a contém é que ela seja paralela a uma reta desse plano". Podemos concluir que:

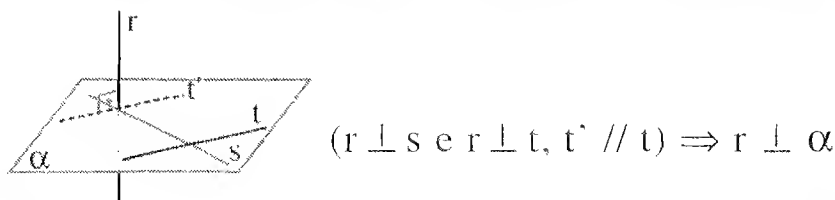
- a) a condição ser suficiente significa que: todo plano paralelo a uma reta contém a paralela traçada a esta reta por um qualquer de seus pontos.
- b) a condição ser necessária significa que: toda reta paralela a uma reta do plano é paralela a este plano.
- c) a condição ser suficiente significa que: todo plano paralelo a uma reta conterá todas as retas paralelas à reta dada.
- d) a condição ser necessária significa que: todo plano paralelo a uma reta contém a paralela traçada a esta reta por um qualquer de seus pontos.
- e) n. d. a.

**12. Teoremas do perpendicularismo** Como nos teoremas do paralelismo, veremos apenas os mais significativos, porém sem demonstrá-los.

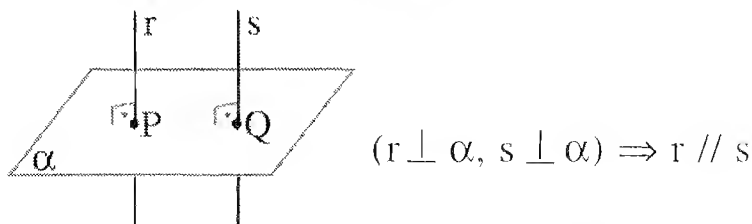
**Teorema 1 – Se  $r$  é uma reta perpendicular a um plano  $\alpha$ , então  $r$  é perpendicular a qualquer reta contida em  $\alpha$ .**



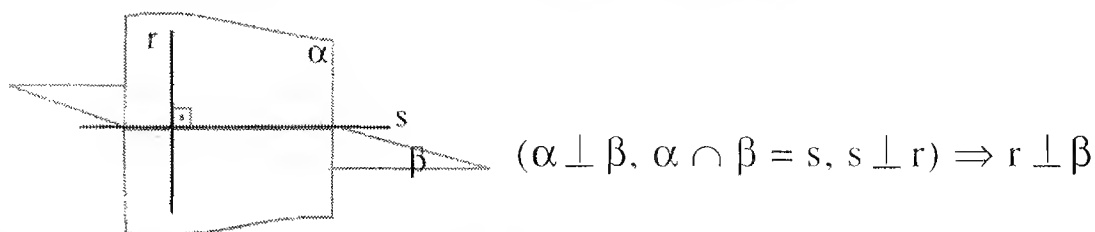
**Teorema 2** – Se  $r$  é uma reta perpendicular a duas retas concorrentes  $s$  e  $t$  de um plano  $\alpha$ , então  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ .



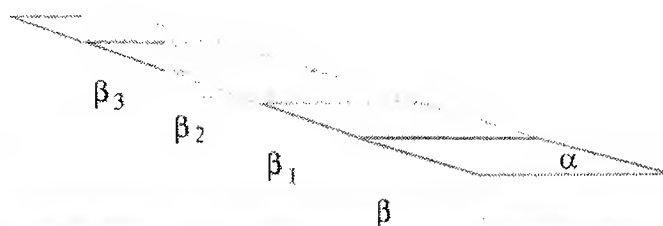
**Teorema 3** – Se  $r$  e  $s$  são retas perpendiculares a um mesmo plano  $\alpha$ , então  $r$  é paralela a  $s$ .



**Teorema 4** – Se dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares entre si, toda reta contida num deles, perpendicular à intersecção dos dois planos é perpendicular ao outro plano.



**Teorema 5** – Se um plano  $\alpha$  é perpendicular a um plano  $\beta$ , então  $\alpha$  é perpendicular a todos os planos paralelos a  $\beta$ .



### ⇒ Exercícios propostos:

**32.** (UFSE) Se uma reta  $r$  é perpendicular a dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , então é verdade que:

- a)  $\alpha$  é paralelo a qualquer plano que contenha  $r$ .
- b)  $\beta$  contém todas as retas perpendiculares a  $r$ .
- c) a distância entre  $\alpha$  e  $\beta$  é igual a 10 cm.
- d)  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos entre si.
- e)  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares entre si.

**33.** (Fuvest-SP) Dados um plano  $\alpha$  e uma reta  $r$ , podemos afirmar que:

- a) existe um plano  $\beta$  que contém  $r$  e é perpendicular a  $\alpha$ .
- b) existe um único plano  $\beta$  que contém  $r$  e é perpendicular a  $\alpha$ .
- c) existe um plano  $\beta$  que contém  $r$  e é paralelo a  $\alpha$ .
- d) existe um único plano  $\beta$  que contém  $r$  e é paralelo a  $\alpha$ .
- e) qualquer plano  $\beta$  que contém  $r$  intercepta o plano  $\alpha$ .

**34.** (UFSC) Sobre elementos geométricos que definem um plano é correto afirmar (some os valores correspondentes):

- (01) Um plano pode ser definido por duas retas paralelas ou duas retas concorrentes.
- (02) Três pontos não alinhados não podem definir um plano.
- (04) Uma reta e um ponto não pertencente a ela ou três pontos não alinhados definem um plano.
- (08) Retas reversas podem definir planos.
- (16) Retas concorrentes, retas paralelas, três pontos não alinhados ou uma reta e um ponto fora dela definem um plano.
- (32) Um plano não pode ser definido por retas paralelas ou retas concorrentes.
- (64) Um plano pode ser definido por retas reversas, concorrentes ou paralelas.

**35.** (PUC) Qual das proposições abaixo é falsa?

- a) Por um ponto  $A$  pode-se conduzir uma única reta perpendicular a um plano  $\alpha$ .
- b) Se dois planos são perpendiculares a uma reta, então eles são paralelos.
- c) Se dois planos são paralelos e uma reta é perpendicular a um deles, então ela é perpendicular ao outro.
- d) Se duas retas são paralelas e um plano é perpendicular a uma delas, então ele é perpendicular à outra.
- e) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta, perpendicular à reta dada, é perpendicular ao plano.

## Geometria espacial métrica

**1. Introdução** A geometria espacial métrica trata de questões relacionadas com as áreas e os volumes dos *sólidos geométricos*, tais como: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

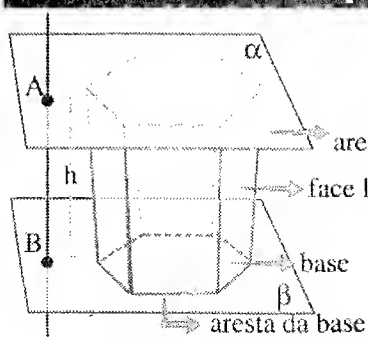
Foi o matemático grego Arquimedes (séc. III a.C.) que, durante seu banho, reparando que o nível da água da banheira em que estava, aumentava conforme ele mergulhava seu corpo, descobriu que os corpos possuem *volume*.

## Prismas

**1. Definição** Sejam dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  distintos. Consideremos uma superfície poligonal  $P$  em  $\alpha$ , e uma reta  $r$  que intercepta os planos  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente nos pontos  $A$  e  $B$ .

À figura geométrica constituída pela reunião de todos os segmentos de reta congruentes a  $\overline{AB}$ , paralelos à  $r$ , com uma das extremidades em  $P$  e outra no plano  $\beta$ , chamamos *prisma*.

## 2. Elementos do prisma



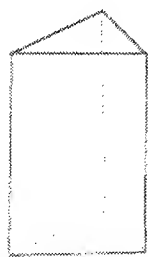
Onde  $h$  é chamada de *altura* do prisma.

Observe que:

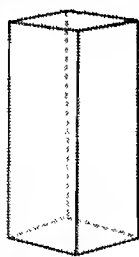
- as bases de um prisma são polígonos congruentes;
- os prismas recebem nomes especiais segundo o número de lados dos polígonos da base.

Logo:

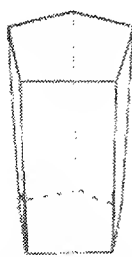
se as bases são	recebem os nomes de
triângulos	prisma triangular
quadriláteros	prisma quadrangular
pentágonos	prisma pentagonal
hexágonos	prisma hexagonal
etc.	etc.



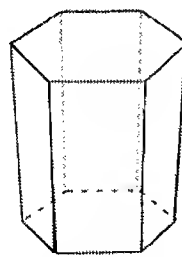
(prisma triangular)



(prisma quadrangular)



(prisma pentagonal)



(prisma hexagonal)

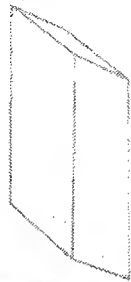
## 3. Prisma reto e oblíquo

**a) Prisma reto:** Quando as arestas laterais de um prisma são perpendiculares ao plano da base, o prisma se diz *reto*. Neste caso, suas *faces laterais* são retângulos e suas *arestas laterais* têm a mesma medida da altura do prisma. Exemplo:



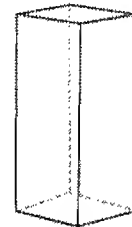
Prisma reto-pentagonal

**b) Prisma oblíquo:** Quando as arestas laterais são oblíquas, o prisma se diz *oblíquo*. Neste caso, suas *faces laterais* são paralelogramos. Exemplo:



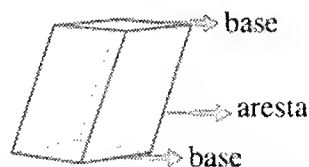
Prisma oblíquo-quadrangular

**4. Prisma regular** Quando, além de ser reto, o prisma tem por base um polígono regular. Neste caso, as *faces laterais* são retângulos congruentes entre si.

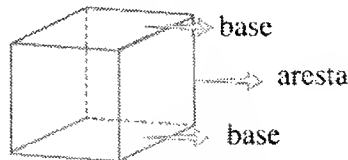


**5. Prismas quadrangulares** Os prismas quadrangulares são classificados de acordo com suas bases. Assim, temos:

**a) paralelepípedo oblíquo:** quando as bases do prisma quadrangular são paralelogramos.,



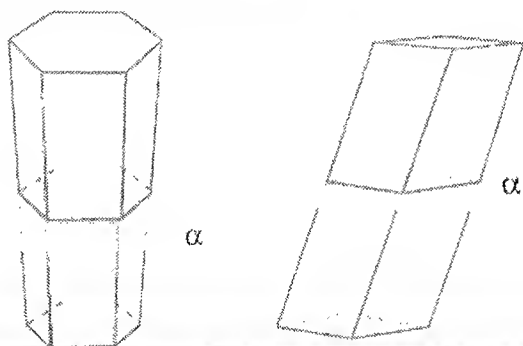
**b) paralelepípedo retângulo (ou reto-retangular):** suas bases são retângulos.



**c) cubo:** suas bases e faces laterais são quadrados, por consequência, todas as suas arestas são congruentes entre si.



**6. Secção de um prisma** Chamamos de *secção* à intersecção de um prisma com um plano que o intercepta em todas as suas arestas laterais. Temos assim:



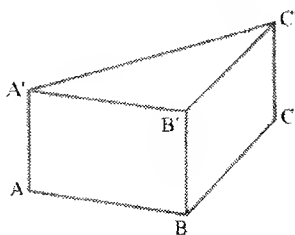
secção transversal: é a região obtida pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases.

### ⇒ Exercícios propostos:

**36.** Responda às questões abaixo:

- Como podemos classificar os prismas?
- Como se denomina o prisma cuja base é um pentágono?
- Se um prisma é reto, o que se pode afirmar sobre suas arestas laterais?
- Num prisma, como são denominados:
  - os lados dos polígonos da base?
  - os lados dos polígonos que são suas faces laterais?
  - a distância entre os planos paralelos que contêm suas bases?
- Qual a diferença entre prisma oblíquo e prisma regular?

**37.** Observe a figura abaixo e complete:



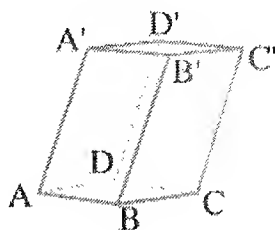
- O prisma se denomina prisma \_\_\_\_\_, pois as suas bases é um \_\_\_\_\_.
- As bases são: ABC e \_\_\_\_\_.
- As arestas das bases são:  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$ , \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.
- As arestas laterais são: AA', \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.
- As faces laterais são: ABA'B', \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.

**38.** Coloque V ou F conforme as afirmações abaixo sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente:

- Todo prisma regular é reto ..... ( )

- b) Num prisma obluo as arestas laterais são obluas e as faces laterais são paralelogramos ..... ( )
- c) Num cubo, as faces laterais são retângulos ..... ( )
- d) Em qualquer prisma, há apenas duas bases ..... ( )
- e) Um prisma hexagonal tem três faces laterais ..... ( )
- f) Num prisma reto as arestas laterais não são congruentes entre si ..... ( )
- g) Um cubo é um prisma regular ..... ( )
- h) Secção de um prisma é a intersecção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais ..... ( )
- i) Secção transversal  a região obtida pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases ..... ( )
- j) As bases de um paralelepípedo reto-retangular são retângulos ( )

**39.** Observe a figura abaixo e complete:



- a) As bases são: \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.
- b) As arestas da base são: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.
- c) As faces laterais são: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.
- d) O prisma denomina-se \_\_\_\_\_ porque as bases são \_\_\_\_\_.
- e) Quanto  classificação em prisma reto ou obluo, esse prisma se diz \_\_\_\_\_.

**7. rea total e área lateral de um prisma** A rea de um prisma é dada pela soma de todas as áreas das figuras geométricas que o compõem:  $A_t = A_l + 2A_b$

Onde:  $A_t$   a área total;  $A_l$   a área lateral;  $A_b$  é a área da base.

Lembremo-nos que, embora a área da base seja simplesmente a área do polígono, a área lateral é a soma das áreas de todas as faces laterais.

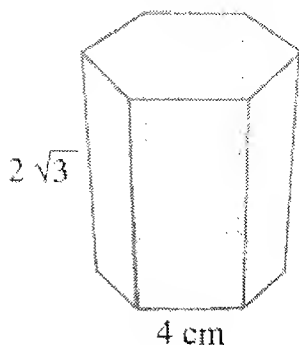
Num prisma reto, vale lembrar que todas as faces laterais são iguais, o que vale dizer:  $A_l = n \cdot A_f$

Onde:  $A_l$  é a área lateral;  $A_f$  é a área de uma das faces laterais.

### Exercícios resolvidos:

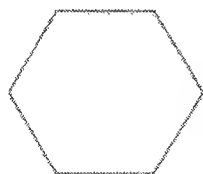
1. Seja um prisma reto de base hexagonal, onde a altura  $h$  é  $h = 2\sqrt{3}$  e o raio do círculo que circunscreve a base é  $R = 4$  cm. Calcular a área total desse prisma hexagonal regular:

**Resolução:** Consideremos o prisma hexagonal na figura abaixo:



Lembre-se que o lado de um hexágono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita a ele.

A base é um hexágono regular que pode ser decomposto em seis triângulos congruentes e que são equiláteros. Os lados desse triângulo medem 4 cm.



$a = 4$

$$A_{\triangle_{eq}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle_{eq}} = \frac{(4 \text{ cm})^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle_{eq}} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Logo a área da base: } A_b = 6 \cdot A_{\triangle_{eq}} \Rightarrow A_b = 6 \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_b = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Como o prisma é retangular, então as faces laterais são retângulos.

$$A_{\square} = b \cdot h \Rightarrow A_{\square} = 4 \text{ cm} \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow A_{\square} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Como no prisma hexagonal, temos 6 retângulos, a área lateral é:

$$A_l = 6 \cdot A_{\square} \Rightarrow A_l = 6 \cdot 8\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_l = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Portanto, a área total é:  $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

$$A_t = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 2 \cdot (24\sqrt{3} \text{ cm}^2) \Rightarrow A_t = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_t = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$



4 cm

2. Considere um prisma hexagonal regular que tem  $9 \cdot (40 + 12\sqrt{3})$  mm<sup>2</sup> de área total. Sabendo-se que a aresta da base mede 6 mm, calcular a medida da altura desse prisma.

**Resolução:** Como a área total é dada pela fórmula:  $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$ , teremos que calcular  $A_b$  e  $A_l$ .



$$a) \text{ Área da base: } A_b = 6 \cdot \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\text{Logo: } A_b = 6 \cdot \left( \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \right) \Rightarrow A_b = 6 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow A_b = 54\sqrt{3} \text{ mm}^2$$

$$b) \text{ Área lateral: } A_b = A_{\square} = b \cdot h \Rightarrow A_{\square} = 6 \text{ mm} \cdot h$$

$$\text{Logo: } A_l = 6 \cdot A_{\square} \Rightarrow A_l = 6 \cdot 6 \text{ mm} \cdot h \Rightarrow A_l = 36 \text{ mm} \cdot h$$

Substituindo-se  $A_b$  e  $A_l$  na fórmula da área total, vem:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

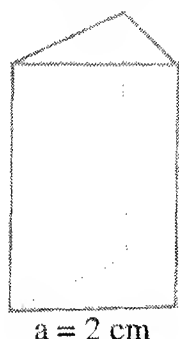
$$9 \cdot (40 + 12\sqrt{3}) \text{ mm}^2 = 36 \text{ mm} \cdot h + 2 \cdot (54\sqrt{3} \text{ mm}^2)$$

$$(360 + 108\sqrt{3}) \text{ mm}^2 = 36 \text{ mm} \cdot h + 108\sqrt{3} \text{ mm}^2$$

$$360 \text{ mm}^2 = 36 \text{ mm} \cdot h \Rightarrow h = \frac{360 \text{ mm}^2}{36 \text{ mm}} \Rightarrow \boxed{h = 10 \text{ mm}}$$

3. Calcular a área total de um prisma triangular regular cuja aresta da base mede 2 cm (a base é um triângulo equilátero) e a altura  $h$  do prisma mede  $\sqrt{3}$  cm.

Resolução:



$$A_{\triangle_{eq}} = \frac{(2 \text{ cm})^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\triangle_{eq}} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$h = \sqrt{3} \text{ cm}$  Temos um só triângulo na base desse prisma.

Logo, a área da base:

$$A_b = A_{\triangle_{eq}} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

As faces laterais são retângulos, então:

$$A_{\square} = b \cdot h \Rightarrow A_{\square} = 2 \text{ cm} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow A_{\square} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Temos 3 retângulos, então a área lateral:

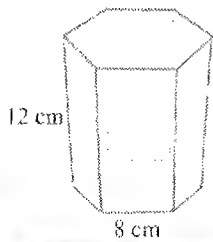
$$A_l = 3 \cdot A_{\square} \Rightarrow A_l = 3 \cdot (2\sqrt{3} \text{ cm}^2) \Rightarrow A_l = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Logo, a área total:  $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

$$A_t = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_t = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

4. Num prisma pentagonal regular, a aresta da base mede 8 cm e a aresta lateral, 12 cm. Determine a área lateral desse prisma.



**Resolução:** As faces laterais são retângulos, então:

$$A_{\square} = 8 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \Rightarrow A_{\square} = 96 \text{ cm}^2$$

Temos 5 retângulos, logo, a área lateral:

$$A_l = 5 \cdot A_{\square} \Rightarrow A_l = 5 \cdot 96 \text{ cm}^2$$

$$A_l = 480 \text{ cm}^2$$

**8. Volume** Dado um prisma qualquer, calculamos o seu volume através do produto da área da base pela medida da altura:

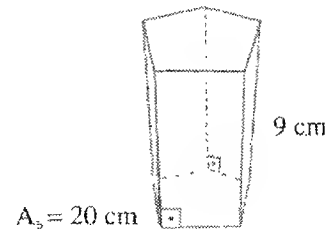
$$V = A_b \cdot h, \text{ onde } V \text{ é o volume do prisma}$$

### Exercícios resolvidos:

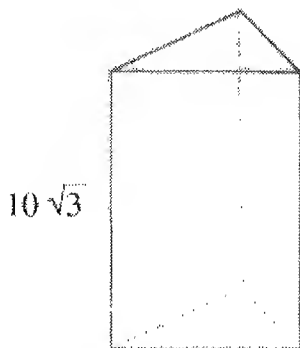
1. Calcule o volume de um prisma pentagonal que tem área das bases igual a  $20 \text{ cm}^2$  e altura de 9 cm.

**Resolução:**  $V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 20 \text{ cm}^2 \cdot 9 \text{ cm}$

$$V = 180 \text{ cm}^3$$



2. Determine o volume de um prisma triangular regular onde a altura mede  $10\sqrt{3} \text{ cm}$  e 24 cm para o perímetro de sua base.



**Resolução:** A base é um triângulo equilátero. Logo, o lado mede:  $(24 \text{ cm} \div 3 \text{ lados}) = 8 \text{ cm}$ .

$$A_{\triangle_{eq}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle_{eq}} = \frac{(8 \text{ cm})^2 \sqrt{3}}{4}$$

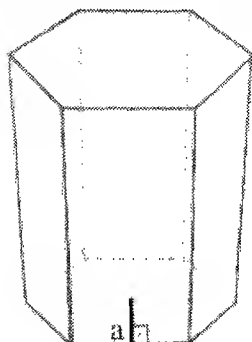
$$A_{\triangle_{eq}} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Logo, a área da base é:  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Portanto, o volume será:  $V = A_b \cdot h$

$$V = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 10\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow V = 480 \text{ cm}^3$$

3. Calcular o volume e a área lateral de um prisma reto de 10 cm de altura, onde a base é um hexágono regular de apótema  $3\sqrt{3} \text{ cm}$ .



**Resolução:** Sabemos que: o apótema  $a = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2}$  e  $r = l$  (no hexágono).

$$\text{Então: } 3\sqrt{3} \text{ cm} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow r\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

Logo, o lado  $l = 6$  cm (aresta da base)

Com esses dados, podemos calcular a área da base ( $A_b$ ) de duas maneiras:

a) Através da fórmula da área do polígono regular.

$$A_p = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}, \text{ então: } A_b = \frac{6 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 3\sqrt{3} \text{ cm}}{2} \Rightarrow A_b = \frac{108 \sqrt{3} \text{ cm}^2}{2}$$
$$\boxed{A_b = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

b) Através da fórmula do triângulo equilátero:

$$A_{\triangle_{eq}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{\triangle_{eq}} = \frac{6^2 \text{ cm}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle_{eq}} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Logo, a área da base:

$$A_b = 6 \cdot A_{\triangle_{eq}} \Rightarrow A_b = 6 \cdot (9\sqrt{3} \text{ cm}^2) \Rightarrow \boxed{A_b = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

Portanto, o volume será:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow V = 540\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

E a área lateral:

$$A_l = 6 \cdot A_{\square} \Rightarrow A_l = 6 \cdot (b \cdot h) \Rightarrow A_l = 6 \cdot (6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm})$$

$$\boxed{A_l = 360 \text{ cm}^2}$$

### Exercícios propostos:

40. Um prisma hexagonal regular tem aresta da base igual a  $2\sqrt{3}$  cm e altura (aresta lateral)  $6\sqrt{3}$  cm. Com esses dados, calcule:

a) a área da base, b) a área lateral, c) a área total, d) o volume

41. (PUC-SP) Tem-se um prisma reto de base hexagonal (hexágono regular) cuja altura é  $h = \sqrt{3}$  m e cujo raio do círculo que circunscreve a base é  $R = 2$  m. A área total desse prisma é:

a)  $\sqrt{3} \text{ m}^2$  b)  $24\sqrt{3} \text{ m}^2$  c)  $30 \text{ m}^2$  d)  $10\sqrt{2} \text{ m}^2$  e)  $8 \text{ m}^2$

42. (UFSC) O volume de um prisma hexagonal regular de 2 cm de aresta da base é  $42\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . A medida, em  $\text{cm}^2$ , da área lateral desse prisma é:

43. (UFMS) Calcule, em metros cúbicos, o volume de uma caixa d'água em forma de prisma reto, cuja aresta lateral mede  $3\sqrt{3}$  m, sabendo-se que a base é um hexágono regular, com a medida de lado igual a 2 m.

44. (UFSC) Um prisma triangular regular tem uma área total de (96

$+ 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ . Sabe-se que a aresta da base mede 2 cm. A medida, em CENTÍMETROS, da altura do prisma é:

**45.** (PUC-SP) A base de um prisma reto é um triângulo de lados 5 m, 5 m e 8 m, e a altura tem 3 m; seu volume será: a)  $12 \text{ m}^3$ , b)  $24 \text{ m}^3$ , c)  $36 \text{ m}^3$ , d)  $48 \text{ m}^3$ , e)  $60 \text{ m}^3$

(Sugestão: calcule a área do triângulo através da fórmula de Herão.)

**46.** (UFAM) A área total de um prisma hexagonal regular, cuja aresta da base é igual à aresta lateral que tem medida  $a \text{ cm}$ , é:

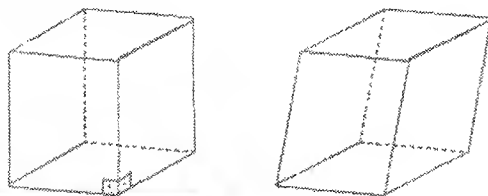
- a)  $3a^2 \cdot (2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$                       c)  $12 \cdot (a + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$   
 b)  $3a^2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$                       d)  $12a^2 \cdot (2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

**47.** Um prisma pentagonal reto tem área das bases igual a  $35 \text{ cm}^2$  e altura de 7 cm. Então, o seu volume, em  $\text{cm}^3$ , é de:

- a) 24,5   b) 5   c) 254   d) 245   e) n. d. a.

## Paralelepípedos

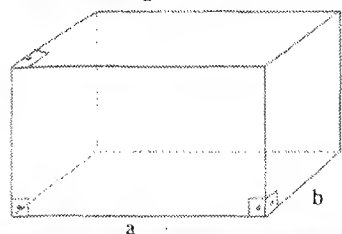
**1. Definição** Paralelepípedo é um prisma quadrangular no qual as seis faces são paralelogramos.



**2. Paralelepípedo retângulo** O paralelepípedo retângulo, ou reto-retangular, é o prisma no qual as seis faces são retangulares e as faces opostas são retângulos congruentes.

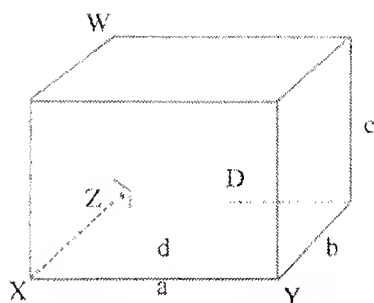
Também conhecido como *bloco retangular* ou *ortopedro*, sua forma comum pode ser observada num tijolo ou numa caixa de fósforos, por exemplo.

**3. Dimensões** As dimensões do paralelepípedo são dadas pela altura, comprimento e largura. Ex.:



onde  $a$  é o comprimento;  $b$  é a largura;  
 $c$  é a altura.

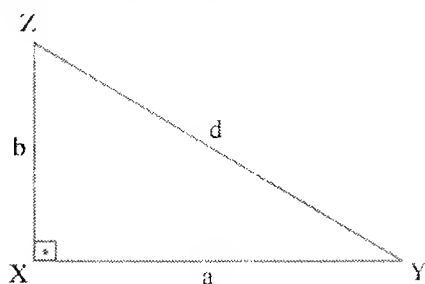
**4. Diagonal de um paralelepípedo retângulo** Consideremos o paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ :



onde  $d$  é a medida da diagonal da base;  
 $D$  é a diagonal do paralelepípedo.

Temos dois triângulos retângulos na figura ao lado, que envolvem os cálculos das diagonais  $d$  e  $D$ .

a) triângulo XYZ

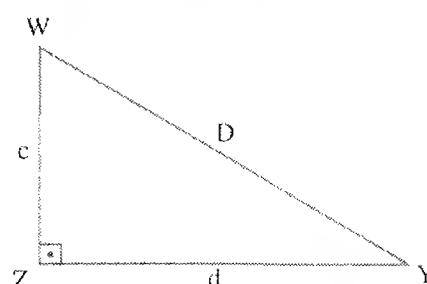


Como XYZ é retângulo, então, pela relação de Pitágoras, temos:

$$\overline{YZ}^2 = \overline{XY}^2 + \overline{XZ}^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2 \text{ (I)}$$

b) triângulo YZW



No triângulo YZW, temos:

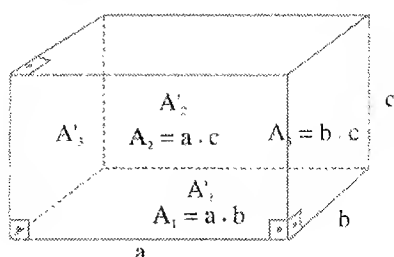
$$\overline{YW}^2 = \overline{YZ}^2 + \overline{ZW}^2$$

$$D^2 = d^2 + c^2 \text{ (II)}$$

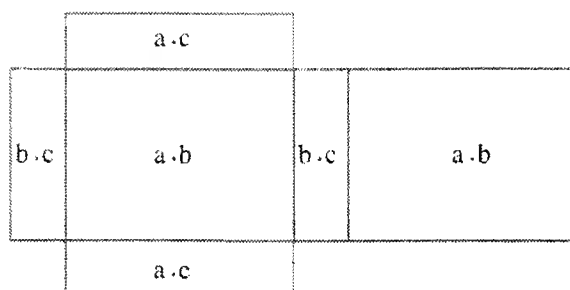
Substituindo-se o valor de (I) em (II), temos:  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**5. Áreas** Consideremos o paralelepípedo retângulo abaixo:



que, planificado:



Observemos que a área total ( $A_t$ ) do paralelepípedo retângulo é igual à soma das áreas de seis retângulos congruentes dois a dois. Então:

$$A_1 = A'_1 = a \cdot b \text{ (dois retângulos de dimensões } a \text{ e } b)$$

$$A_2 = A'_2 = a \cdot c \text{ (dois retângulos de dimensões } a \text{ e } c)$$

$$A_3 = A'_3 = b \cdot c \text{ (dois retângulos de dimensões } b \text{ e } c)$$

$$\text{Logo: } A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

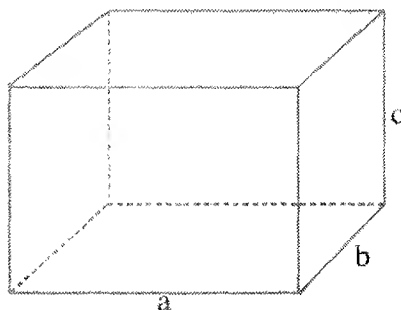
$$A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

**6. Volume** O paralelepípedo nada mais é do que um prisma quadrangular, por isso, basta substituirmos os valores da área da base ( $A_b$ ) e da altura ( $h$ ) na fórmula  $V = A_b \cdot h$

No paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , temos:

$$A_b = a \cdot b \text{ e } h = c$$

$$\text{Logo, o volume do paralelepípedo é dado por: } V = a \cdot b \cdot c$$

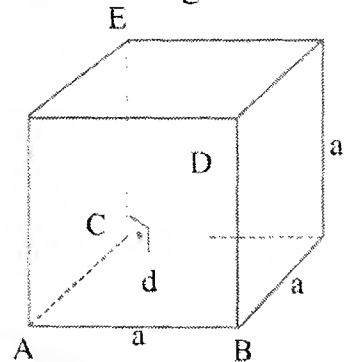


## Cubo

**1. Definição** O cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo. É um prisma cujas bases e faces laterais são quadrados, logo, as suas arestas são congruentes entre si e suas dimensões são iguais

$$a = b = c$$

**2. Diagonal de um cubo** Considerando um cubo de lado  $a$ , traçamos a diagonal do cubo conforme a figura:



onde  $d$  é a medida da diagonal de uma face;

$D$  é a medida da diagonal do cubo.

Daí temos dois triângulos retângulos:

$$a) \triangle ABC \Rightarrow d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ (I)}$$

$$b) \triangle BCE \Rightarrow D^2 = d^2 + a^2 \text{ (II)}$$

Substituindo o valor de I em II, temos:

$$D^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$

**3. Área** É a soma das áreas dos seis quadrados:

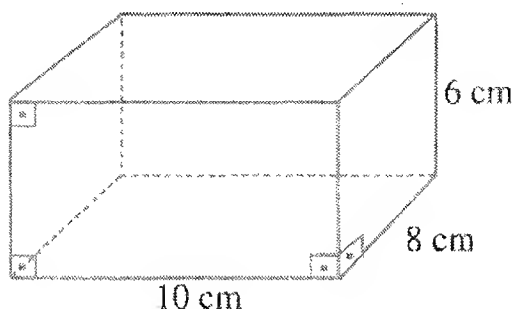
$$A_{\square} = a^2, \text{ onde } A_{\square} \text{ é a área do quadrado, então } A_t = 6a^2$$

**4. Volume** Como se trata de um prisma, vale a fórmula  $V = A_b \cdot h$ , o que, num cubo, também pode ser escrito sob a forma:

$$V = a^2 \cdot a \Rightarrow V = a^3$$

**Exercícios resolvidos:**

1. Um paralelepípedo tem as seguintes dimensões: 10 cm, 8 cm e 6 cm. Determinar: a) a medida de sua diagonal, b) a sua área total e c) o seu volume.



**Resolução:** Temos:  $a = 10$  cm,  $b = 8$  cm e  $c = 6$  cm

a) A medida da diagonal é:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$D = \sqrt{10^2 \text{ cm}^2 + 8^2 \text{ cm}^2 + 6^2 \text{ cm}^2}$$

$$D = \sqrt{100 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2}$$

$$D = \sqrt{200 \text{ cm}^2} \Rightarrow D = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) A área total é dada por:  $A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$$A_t = 2 \cdot (10 \cdot 8 \text{ cm}^2 + 10 \cdot 6 \text{ cm}^2 + 8 \cdot 6 \text{ cm}^2)$$

$$A_t = 2 \cdot (80 \text{ cm}^2 + 60 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2)$$

$$A_t = 2 \cdot 188 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = 376 \text{ cm}^2$$

c) O seu volume é:  $V = a \cdot b \cdot c$

$$V = 10 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \Rightarrow V = 480 \text{ cm}^3$$

2. Num paralelepípedo retângulo sabe-se que a medida da largura é  $\frac{2}{3}$  da medida do comprimento e a altura é 4 cm. Se a área total desse paralelepípedo é igual a  $228 \text{ cm}^2$ , calcular as medidas do comprimento e da largura.

**Resolução:** Sendo as dimensões desse prisma:  $a$  = comprimento,  $b$  = largura e  $c$  = altura, temos:  $A_t = 228 \text{ cm}^2$

$$a = x, b = \frac{2}{3}x \text{ e } c = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Então: } A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

$$228 = 2 \cdot \left( x \cdot \frac{2}{3}x + x \cdot 4 + \frac{2}{3}x \cdot 4 \right) \Rightarrow \frac{228}{2} = \frac{2x^2}{3} + 4x + \frac{8x}{3}$$

$$2x^2 + 20x - 342 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 171 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(1)(-171)}}{2} \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{784}}{2}$$

$$x' = 9 \text{ ou } x'' = -19$$

(desprezamos  $x = -19$  por ser negativo)

Logo, o comprimento é:  $a = x \Rightarrow \boxed{a = 9 \text{ cm}}$

$$\text{e a largura é: } b = \frac{2}{3} \cdot x \Rightarrow \boxed{b = 6 \text{ cm}}$$

3. A aresta de um cubo mede 8 cm. Determinar: a) a diagonal do cubo, b) a área total do cubo e c) o volume do cubo

Resolução: a) A diagonal do cubo é dada por:

$$D = a\sqrt{3}, \text{ onde } a = \text{aresta do cubo}$$

$$a = 8 \text{ cm} \Rightarrow D = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

b) A área total do cubo é dada por:  $A_t = 6a^2$

$$A_t = 6 \cdot (8 \text{ cm})^2 \Rightarrow \boxed{A_t = 384 \text{ cm}^2}$$

c) O volume do cubo é dado por:  $V = a^3$

$$V = (8 \text{ cm})^3 \Rightarrow \boxed{V = 512 \text{ cm}^3}$$

4. Calcular o volume de um cubo, cuja área total é  $486 \text{ cm}^2$ .

Resolução: Temos:  $A_t = 6 \cdot a^2$

$$486 \text{ cm}^2 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = 81 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \sqrt{81} \text{ cm} \Rightarrow a = 9 \text{ cm}$$

Logo, o volume será:  $V = a^3$

$$V = (9 \text{ cm})^3 \Rightarrow \boxed{V = 729 \text{ cm}^3}$$

### **Exercícios propostos:**

48. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são: 15 cm, 10 cm e 6 cm. Com esses dados, determine: a) a diagonal do paralelepípedo, b) a área total do paralelepípedo e c) o volume do paralelepípedo

49. A aresta de um cubo é  $5\sqrt{3} \text{ cm}$ . Calcular: a) a diagonal do cubo, b) a área total do cubo e c) o volume do cubo

50. Num paralelepípedo retângulo, o comprimento é o dobro da largura e a altura é 3 cm. A área total desse paralelepípedo é  $136 \text{ cm}^2$ . Determine as medidas do comprimento e da largura.

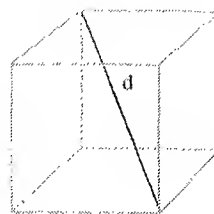
51. (UFAM) A diagonal de um cubo mede  $3\sqrt{2} \text{ dm}$ . A área total desse cubo mede, em  $\text{dm}^2$ : a) 36 b) 25 c)  $14\sqrt{2}$  d)  $6\sqrt{6}$  e) 26

52. (Mack-SP) Em um paralelepípedo reto-retângulo, a diagonal mede  $2\sqrt{83} \text{ cm}$ . Se as suas arestas são proporcionais aos números 3, 5 e 7, o seu volume é:

a)  $332 \text{ cm}^3$  b)  $405 \text{ cm}^3$  c)  $620 \text{ cm}^3$  d)  $740 \text{ cm}^3$  e)  $840 \text{ cm}^3$



**53.** (UFGO) A diagonal  $d$ , do cubo representado na figura abaixo, mede 4 cm. A área total desse cubo, em centímetros quadrados, é: a) 16 b) 18 c) 20 d) 24 e) 32



**54.** (UE Londrina) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5. Se a diagonal desse paralelepípedo mede  $2\sqrt{19}$  m, o seu volume, em  $m^3$  é: a) 60 b)  $60\sqrt{2}$  c) 240 d)  $180\sqrt{2}$  e) 480

**55.** (Cescea-SP) Se a soma das arestas de um cubo é igual a 72 cm, então, o volume do cubo é igual a:

a)  $100\text{ cm}^3$  b)  $40\text{ cm}^3$  c)  $144\text{ cm}^3$  d)  $16\text{ cm}^3$  e)  $216\text{ cm}^3$

(Observação: o cubo tem 12 arestas).

**56.** (PUC) Um cubo tem área total igual a  $72\text{ m}^2$ ; sua diagonal mede: a)  $2\sqrt{6}$  b) 6 c)  $\sqrt{6}$  d)  $\sqrt{12}$  e)  $2\sqrt{24}$

**57.** (UFRN) Se a diagonal de um cubo mede  $3\sqrt{6}$  m, então sua área total, em  $m^2$ , vale: a) 54 b) 72 c) 85 d) 108 e) 110

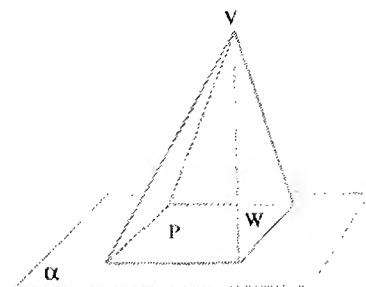
**58.** (FGV-SP) Um cubo tem  $96\text{ m}^2$  de área total. Em quanto deve ser aumentada a sua aresta para que o seu volume se torne igual a  $216\text{ m}^3$ ?

**59.** (Cescem) Um paralelepípedo retângulo tem  $142\text{ cm}^2$  de área total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60 cm. Sabendo-se que os seus lados estão em progressão aritmética, elas valem (em cm): a) 2, 5, 8 b) 1, 5, 9 c) 12, 20, 28 d) 4, 6, 8 e) 3, 5, 7 (Sugestão: represente por  $(x-r)$ ,  $x$  e  $(x+r)$  as 3 dimensões e lembre-se que:  $4a + 4b + 4c = \text{soma das arestas}$ .)

## Pirâmides

**1. Introdução** Uma das sete maravilhas do mundo antigo, a pirâmide de Quéops, ou Grande Pirâmide, foi construída, aproximadamente, em 2500 a.C. e, por suas formas perfeitas e tamanho descomunal, é o exemplo clássico destes sólidos geométricos.

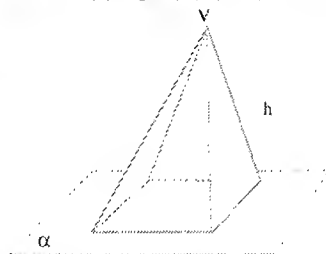
**2. Definição** Consideremos um polígono convexo  $W$ , contido num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  (vértice),  $V \notin \alpha$ . Chamamos de pirâmide o sólido geométrico composto de todos os segmentos  $VP$ , onde  $P \in W$ .



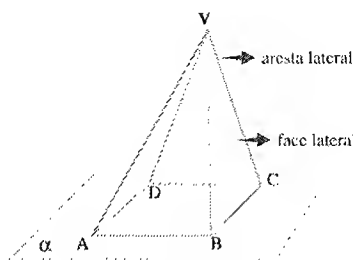
### 3. Elementos de uma pirâmide

Numa pirâmide podemos distinguir:

a) altura ( $h$ ): é a distância entre o vértice  $V$  e o plano da base.



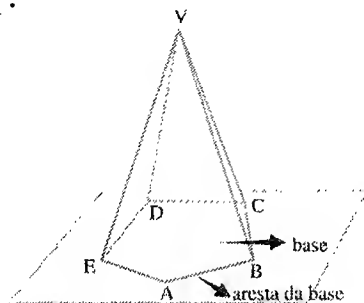
b) faces e arestas laterais: as faces laterais são triângulos; as arestas laterais são segmentos.



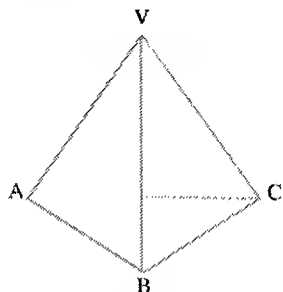
a) faces laterais: os triângulos AVB, BVC, CVD e DVA.

b) arestas laterais: os segmentos  $\overline{AV}$ ,  $\overline{BV}$ ,  $\overline{CV}$  e  $\overline{DV}$ .

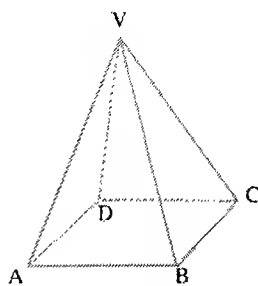
c) base e arestas da base: a base é um polígono. No exemplo, a base é o polígono ABCDE. As arestas da base são os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$  e  $\overline{EA}$ .



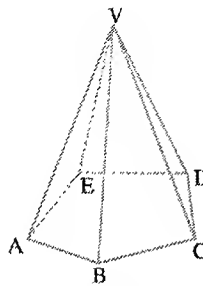
**4. Classificação** Da mesma forma que os prismas, as pirâmides são classificadas de acordo com o número de lados dos polígonos da base. Assim:



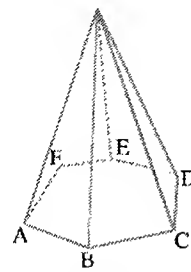
pirâmide  
triangular



pirâmide  
quadrangular



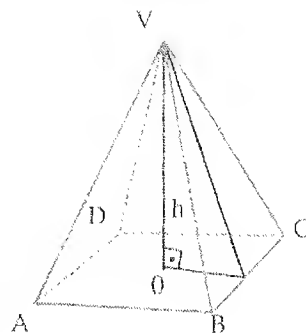
pirâmide  
pentagonal



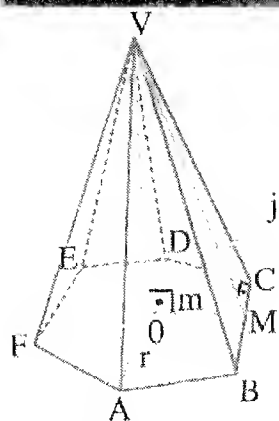
pirâmide  
hexagonal

**5. Pirâmide regular** Dizemos que uma pirâmide é *reta* se a projeção ortogonal de seu vértice for o centro do polígono da base. Se, além disso, a base for um *polígono regular*, dizemos que se trata de uma *pirâmide regular*.

Note que, desta maneira, o segmento  $\overline{VO}$ , que liga o vértice ao centro da base, é a altura ( $h$ ) da pirâmide.



**6. Elementos de uma pirâmide regular** Consideremos a pirâmide:



Através deste exemplo, podemos concluir:

a) Como todo polígono regular pode ser inscrito numa circunferência, temos que todo segmento que tem origem em O (centro da circunferência) e término num dos vértices do polígono, é um *raio* ( $r$ ). Assim:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = r$$

b) As arestas laterais ( $a$ ) têm o mesmo comprimento.

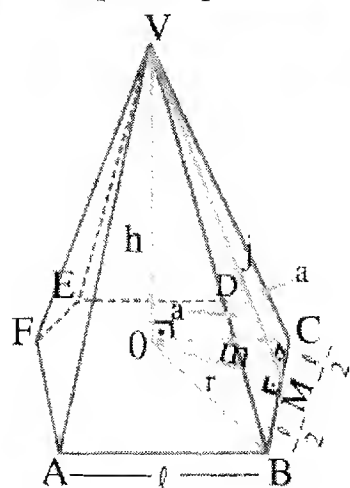
c) As faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

d) A altura relativa à base de um triângulo isósceles, ou seja, a altura de uma face lateral ( $j$ ), é denominada *apótema da pirâmide*.

e) O lado ( $l$ ) do polígono é a aresta da base.

f) O segmento de reta  $\overline{OM}$ , sendo M o ponto médio da aresta  $l$ , é o *apótema da base* ( $m$ ).

**7. Relações métricas numa pirâmide regular** Tomando como exemplo a pirâmide regular abaixo, onde A, B, C, D e E são os vértices do polígono de base;



V é o vértice da pirâmide;

M é o ponto médio da aresta  $\overline{BC}$ ;

$h$  é a altura da pirâmide;

$a$  é a face lateral da pirâmide;

$r$  é o raio da circunferência;

$l$  é a aresta da base;

$m$  é o apótema da base;

$j$  é o apótema da pirâmide

temos as seguintes relações métricas:

- a) No triângulo retângulo VOM, temos:  $j^2 = h^2 + m^2$
- b) No triângulo retângulo VMC, temos:  $a^2 = j^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$
- c) No triângulo retângulo VOB, temos:  $a^2 = h^2 + r^2$
- d) Área de uma face lateral:  $A_f = \left(\frac{l \cdot j}{2}\right)$

**3. Área total e área lateral de uma pirâmide** A área total ( $A_t$ ) da pirâmide é a soma da área de base ( $A_b$ ) e da área lateral ( $A_l$ ),

$$A_t = A_b + A_l$$

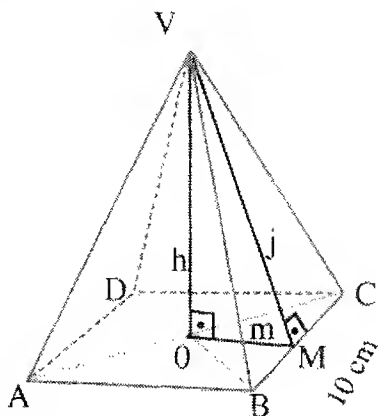
sendo que a área da base ( $A_b$ ) é a área do polígono de base e a área lateral é a soma das áreas dos triângulos isósceles, ou seja:

$$A_l = n \cdot A_f \text{ onde, } n \text{ é o número de faces laterais}$$

$A_f$  é a área de uma face lateral.

### Exercícios resolvidos:

1. Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 10 cm. Se a altura da pirâmide é 12 cm, determinar a área lateral e a área total dessa pirâmide.



**Resolução:** Temos:  $l = 10$  cm e  $h = 12$  cm

A base é um quadrado; logo, o apótema

$$\text{da base é: } m = \frac{l}{2} \Rightarrow m = \frac{10}{2} \Rightarrow m = 5 \text{ cm}$$

O triângulo VOM é retângulo; logo, aplicando Pitágoras nesse triângulo, determinamos a medida do apótema da pirâmide ( $j$ ):

Temos:

$$j^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow j^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow j^2 = 144 + 25 \Rightarrow j^2 = 169$$

$$j = 13 \text{ cm}$$

$$\text{a) Cálculo da área lateral: } A_f = \frac{l \cdot j}{2} \Rightarrow A_f = \frac{10 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm}}{2}$$

$$A_f = 65 \text{ cm}^2$$

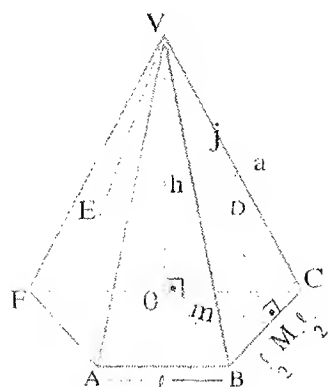
$$A_l = n \cdot A_f \Rightarrow A_l = 4 \cdot 65 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_l = 260 \text{ cm}^2}$$

b) Cálculo da área total: A base da pirâmide é um quadrado, logo:  $A_b = l \cdot l \Rightarrow A_b = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow A_b = 100 \text{ cm}^2$

Portanto, a área total é:  $A_t = A_b + A_l \Rightarrow A_t = 100 \text{ cm}^2 + 260 \text{ cm}^2$

$$\boxed{A_t = 360 \text{ cm}^2}$$

2. Numa pirâmide hexagonal a aresta da base mede 6 cm e a altura  $3\sqrt{6}$  cm. Calcular: a) a área lateral e b) a área total



Resolução: Temos:  $l = 6 \text{ cm}$  (aresta da base) e  $h = 3\sqrt{6} \text{ cm}$  (altura da pirâmide)

O apótema da base (m) no hexágono é dado

$$\text{por: } m = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}, \text{ então: } m = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Logo: } m = 3\sqrt{3}$$

No triângulo retângulo VOM, temos:

$$j^2 = h^2 + m^2, \text{ onde } j: \text{ é o apótema da pirâmide.}$$

$$\text{Logo: } j^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow j^2 = 9 \cdot 6 + 9 \cdot 3 \Rightarrow j^2 = 81$$

$$\boxed{j = 9 \text{ cm}}$$

- a) Cálculo da área lateral: A pirâmide é hexagonal portanto, tem 6 faces laterais:  $A_l = 6 \cdot A_f$

$$A_f = \frac{l \cdot j}{2} \Rightarrow A_f = \frac{6 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm}}{2} \Rightarrow A_f = \frac{54 \text{ cm}^2}{2} \Rightarrow A_f = 27 \text{ cm}^2$$

$$\text{Logo, a área lateral é: } A_l = 6 \cdot A_f \Rightarrow A_l = 6 \cdot 27 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_l = 162 \text{ cm}^2}$$

- b) Cálculo da área total:  $A_t = A_b + A_l$ . Logo, precisamos calcular a área da base ( $A_b$ ). Temos 6 triângulos equiláteros na base. A

área do triângulo equilátero é dada por:

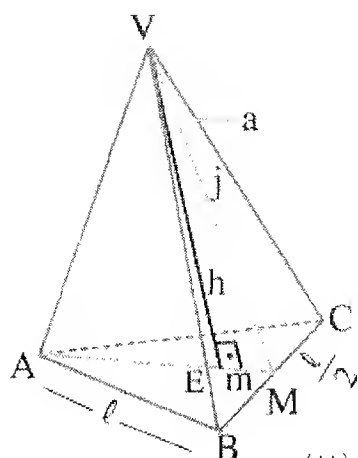
$$A_{\Delta_{\text{eq}}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ onde } l = 6 \text{ cm.}$$

$$\text{Portanto: } A_b = 6 \cdot \left( \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \right) \Rightarrow A_b = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Logo, a área total é: } A_t = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 162 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_t = 54(\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2}$$

3. Numa pirâmide regular de base triangular, sabe-se que a aresta da base mede  $8\sqrt{3}$  cm e a altura, 12 cm. Determinar as medidas: a) do apótema da base, b) do apótema da pirâmide e c) da aresta lateral



*Resolução:* Temos:  $l = 8\sqrt{3}$  cm (aresta da base) e  $h = 12$  cm (altura)

a) Cálculo do apótema da base ( $m$ ):

Como a base é um triângulo equilátero,

$$\text{então: } l = r\sqrt{3} \text{ (I) e } m = \frac{r}{2} \text{ (II)}$$

$$\text{Então: (I) } l = r\sqrt{3} \Rightarrow 8\sqrt{3} \text{ cm} = r\sqrt{3} \\ r = 8 \text{ cm}$$

$$\text{(II) } m = \frac{r}{2} \Rightarrow m = \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{m = 4 \text{ cm}}$$

b) Cálculo do apótema da pirâmide ( $j$ ):

No triângulo VEM, temos:  $j^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow j^2 = (12 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2$

$$j^2 = 144 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow j^2 = 160 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{j = 4\sqrt{10} \text{ cm}}$$

c) Cálculo da aresta lateral ( $a$ ):

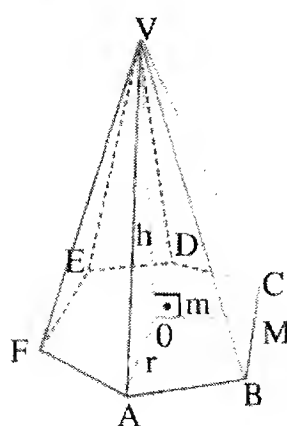
No triângulo VMC, temos:

$$a^2 = j^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = (4\sqrt{10} \text{ cm})^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{2} \text{ cm}\right)^2$$

$$a^2 = 160 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 \Rightarrow a^2 = 208 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{a = 4\sqrt{13} \text{ cm}}$$

4. Numa pirâmide hexagonal regular, sabe-se que a área lateral da pirâmide é  $48 \text{ cm}^2$  e a aresta da base mede  $4 \text{ cm}$ . Determinar: a) a área total da pirâmide, b) o apótema da pirâmide e c) a altura da pirâmide.



*Resolução:* Temos:  $l = 4 \text{ cm}$  (aresta da base) e  $A_l = 48 \text{ cm}^2$  (área lateral)

a) Cálculo da área total ( $A_t$ ):

A base é constituída por 6 triângulos equiláteros.

Logo, a área da base é:

$$A_b = \frac{6 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{6 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Portanto, a área total é:  $A_t = A_b + A_l$

$$A_t = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_t = 24(\sqrt{3} + 2) \text{ cm}^2}$$

b) Cálculo do apótema da pirâmide ( $j$ ):

Temos que a área lateral é:  $A_l = 48 \text{ cm}^2$ . Como  $A_l = n \cdot A_f$  e a pirâmide tem 6 faces laterais, podemos calcular a área de uma

$$\text{face } (A_f): 48 \text{ cm}^2 = 6 \cdot A_f \Rightarrow A_f = \frac{48}{6} \Rightarrow A_f = 8 \text{ cm}^2$$

A área de uma face é dada por:  $A_f = \frac{1 \cdot j}{2}$ , onde  $j$  é o apótema da pirâmide. Logo:

$$8 \text{ cm}^2 = \frac{4 \text{ cm} \cdot j}{2} \Rightarrow 2 \text{ cm} \cdot j = 8 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{j = 4 \text{ cm}}$$

c) Cálculo da altura da pirâmide ( $h$ ):

Sabemos que:  $j^2 = h^2 + m^2$ . Logo, precisamos da medida do apótema da base ( $m$ ) para determinarmos a medida da altura ( $h$ ).

A base é um hexágono regular, então:

$$m = \frac{1 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{4 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Assim, a altura ( $h$ ) da pirâmide será:

$$j^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (4 \text{ cm})^2 = h^2 + (2\sqrt{3} \text{ cm})^2$$

$$h^2 = 16 \text{ cm}^2 - 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow h^2 = 4 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{h = 2 \text{ cm}}$$

### **Exercícios propostos:**

**60.** Seja uma pirâmide regular de base quadrada, onde o lado da base mede 4 cm e a altura da pirâmide mede 10 cm. Com esses dados, calcule: a) a área da base, b) a área lateral e c) a área total

**61.** (UFSC) A aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular mede 4 cm e sua altura mede  $2\sqrt{3}$  cm. Determine a área total, em  $\text{cm}^2$ , dessa pirâmide.

**62.** Considere uma pirâmide regular hexagonal onde a aresta da base mede 8 cm e a aresta lateral mede 12 cm. Então, a área total é de:

a)  $96 \left( \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \right) \text{ cm}^2$

d)  $576 \text{ cm}^2$

b)  $96 \text{ cm}^2$

e)  $576 \left( \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \right) \text{ cm}^2$

c)  $128 \left( \sqrt{3} + \sqrt{2} \right) \text{ cm}^2$

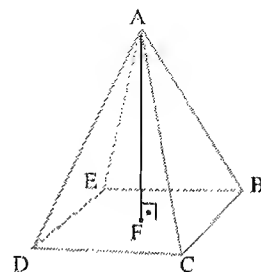
63. Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base medindo 10 cm e o apótema da pirâmide medindo 15 cm. Determinar a área lateral desse prisma.

64. (PUC-SP) Uma pirâmide reta, de base quadrada, tem altura  $h = 4$  m e o lado de base  $b = 6$  m; sua área total, em  $m^2$ , é:

a) 58 b) 130 c) 248 d) 96 e) n. d. a.

65. (UE de Feira de Santana-BA) Na figura ao lado, tem-se uma pirâmide reta de base quadrada e altura  $\overline{AF}$ . Se  $\overline{DC} = 8$  cm e  $\overline{AF} = 12$  cm, então  $\overline{AB}$  mede,

em cm: a)  $40\sqrt{11}$  b)  $20\sqrt{2}$  c) 15 d)  $8\sqrt{2}$   
e)  $4\sqrt{11}$

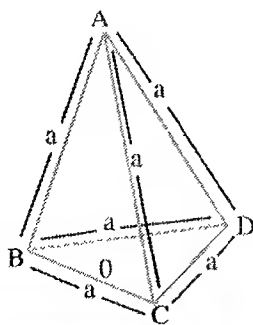


**9. Tetraedro** Assim como o cubo é uma forma especial de paralelepípedo, o tetraedro é um caso particular de pirâmide.

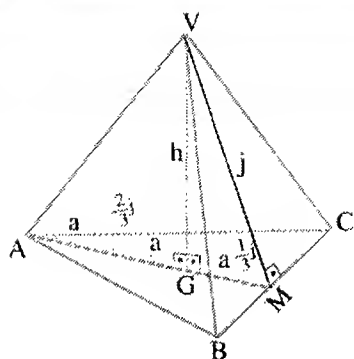
O tetraedro é a pirâmide que tem por base um triângulo (base triangular) e tem quatro faces, daí o seu nome (*tetra* significa quatro e *edro*, face).

Como qualquer pirâmide pode ser decomposta em tetraedros, seu estudo torna-se útil para o estudo das pirâmides.

a) **Tetraedro regular:** Quando todas as suas faces são triângulos equiláteros.



**10. Altura de um tetraedro regular** Consideremos o tetraedro regular



onde A, B e C são os vértices da base;  
V é o vértice do tetraedro;

M é o ponto médio da aresta  $\overline{BC}$

G é o baricentro do triângulo de base;

$h$  é a altura do tetraedro;

$a$  é o apótema da base;

$j$  é o apótema lateral do tetraedro.



Como G é o baricentro do triângulo equilátero, temos:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}j \text{ e } \overline{GM} = \frac{1}{3}j$$

Do triângulo retângulo VGM, temos:

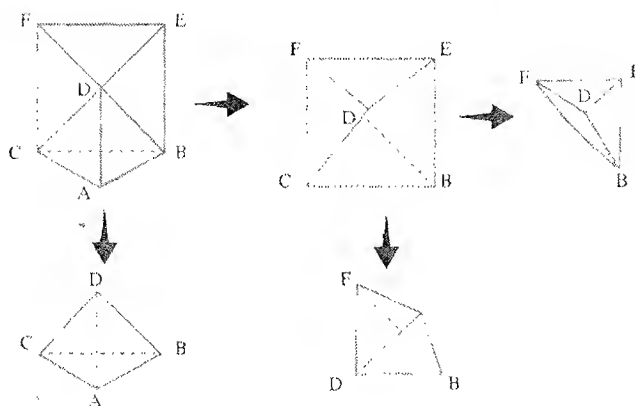
$$j^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3}j\right)^2 \Rightarrow j^2 = h^2 + \frac{1}{9}j^2 \Rightarrow h^2 = j^2 - \frac{1}{9}j^2 \Rightarrow h^2 = \frac{8}{9}j^2$$

Mas  $j = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (apótema lateral do tetraedro), então:

$$h^2 = \frac{8}{9} \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{24a^2}{36} = \frac{2a^2}{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

**11. Volume da pirâmide** Todo prisma reto, de base triangular, pode ser decomposto em três pirâmides triangulares *equivalentes*.



O volume das pirâmides (1), (2) e (3), indicados por  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ , respectivamente, correspondem ao volume do prisma. Então:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Como  $V_1 = V_2 = V_3$ , o volume da pirâmide pode ser escrito como:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. A aresta de um tetraedro regular mede 18 cm. Determinar a medida da altura desse tetraedro.

**Resolução:** Temos:  $a = 18 \text{ cm}$  e  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\text{Logo: } h = \frac{18 \cdot \sqrt{6}}{3} \text{ cm} \Rightarrow \boxed{h = 6\sqrt{6} \text{ cm}}$$

2. Sabendo-se que a altura de um tetraedro regular mede 8 cm, calcular a sua área total.

**Resolução:** Temos:  $h = 8 \text{ cm}$  e  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\text{Logo: } 8 \text{ cm} = \frac{24 \text{ cm}}{\sqrt{6}} = \frac{24 \sqrt{6} \text{ cm}}{6}$$

$$\boxed{a = 4\sqrt{6} \text{ cm (aresta do tetraedro)}}$$

Cálculo da área total ( $A_t$ ): O triângulo é equilátero (uma face),

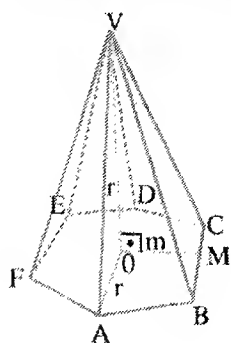
$$\text{então: } A_f = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_f = \frac{(4\sqrt{6} \text{ cm})^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_f = \frac{96 \text{ cm}^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A_f = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

Sabemos que o tetraedro regular tem as 4 faces congruentes,

$$\text{portanto: } A_t = 4 \cdot A_f \Rightarrow A_t = 4 \cdot 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = \boxed{96\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

3. A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 6 cm e a aresta lateral, 10 cm. Calcular o volume da pirâmide.



**Resolução:** Temos:  $l = 6 \text{ cm}$  e  $a = 10 \text{ cm}$

Queremos calcular o volume da pirâmide, que é

dado por:  $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ . Portanto, para determinarmos o volume, precisamos calcular os valores de  $A_b$  e  $h$ .

a) Cálculo da área da base ( $A_b$ ):

$$A_b = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ pois a base é um hexágono regular.}$$

$$A_b = \frac{6 \cdot 6^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b) Cálculo da altura ( $h$ ): Como a base da pirâmide é um hexágono regular, temos:  $l = r$  (raio)  $\Rightarrow r = 6$  cm. Logo:

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 6^2$$

$$h^2 = 100 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow h^2 = 64 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

c) Cálculo do volume ( $V$ ): Utilizando os valores de  $A_b$  e  $h$ , o

$$\text{volume será: } V = \frac{1}{3} A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm}$$

$$V = \frac{432\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow \boxed{V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3}$$

4. Calcular o volume de um tetraedro regular que tem área total de  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

Resolução: Temos:  $A_t = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

No tetraedro, sabemos que:  $A_t = 4 \cdot A_f$  logo:

$$12\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 4 \cdot A_f \Rightarrow A_f = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Como a área da face é a área de um triângulo equilátero,

$$\text{temos: } A_f = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 3\sqrt{3} \text{ cm}^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = 12 \text{ cm}^2$$

$$a = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Em seguida, calculamos a altura  $h$  que, no tetraedro regular, é

$$\text{dada por: } h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ p } h = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{2\sqrt{18}}{3} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{2}}{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Com esses dados, podemos calcular o volume:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_f \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

$$\boxed{V = 2\sqrt{6} \text{ cm}^3}$$

### Exercícios propostos:

66. (UFSC) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem aresta da base 8 cm e apótema da pirâmide 5 cm. Determine, em  $\text{cm}^3$ , o volume dessa pirâmide.

67. (UFPR) Uma pirâmide regular de base quadrada tem 8 m de altura e 10 m de apótema. O seu volume é: a)  $1152 \text{ m}^3$  b)  $288 \text{ m}^3$  c)  $96 \text{ m}^3$  d)  $384 \text{ m}^3$  e)  $48 \text{ m}^3$

**68.** (Cescea-SP) A altura de uma pirâmide hexagonal regular, de volume unitário e raio da base igual a  $\sqrt{3}$  cm é:

- a)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  cm   b)  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$  cm   c)  $\frac{\sqrt{3}}{9}$  cm   d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  cm   e) n. d. a.

**69.** A altura de uma pirâmide regular de base quadrada é o triplo do lado da base. Se o volume dessa pirâmide é  $27 \text{ cm}^3$ , o lado da base mede: a) 27 cm   b) 9 cm   c)  $3\sqrt{3}$  cm   d) 3 cm   e) 1 cm

**70.** (Mack-SP) Uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado  $2a$  tem o mesmo volume de um prisma cuja base é um quadrado de lado  $a$ . A razão entre as alturas da pirâmide e do prisma, nessa ordem, é:

- a)  $\frac{3}{4}$    b)  $\frac{3}{2}$    c)  $\frac{1}{4}$    d)  $\frac{a}{3}$    e)  $3a$

**71.** Um tetraedro regular tem aresta medindo 6 cm. Determine o volume desse prisma.

**72.** (Osec-SP) Uma pirâmide quadrada tem todas as suas arestas medindo 2. Então, a sua altura mede: a) 1   b)  $\sqrt{2}$    c)  $\sqrt{3}$    d) 2   e) n. d. a.

**73.** A aresta de um tetraedro regular mede  $\sqrt{6}$  cm. Calcular: a) a altura desse prisma,   b) a área total desse prisma e c) o volume desse prisma

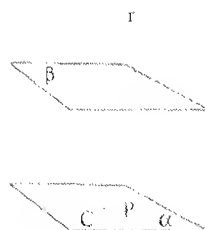
**74.** (FAAP-SP) A base de uma pirâmide regular de altura  $3r$  é um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio  $r$ . O volume dessa pirâmide é:

- a)  $\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$    b)  $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^3$    c)  $\frac{3\sqrt{2}}{4} r^3$    d)  $\frac{3\sqrt{3}}{2} r^3$    e)  $\frac{3\sqrt{2}}{2} r^3$

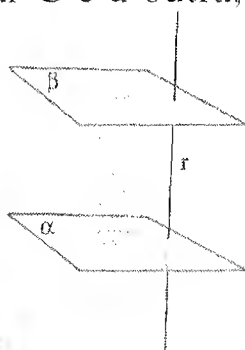
## Cilindros

**1. Introdução** O cilindro é o sólido geométrico que tem por base uma circunferência. Podemos observar formas cilíndricas em vários objetos de nosso dia-a-dia: latas, garrafas etc.

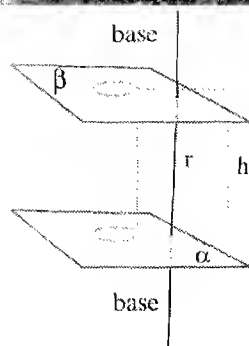
**2. Definição** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos paralelos onde  $C$  é uma região circular de centro  $O$ , contida em  $\alpha$ , e  $r$  é uma reta que “fura”  $\alpha$  no ponto  $P$ .



O *cilindro circular* ou *cilindro* é o sólido geométrico formado por todos os segmentos paralelos a  $r$ , de modo que uma extremidade é um ponto da região circular  $C$  e a outra, um ponto no plano  $\beta$ .



### 3. Elementos do cilindro



Na figura ao lado, identificamos alguns elementos de cilindro:

a) bases: são as regiões circulares de raio  $r$  nos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

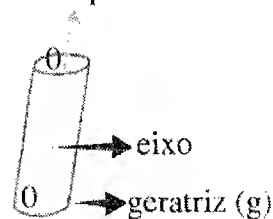
b) altura: é a distância entre os planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ , que contêm as bases, sendo  $h$  a sua medida.

c) geratrizes: são os segmentos paralelos ao eixo e

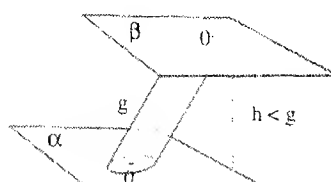
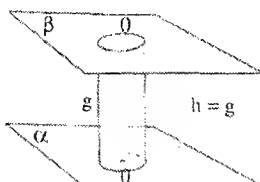
cujas extremidades são pontos das circunferências das bases.

Sua medida é denotada por  $g$ .

d) eixo: é a reta que contém os centros das bases.



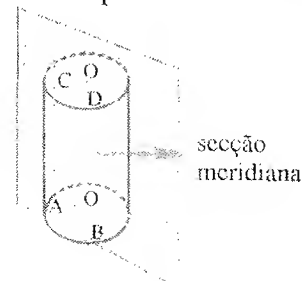
**4. Cilindro reto e cilindro oblíquo** Quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, dizemos que se trata de um cilindro *reto*, ou *cilindro de revolução*, caso contrário, trata-se de um cilindro *oblíquo*.



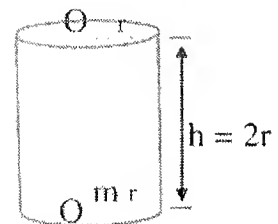
É importante notar que, no cilindro reto, a altura é igual à geratriz ( $h = g$ ).

**5. Secção** Como vimos anteriormente, a secção é um plano que intercepta o sólido geométrico. No cilindro há duas possibilidades:

- a) secção transversal: quando o plano que intercepta o cilindro é paralelo às bases;
- b) secção meridiana: quando o plano intercepta o cilindro em seu eixo.



**6. Cilindro reto equilátero** Um cilindro reto é equilátero quando a altura é igual ao dobro do raio das bases ( $h = 2r$ ) isto é, a altura é igual ao diâmetro ( $h = d$ ). Neste caso, a secção meridiana do cilindro é um quadrado.

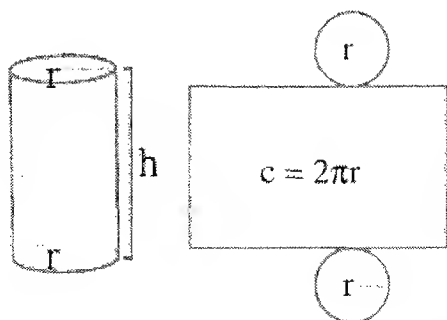


**7. Áreas** A área da base ( $A_b$ ) é a área do círculo, ou seja:

$$A_b = \pi r^2$$

A área lateral ( $A_l$ ), conforme observamos na figura planificada do cilindro, é um retângulo cuja altura é  $h$  e comprimento  $2\pi r$  (comprimento da circunferência). De onde concluímos que a área lateral é dada por:

$$A_l = 2\pi \cdot r \cdot h$$



A área total do cilindro, conforme podemos observar nas figuras, é a soma da área lateral com duas vezes a área da base:

$$A_t = A_l + 2A_b$$

Substituindo os valores na fórmula da área total ( $A_t$ ), temos:  $A_t = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2$

$$A_t = 2\pi \cdot r \cdot (h + r)$$

No caso particular do cilindro equilátero, em que a altura ( $h$ ) é igual ao diâmetro da circunferência ( $h = 2r$ ), a área total é:

$$A_l = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \text{ Logo: } A_t = A_l + 2A_b \Rightarrow A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$A_t = 6\pi r^2$$

**8. Volume** O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base ( $A_b$ ) pela altura ( $h$ ).



$$V = A_b h$$

$$V = \pi r^2 h$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dado um cilindro circular reto de  $h = 8$  cm e raio da base igual a 5 cm, calcular: a) a área da base, b) a área lateral e c) a área total

Resolução: a) Área da base ( $A_b$ ):

Temos:  $r = 5$  cm

$$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = 25\pi \text{ cm}^2$$

b) Área lateral ( $A_l$ ):

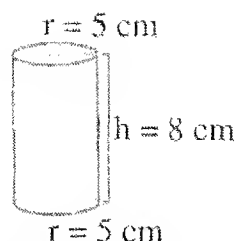
Temos:  $h = 8$  cm

$$A_l = 2\pi r \cdot h \Rightarrow A_l = 2\pi \cdot (5 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm}) \Rightarrow A_l = 80\pi \text{ cm}^2$$

c) Área total ( $A_t$ ):

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 80\pi \text{ cm}^2 + 2 \cdot (25\pi \text{ cm}^2)$$

$$A_t = 80\pi \text{ cm}^2 + 50\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = 130\pi \text{ cm}^2$$



2. Dado um cilindro equilátero de raio da base igual a 3 cm, determine: a) a área da base, b) a área lateral e c) a área total

Resolução: Temos:  $r = 3$  cm, logo,  $h = 2 \cdot 3$  cm  $\Rightarrow$   $h = 6$  cm

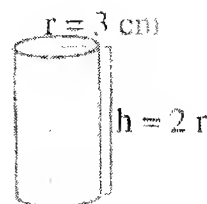
a) Área da base ( $A_b$ ):  $A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi (3 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = 9\pi \text{ cm}^2$

b) Área lateral ( $A_l$ ): Temos:

$$A_l = 4\pi r^2 \Rightarrow A_l = 4\pi (3 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_l = 4\pi \cdot 9 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_l = 36\pi \text{ cm}^2$$

c) Área total ( $A_t$ ): Temos:

$$A_t = 6\pi r^2 \Rightarrow A_t = 6\pi (3 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_t = 6\pi \cdot 9 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = 54\pi \text{ cm}^2$$



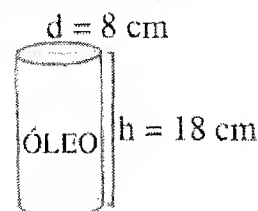
3. Uma lata de óleo tem a forma cilíndrica, com 8 cm de diâmetro e 18 cm de altura. Quantos ml de óleo há nesta lata?

Resolução: Temos que calcular o volume da lata de óleo, sendo:

$d = \text{diâmetro} = 8$  cm e  $h = \text{altura} = 18$  cm

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$\text{Então: } r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{8 \text{ cm}}{2} \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$



Como  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$ , logo,  $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ , assim, temos:

$$V = \pi (4 \text{ cm})^2 \cdot 18 \text{ cm}$$

$$V = 288\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 288\pi \text{ ml} \Rightarrow V = (288 \cdot 3,14) \text{ ml}$$

$$\boxed{V = 904,32 \text{ ml}}$$

4. Sabendo-se que a área da base de um cilindro reto é  $36\pi \text{ cm}^2$  e que seu volume é  $360\pi \text{ cm}^3$ , calcular: a) a área lateral e b) a área total

Resolução: a) Área lateral ( $A_l$ ): Temos:  $A_b = 36\pi \text{ cm}^2$

$$V = 60\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Então: } A_b = \pi r^2$$

$$36\pi \text{ cm}^2 = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{36 \text{ cm}^2}$$

$$\boxed{r = 6 \text{ cm}}$$

Assim, a área lateral é:  $A_l = 2\pi r \cdot h \Rightarrow A_l = 2\pi \cdot 6 \text{ cm} \cdot h$

O valor da altura pode ser obtido na fórmula do volume:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow 360\pi \text{ cm}^3 = 36\pi \text{ cm}^2 \cdot h \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

Logo, a área lateral  $A_l = 2\pi \cdot 6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$

$$\boxed{A_l = 120\pi \text{ cm}^2}$$

b) Área total ( $A_t$ ):  $A_t = A_l + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 120\pi \text{ cm}^2 + 2 (36\pi \text{ cm}^2)$

$$A_t = 120\pi \text{ cm}^2 + 72\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_t = 192\pi \text{ cm}^2}$$

### Exercícios propostos:

75. A área total de um cilindro equilátero cujo raio da base é  $r$  é:

a)  $4\pi r^2$  b)  $5\pi r^2$  c)  $6\pi r^2$  d)  $7\pi r^2$  e) n. d. a.

76. (UFRN) Se um cilindro equilátero mede 12 m de altura, então o seu volume, em  $\text{m}^3$ , vale:

a)  $144\pi$  b)  $200\pi$  c)  $432\pi$  d)  $480\pi$  e)  $600\pi$

77. (Osec-SP) Se a altura de um cilindro circular reto é igual ao diâmetro da base, então a razão entre a área total e a área lateral do ci-

lindro é: a) 3 b)  $\frac{3}{2}$  c)  $2\pi^2$  d) 2 e) 1

78. (PUC-SP) Se triplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a altura, o volume do cilindro fica multiplicado por:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

79. (PUC-SP) Uma pipa de vinho, cuja forma é um cilindro circular reto, tem o raio da base igual a  $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$  m e a altura 3 m. Se apenas 30% do seu volume está ocupado por vinho, então a quantidade de vinho existente na pipa, em litros, é:



a) 1 440 b) 4 800 c) 16 000 d) 14 400 e) 15 000

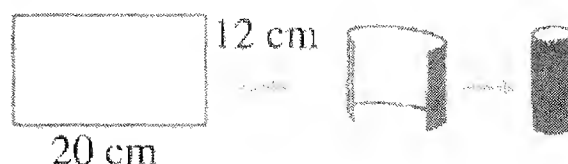
**80.** (UFRS) O retângulo da figura, com base  $\overline{BD}$  igual ao dobro da altura  $\overline{AB}$ , é transformado na superfície lateral de um cilindro circular de modo




a  $\overline{AB}$  coincidir com  $\overline{CD}$ . Se o volume do cilindro é  $\frac{8}{\pi}$ , então o perímetro do retângulo é: a) 9 b) 12 c) 16 d) 24 e) 27

**81.** Sabendo-se que a área da base de um cilindro equilátero é  $25\pi$  cm<sup>2</sup>, determine o volume desse prisma.

**82.** (UFSE) As figuras seguintes descrevem os primeiros passos na fabricação de um cilindro a partir de uma chapa retangular de lata:



O cilindro resultante terá um volume, em centímetros cúbicos, compreendido entre: a) 550 e 600 b) 500 e 550 c) 450 e 500 d) 400 e 450 e) 350 e 400

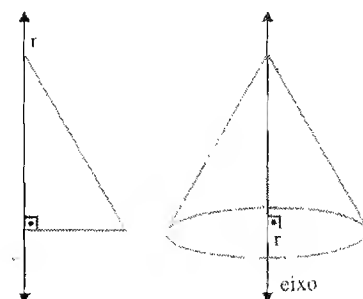
(Observação: lembre-se que:  e considere  $\pi = 3,14$ .)

**83.** (Fuvest-SP) A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4 cm de diâmetro e 50 m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual é o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

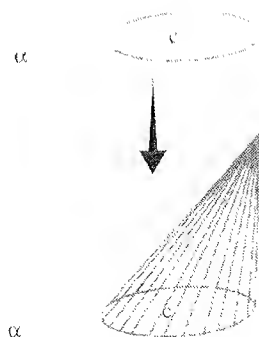
a) 90 cm b) 92 cm c) 94 cm d) 96 cm e) 98 cm

## Cones

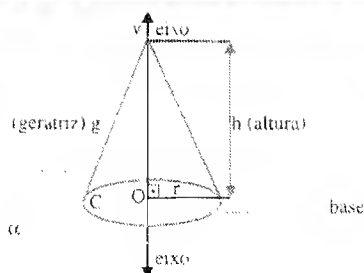
**1. Introdução** Imagine um triângulo retângulo em movimento de rotação em volta de um de seus catetos. A sua rotação completa descreverá um sólido chamado *cone circular reto*, ou *cone de revolução*, e que nós chamaremos apenas *cone*.



**2. Definição** Consideremos uma região circular  $C$  contida no plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  não contido em  $\alpha$ . Chamaremos *cone* ao sólido geométrico formado por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto  $V$  e a outra num ponto da região circular  $C$ .



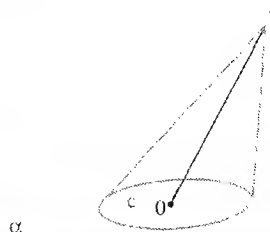
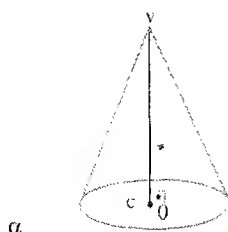
**3. Elementos do cone** Não diferem muito dos elementos do cilindro conforme a figura, temos:



- a) base: a base do cone de raio  $r$  é o círculo  $C$ ;
- b) altura ( $h$ ): é a distância entre o vértice ( $V$ ) e o plano  $\alpha$ ;
- c) geratrizes: são os segmentos de reta com uma extremidade em  $V$  e outra na circunferência  $C$ ;

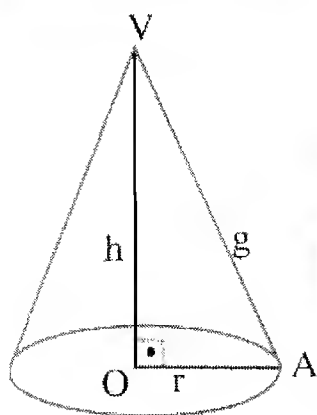
d) eixo: é o segmento de reta que tem extremidades em  $V$  e em  $O$  (centro da circunferência).

**4. Cones retos e oblíquos** Dizemos que o cone é *reto* quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Caso contrário, o cone se diz *oblíquo*.



## 5. Relação entre geratriz, raio e altura num cone circular reto

Consideremos a figura abaixo:



Note que o triângulo  $VOA$  é retângulo, então, podemos aplicar a Relação de Pitágoras.

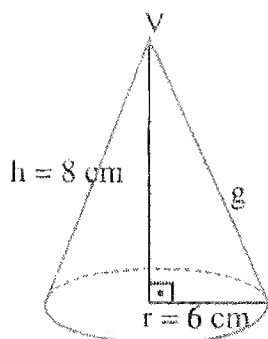
$$g^2 = h^2 + r^2, \text{ onde } g \text{ é a geratriz}$$

$h$  é a altura

$r$  é o raio da base.

### Exercícios resolvidos:

1. Considere um cone circular reto cuja altura mede  $h = 8$  cm e o raio  $r = 6$  cm. Determinar a medida da geratriz desse sólido geométrico.



Resolução: Temos:  $g^2 = h^2 + r^2$

$$g^2 = (8 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2$$

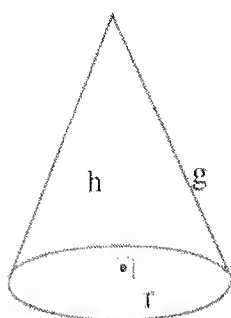
$$g^2 = 64 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2$$

$$g^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$g = \sqrt{100 \text{ cm}^2}$$

$$\boxed{g = 10 \text{ cm}}$$

2. Calcule a medida g da geratriz de um cone circular reto onde a medida h da altura é igual ao triplo da medida r do raio da base.



Resolução: Temos:  $h = 3r$ , logo:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$g^2 = (3r)^2 + r^2$$

$$g^2 = 9r^2 + r^2$$

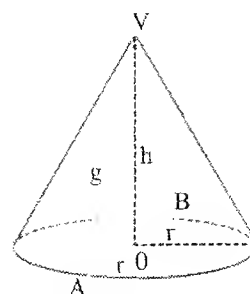
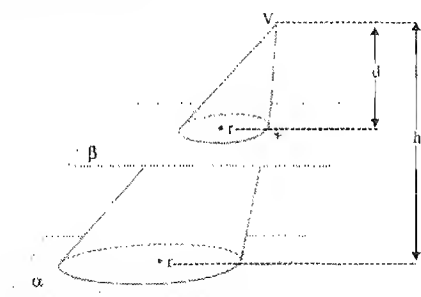
$$g^2 = 10r^2$$

$$\boxed{g = \sqrt{10} r}$$

**6. Secção** Assim como os cilindros, o cone apresenta:

a) secção transversal: quando o plano intercepta o cone paralelamente à base.

b) secção meridiana: quando o plano intercepta o cone em seu eixo.



Note que a secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles, onde:

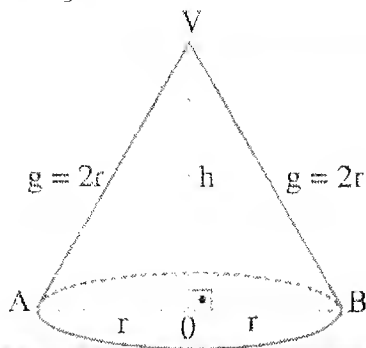
- a) a base desse triângulo é o diâmetro do cone;
- b) os lados congruentes (de mesma medida) são geratrizes;
- c) a altura desse triângulo é a altura do cone.

Logo, temos a seguinte relação:

$$\text{Secção meridiana } (A_{SM}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VO}}{2} = \frac{(r+r) \cdot h}{2} = \frac{2r \cdot h}{2}$$

$$\boxed{A_{SM} = r \cdot h}$$

**7. Cone reto equilátero** Um cone reto se diz equilátero quando sua geratriz for igual a duas vezes o raio da base ( $g = 2r$ ). Neste caso, a secção meridiana do cone é um triângulo equilátero.



$$\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{AB}$$

$$g = 2r$$

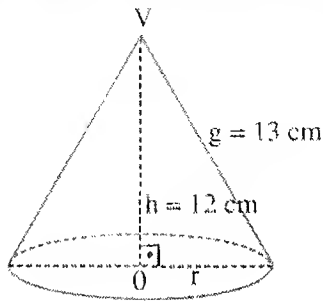
$$\text{Logo: } g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (2r)^2 = h^2 + r^2$$

$$4r^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}r^2$$

$$h = r\sqrt{3}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Um cone circular reto tem geratriz medindo 13 cm e mede 12 cm de altura. Obter a área da secção meridiana.



*Resolução:* Temos:  $g = 13$  cm e  $h = 12$  cm

$$\text{Então: } g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (13 \text{ cm})^2 = (12 \text{ cm})^2 + r^2$$

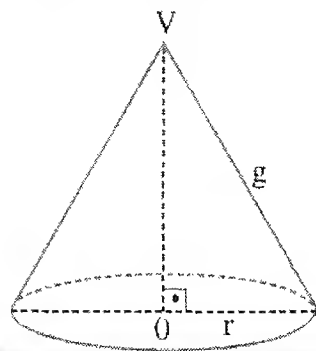
$$169 \text{ cm}^2 = 144 \text{ cm}^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$r = \sqrt{25 \text{ cm}^2} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

Portanto, a área da secção meridiana é:

$$A_{sm} = r \cdot h \Rightarrow A_{sm} = 5 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \Rightarrow A_{sm} = 60 \text{ cm}^2$$

2. Num cone circular reto equilátero a altura  $h$  mede  $5\sqrt{3}$  cm. Determinar as medidas do raio da base  $r$  e da geratriz  $g$ .



*Resolução:* Como o cone é equilátero, temos:

$$h = r\sqrt{3} \text{ e } g = 2r$$

$$\text{Logo: } 5\sqrt{3} \text{ cm} = r\sqrt{3}$$

$$r = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ cm} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$g = 2r \Rightarrow g = 2 \cdot 5 \text{ cm}$$

$$g = 10 \text{ cm}$$

### Exercícios propostos:

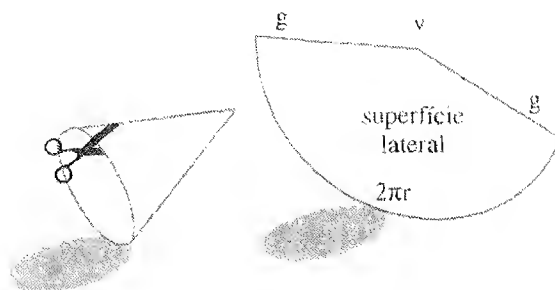
84. Num cone circular reto de raio 6 cm, a geratriz mede 10 cm. Calcule a área da secção meridiana.

85. Sabendo-se que num cone equilátero o raio da base mede 5 cm, determine a medida da altura.

**8. Áreas** A área da base ( $A_b$ ) é a área do círculo:

$$A_b = \pi r^2$$

A área lateral ( $A_l$ ), conforme observamos na figura abaixo, é igual à área do setor circular.



Lembremo-nos que a área do setor é dada pela relação

$$A_{\text{setor}} = \frac{l \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad A_{\text{setor}} = \frac{l \cdot r}{2} \quad \therefore A_l = \frac{2\pi r g}{2} \Rightarrow \boxed{A_l = \pi r g}$$

A área total ( $A_t$ ) do cone é dada pela soma da área de base ( $A_b$ ) e da área lateral ( $A_l$ ).

$$\boxed{A_t = A_b + A_l}$$

Substituindo os valores na fórmula da área total, temos:

$$A_t = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = \pi r (g + r)}$$

**9. Volume** Assim como nas pirâmides, o volume do cone é dado por  $\frac{1}{3}$  do produto da área da base pela altura. Logo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (\pi r^2) \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Num cone circular reto, temos que o raio de mede 4 cm e a geratriz, 5 cm. Determinar:

- a área da base
- a área lateral
- a área total
- o volume

**Resolução:** a) Área da base ( $A_b$ ): Temos:  $r = 4$  cm e  $g = 5$  cm

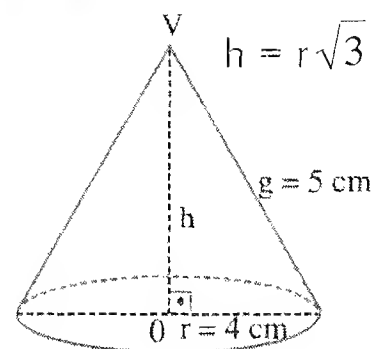
$$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi (4 \text{ cm})^2 \Rightarrow \boxed{A_b = 16\pi \text{ cm}^2}$$

b) Área lateral ( $A_l$ ):  $A_l = \pi r g \Rightarrow A_l = \pi \cdot 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$

$$\boxed{A_l = 20\pi \text{ cm}^2}$$

c) Área total ( $A_t$ ):  $A_t = A_l + A_b \Rightarrow A_t = 20\pi \text{ cm}^2 + 16\pi \text{ cm}^2$

$$\boxed{A_t = 36\pi \text{ cm}^2}$$

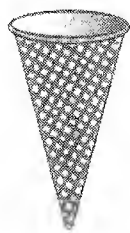


d) Volume (V):

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \text{ logo, temos que calcular o valor de } h, \\ \text{que é dado por: } g^2 = h^2 + r^2 \\ (5 \text{ cm})^2 = h^2 + (4 \text{ cm})^2 \Rightarrow 25 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \text{ cm}^2 \\ h = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Assim, o volume é: } V = \frac{\pi \cdot (4 \text{ cm})^2 \cdot 3 \text{ cm}}{3} \Rightarrow \boxed{V = 16\pi \text{ cm}^3}$$

2. Calcular o volume de uma casquinha de sorvete que tem a forma de um cone reto, onde o raio da base mede 4 cm e a altura, 10 cm.



Resolução: Temos:  $r = 4 \text{ cm}$  e  $h = 10 \text{ cm}$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ ou } V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

A área da base  $A_b$  é dada por:  $A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot (4 \text{ cm})^2$

$$\boxed{A_b = 16\pi \text{ cm}^2}$$

Com esse dado, podemos calcular o valor de V:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$V = \frac{16 \cdot 3,14 \cdot 10 \text{ cm}^3}{3} \Rightarrow V = \frac{502,4 \text{ cm}^3}{3} \Rightarrow \boxed{V \cong 167,47 \text{ cm}^3}$$

3. O raio da base de um cone equilátero mede 4 cm. Determinar: a) a área lateral, b) a área total e c) o volume

Resolução: Temos:  $r = 4 \text{ cm}$

a) Área lateral ( $A_l$ ): Como o cone é equilátero, temos que:

$$g = 2r \Rightarrow g = 2 \cdot 4 \text{ cm} \Rightarrow g = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Logo: } A_l = \pi r g \Rightarrow A_l = \pi \cdot (4 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm}) \Rightarrow \boxed{A_l = 32\pi \text{ cm}^2}$$

b) Área total ( $A_t$ ): A área da base é:

$$A_b = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot (4 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = 16\pi \text{ cm}^2$$

Logo, a área total é:  $A_t = A_b + A_l \Rightarrow A_t = 16\pi \text{ cm}^2 + 32\pi \text{ cm}^2$

$$\boxed{A_t = 48\pi \text{ cm}^2}$$

c) Volume (V): Como  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , precisamos calcular a altura  $h$ ,

que é dada por:  $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (8 \text{ cm})^2 = h^2 + (4 \text{ cm})^2$

$$h^2 = 64 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow h^2 = 48 \text{ cm}^2$$

$$h^2 = \sqrt{48 \text{ cm}^2} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Portanto, o volume é:

$$V = \frac{\pi \cdot (4\text{cm})^2 \cdot 4\sqrt{3}\text{cm}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{64\sqrt{3}\pi\text{cm}^3}{3}}$$

4. Calcular a área total de um cone cuja superfície lateral foi desenvolvida, obtendo-se assim um setor circular de raio 6 cm e ângulo central de  $60^\circ$ .

*Resolução:* Temos:  $\alpha$  = ângulo central do setor =  $60^\circ$  e  $g$  = raio do setor = 6 cm

Assim: a) Raio da base ( $r$ ):

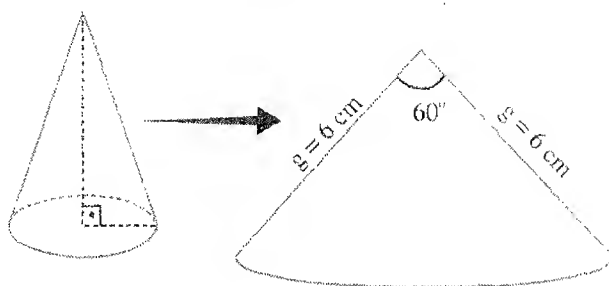
$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{g} \Rightarrow 60^\circ = \frac{360^\circ \cdot r}{6\text{ cm}} \Rightarrow 60^\circ \cdot r = 60^\circ \Rightarrow r = 1\text{ cm}$$

b) Área lateral ( $A_l$ ):  $A_l = \pi r g \Rightarrow A_l = \pi \cdot 1\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \Rightarrow A_l = 6\pi\text{ cm}^2$

c) Área da base ( $A_b$ ):  $A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi (1\text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = \pi\text{ cm}^2$

d) Área total ( $A_t$ ):  $A_t = A_l + A_b$

$$A_t = 6\pi\text{ cm}^2 + \pi\text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_t = 7\pi\text{ cm}^2}$$



### ⇒ Exercícios propostos:

**86.** (Mack-SP) A planificação da superfície lateral de um cone reto é um semicírculo de raio  $10\sqrt{3}$ . O volume do cone é:

a)  $357\pi$  b)  $573\pi$  c)  $375\pi$  d)  $537\pi$  e)  $735\pi$

**87.** (Mauá-SP) O raio da base, a altura e a geratriz de um cone reto formam, nesta ordem, uma P. A. Determinar esses elementos, sabendo que o volume do cone é de  $37,68\text{ cm}^3$ . Adote  $\pi = 3,14$ .

**88.** (UFES) Com um setor circular, cujo ângulo central mede  $120^\circ$ , constrói-se um cone circular reto de raio igual a 3 cm. Determine o volume do cone assim obtido.

**89.** (PUC-RS) A razão entre a área total e a área lateral de um cone equilátero é: a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{2}{3}$  c) 1 d)  $\frac{3}{2}$  e) 2

**90.** (ITA) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é  $24\pi\text{ cm}^2$  e o raio de sua base é 4 cm?

**91.** (UFMG) Considerem-se dois cones. A altura do primeiro é o dobro da altura do segundo. O raio da base do primeiro é a metade do

raio da base do segundo. O volume do segundo é de  $96\pi$ . O volume do primeiro é:

a)  $48\pi$  b)  $64\pi$  c)  $128\pi$  d)  $144\pi$  e)  $192\pi$

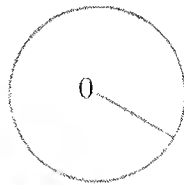
**92.** (PUC-RS) Num cone de revolução, a área da base é  $36\pi \text{ m}^2$  e a área total é  $96\pi \text{ m}^2$ . A altura do cone, em metros, é igual a:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

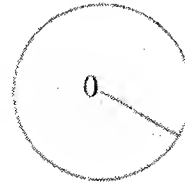
## Esferas

**1. Introdução** Recordemos as definições de circunferência e círculo.

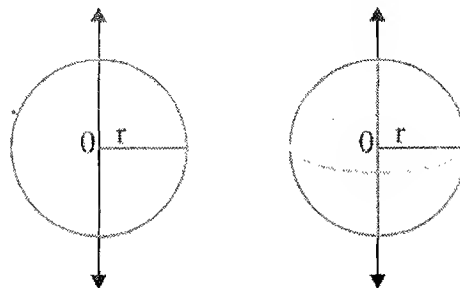
a) **Circunferência:** é o conjunto dos pontos do plano que tem distância  $r$  de um ponto  $O$  desse plano, onde  $O$  é o centro e  $r$  é o raio da circunferência.



b) **Círculo:** é o conjunto dos pontos do plano, cuja distância a  $O$  é menor ou igual a  $r$ , ou seja, o círculo inclui os pontos da circunferência como também os pontos internos a ela.

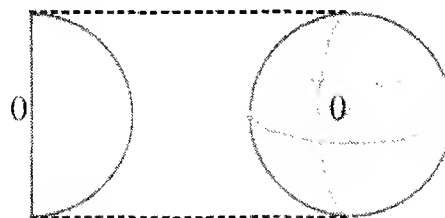


**2. Definição** Imaginemos uma circunferência girando em torno de seu diâmetro.



A figura obtida deste movimento de rotação, chama-se *superfície esférica* e é formada pelo conjunto de pontos do espaço cuja distância a um ponto  $O$  é igual à medida do raio  $r$ .

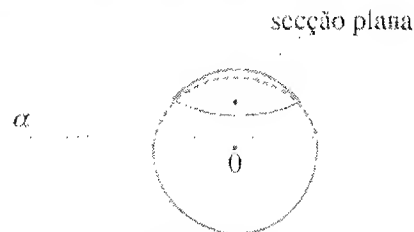
Suponhamos, agora, um círculo girando em torno de seu diâmetro.





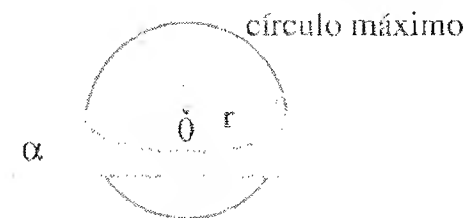
A figura obtida deste movimento de rotação chama-se *esfera* e é formada pelo conjunto de pontos do espaço cuja distância a um ponto  $O$  é menor ou igual a  $r$ ).

**3. Intersecção da esfera com um plano** Todo plano que intercepta ou secciona uma esfera determina um círculo, como podemos observar na figura:

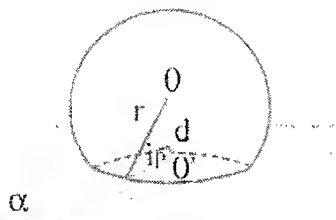


Um plano  $\alpha$  é *secante* à esfera quando a esfera tem mais de um ponto em comum com o plano  $\alpha$ .

Quando a secção plana passar pelo centro da esfera, o círculo obtido será denominado de *círculo máximo* da esfera.



Observando a figura a seguir:



Onde:  $r$  é o raio da esfera

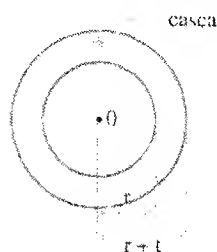
$d$  é a distância de  $O$  até  $\alpha$

$i$  é o raio da intersecção

concluimos, através do triângulo retângulo

$OO'A$ :  $r^2 = d^2 + i^2$

**4. Área** Para determinarmos a área da superfície esférica, utilizemos um artifício. Consideremos duas superfícies esféricas de mesmo centro, sendo  $r + t$  o raio maior e  $r$  o raio menor. O volume da coroa é dado por:



$$V_c = \frac{4\pi}{3} \cdot (3r^2 + 3r \cdot t + t^2)$$

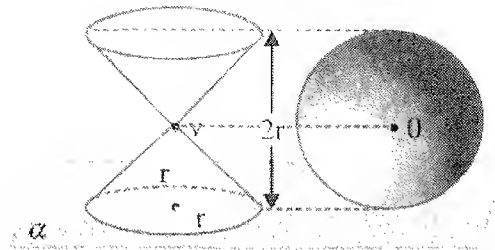
Como o volume da coroa é a diferença de volume das duas esferas, se fizermos  $t$  tender a zero, “encostaremos” uma esfera à outra,

o que, por definição, faria com que o valor  $V_c = \frac{4\pi}{3} \cdot (3r^2 + 3r \cdot t + t^2)$  seja igual à área da esfera menor.

Assim:  $A_s = 4\pi r^2$

**5. Volume** Para determinarmos o volume de uma esfera, usaremos outro artifício, já que nos é impossível planificá-la.

Consideremos uma esfera e um cilindro circular reto, ambos de raio  $R$ .

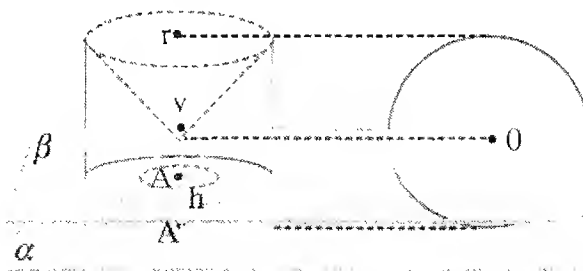


Retiremos do cilindro a área relativa a dois cones, conforme vimos na figura, e calculemos a área do sólido que se formou:

$$V_s = \underbrace{(\pi \cdot r^2) \cdot 2r}_{\text{volume cilindro}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3}_{\text{volume cone}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3}_{\text{volume cone}}$$

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow \boxed{V_s = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}$$

Consideremos, agora, um plano  $\beta$  interceptando os sólidos:



Calculamos, a seguir, as áreas das secções transversais da esfera e da coroa circular cujo raio maior é  $R$  e o raio menor é  $r$ .

A área da coroa ( $A_c$ ) é:

$$A_c = \pi r^2 - \pi h^2 \Rightarrow A_c = \pi(r^2 - h^2)$$

A área da secção transversal da esfera ( $A_s$ ) é dada por:

$$A_s = \pi \sqrt{(r^2 - h^2)^2} \Rightarrow A_s = \pi(r^2 - h^2)$$

Segundo o Princípio de Cavalieri, se dois sólidos apoiados sobre um mesmo plano  $\alpha$  e interceptados por um plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , tiverem suas secções transversais com mesma área, então os sólidos terão o mesmo volume.

Assim, como  $A_c = A_s$ , o volume do sólido é igual ao volume da esfera ( $V_s = V_e$ ), donde concluímos:

$$V_e = \frac{4\pi r^3}{3}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determine a área de uma superfície esférica de raio 5 cm.

Resolução: Temos:  $r = 5$  cm

$$A_s = 4\pi r^2 \Rightarrow A_s = 4\pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_s = 4\pi \cdot 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_s = 100\pi \text{ cm}^2}$$

2. A área de uma superfície esférica é  $64\pi \text{ cm}^2$ . Determine o raio da esfera.

Resolução: Temos:  $A_s = 64\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_s = 4\pi r^2$

$$64\pi \text{ cm}^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{64\pi \text{ cm}^2}{4\pi} \Rightarrow r^2 = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow r = \sqrt{16 \text{ cm}^2}$$

$$\boxed{r = 4 \text{ cm}}$$

3. O raio de uma superfície esférica é 3 cm. Determinar o volume da esfera.

Resolução: Temos:  $r = 3$  cm

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3}\pi (3 \text{ cm})^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot 9 \text{ cm}^3 \Rightarrow \boxed{V_e = 12\pi \text{ cm}^3}$$

4. Uma bola de basquete tem 30 cm de diâmetro. Calcular o volume de ar que cabe nessa bola.

Resolução: Temos:  $d = 30 \text{ cm} \Rightarrow r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = 15 \text{ cm}$

Logo, o volume de ar que caberá nessa bola é:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3}\pi (15 \text{ cm})^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot 3\,375 \text{ cm}^3$$

$$V_e = \frac{13\,500}{4}\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_e = 4\,500\pi \text{ cm}^3$$

Portanto, cabem  $4\,500\pi \text{ cm}^3$  de ar nessa bola ou  $4\,500 \cdot 3,14 \text{ cm}^3 = 14\,130 \text{ cm}^3$ .

### Exercícios propostos:

93. (UFRN) A razão entre o volume de uma esfera de raio  $R$  e o volume do cubo nela inscrito é:

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  b)  $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$  c)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$  d)  $\pi\sqrt{2}$  e)  $\pi \cdot \sqrt{3}$

94. (Cesgranrio-RJ) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio  $R$ , composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

- a)  $2\pi R^2$  b)  $4\pi R^2$  c)  $\frac{3\pi}{4} R^2$  d)  $3\pi R^2$  e)  $\frac{4}{3} \pi R^2$

95. (Cesgem) A área da intersecção de um plano com uma bola de raio 13 é  $144\pi$ . A distância do plano ao centro da bola é:

- a) 1 b) 5 c) 8 d) 12 e) 25

96. (UFPB) Sendo o volume de uma esfera de raio  $R$  numericamente igual a 33 vezes a sua área, calcular o valor de  $R$ , em unidades de comprimento.

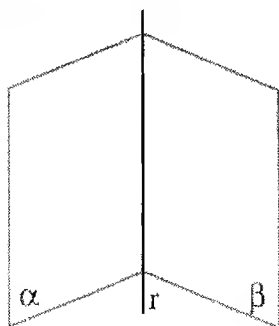
97. (UFSE) Um cone cuja altura mede 4 cm será equivalente a uma esfera de raio 2 cm se, e somente se, o raio da base do cone medir

- a)  $\sqrt{2}$  cm b) 2 cm c)  $2\sqrt{2}$  cm d) 4 cm e)  $4\sqrt{2}$  cm

98. (FAAP-SP) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é  $12\pi \text{ dm}^3$  e o raio dessa base é 3 dm.

99. (FEI-SP) A área total de um cubo e a área de uma superfície esférica são iguais. Qual a razão entre o raio da superfície esférica e a medida de uma aresta do cubo?

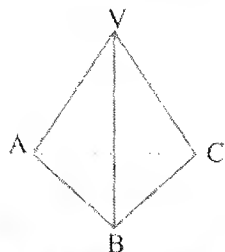
**Diedros** Dados dois semiplanos  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha \neq \beta$ , que se interceptam numa reta  $r$ , não opostos, denomina-se *diedro* ou *ângulo diédrico* à reunião de  $\alpha$  com  $\beta$ .



Diedro  $\alpha \beta$  ou  $\alpha a \beta$  ou  $\alpha \cup \beta$  onde  $r$  é a *aresta* do diedro e os semiplanos chamam-se *faces*.

Note que o diedro separa o espaço em duas regiões, uma das quais é *convexa* (interior do diedro).

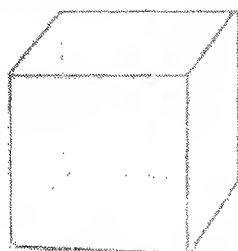
**Triedros** Consideremos três semi-retas  $\overline{VA}$ ,  $\overline{VB}$  e  $\overline{VC}$ , não coplanares, com origem em V. Denomina-se *triedro* ao conjunto reunião dos três setores angulares AVB, AVC e BVC.



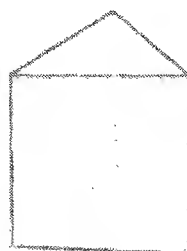
onde V é o vértice do triedro,  
 $\overline{VA}$ ,  $\overline{VB}$  e  $\overline{VC}$  são as arestas,  
 AVB, AVC e BVC são as faces.

## Poliedros

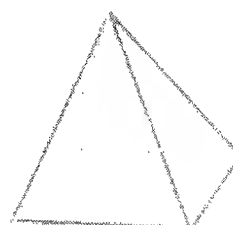
**1. Definição** Denomina-se poliedro o sólido limitado por polígonos planos que têm, dois a dois, um lado comum.



(cubo)

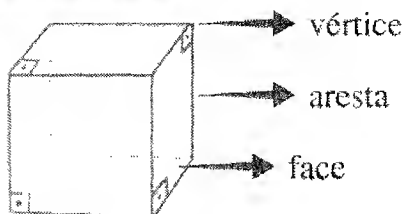


(prisma triangular)



(pirâmide)

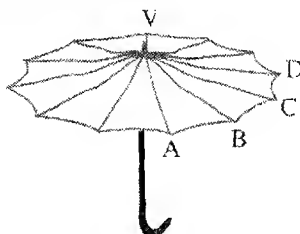
**2. Elementos de um poliedro** Seja o poliedro abaixo, temos:



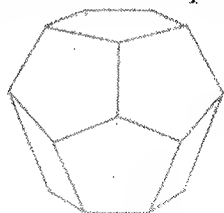
Podemos determinar três elementos distintos:

- a) faces: são as regiões poligonais que limitam o sólido.
- b) arestas: são a intersecção de duas faces.
- c) vértices: são a intersecção de três ou mais arestas.

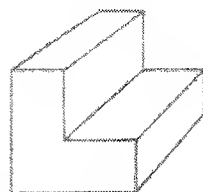
**3. Ângulo convexo poliédrico** Consideremos  $n$  semi-retas ( $n \geq 3$ ) de origem V comum, tal que três delas nunca sejam coplanares. Chamamos *ângulo poliédrico convexo* à reunião das  $n$  semi-retas e seus setores angulares correspondentes.



**4. Poliedro convexo** Dizemos que um poliedro é convexo quando, em relação a qualquer de suas faces, ele está completamente situado num mesmo semi-espço determinado por esta face.



No exemplo abaixo, temos um poliedro *não convexo*:



(côncavo)

**4.a) Classificação dos poliedros:** Os poliedros convexos são classificados segundo o número de suas faces:

- a) tetraedro: quatro faces
- b) pentaedro: cinco faces
- c) hexaedro: seis faces
- d) heptaedro: sete faces
- e) octoedro: oito faces
- f) icosaedro: vinte faces

**4.b) Relação de Euler:** Em todo poliedro convexo, a soma do número de vértices com o número de faces é igual ao número de arestas mais 2.

$$V + F = A + 2$$

Como podemos verificar nos exemplos seguintes:

a)  $V = 8$

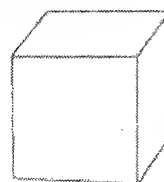
$A = 12$ , então

$F = 6$

$V + F = A + 2$

$8 + 6 = 12 + 2$

$14 = 14$



$V = 8$

b)  $V = 6$

$A = 9$

$F = 5$

$V + F = A + 2$

$6 + 5 = 9 + 2$

$11 = 11$



$V = 6$

### Exercícios resolvidos:

1. Num poliedro convexo, o número de arestas é 16 e o número de faces é 9. Obter o número de vértices.


Resolução: Temos:  $A = 16$  e  $F = 9$


Pela relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 9 = 16 + 2 \Rightarrow V = 18 - 9 \Rightarrow \boxed{V = 9}$$

2. Num poliedro convexo de 10 faces onde 6 dessas faces são triangulares e 4 delas são hexagonais, determine o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

Resolução: Temos: 10 faces onde 6 faces são triangulares 4 faces são hexagonais.

Então:   $\cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18$  arestas

  $\cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$  arestas

$$18 + 24 = 42 \text{ arestas}$$

Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:  $\frac{42}{2} = 21$  arestas.

Aplicando a relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 10 = 21 + 2 \Rightarrow V = 23 - 10 \Rightarrow \boxed{V = 13}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**100.** Se o número de vértices de um poliedro convexo é 5 e o número de arestas é 10, qual é o número de faces?

**101.** O número de arestas e de vértices de um poliedro convexo com seis faces quadrangulares e quatro faces triangulares é, respectivamente: a) 36 e 28 b) 10 e 10 c) 10 e 18 d) 28 e 36 e) 18 e 10

**102.** O número de vértices e o número de faces de um poliedro convexo de 40 arestas, onde a diferença entre o número de faces e o número de vértices é 18, são, respectivamente:

a) 12 e 30 b) 21 e 30 c) 30 e 12 d) 30 e 21 e) n. d. a.

**4.c) Propriedade dos poliedros convexos:** Num poliedro convexo, a soma dos ângulos de todas as faces é dada pela relação

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 360^\circ}, \text{ onde } V \text{ é o número de vértices.}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a soma dos ângulos das faces de um prisma cuja base é um pentágono.

Resolução: Como a base é pentagonal, o prisma tem:

$\Rightarrow$  2 bases e 5 faces laterais, totalizando 7 faces

$\Rightarrow$  5 arestas em cada base e 5 arestas laterais, então:

$$(5 + 5) + 5 = 15 \text{ arestas}$$

arestas da base      arestas laterais

Então, pela relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 7 = 15 + 2 \Rightarrow V = 17 - 7 \Rightarrow \boxed{V = 10}$$

Aplicando a fórmula da soma, temos:

$$S = (V - 2) \cdot 360^\circ \Rightarrow S = (10 - 2) \cdot 360^\circ \Rightarrow S = 8 \cdot 360^\circ$$

$$\boxed{S = 2880^\circ}$$

2. Determinar a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo que tem 12 faces e 15 arestas.

Resolução: a) Cálculo do número de vértices (V):

Pela relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 12 = 15 + 2 \Rightarrow V = 17 - 12 \Rightarrow \boxed{V = 5}$$

b) Cálculo da soma dos ângulos (S):

$$S = (V - 2) \cdot 360^\circ \Rightarrow S = (5 - 2) \cdot 360^\circ \Rightarrow S = 3 \cdot 360^\circ$$

$$\boxed{S = 1080^\circ}$$

### Exercícios propostos:

103. Num poliedro convexo de 20 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Determine a soma dos ângulos das faces desse poliedro.

104. Sabendo-se que um prisma tem base hexagonal, a soma dos ângulos das faces desse prisma é:

a)  $360^\circ$  b)  $540^\circ$  c)  $3600^\circ$  d)  $5400^\circ$  e)  $2800^\circ$

105. Sabendo-se que a soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo é  $1080^\circ$ , o número de faces desse poliedro, que tem 8 arestas, é: a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

**5. Poliedros regulares (ou poliedros de Platão)** Da Geometria Plana, sabemos que um polígono é *regular* quando todos os seus lados e todos os seus ângulos são congruentes.

Então, podemos definir um poliedro convexo regular: Um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos



regulares e congruentes e todos os ângulos poliédricos são congruentes.

Assim, de acordo com esta definição, há somente cinco poliedros regulares:

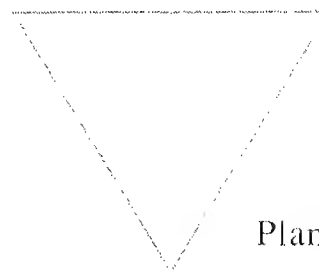
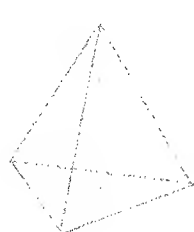
**a) tetraedro**

nº de faces: 4

nº de arestas: 6

nº de vértices: 4

forma da face: triangular



Planificação

**b) hexaedro**

nº de faces: 6

nº de arestas: 12

nº de vértices: 8

forma da face: quadrangular



Planificação

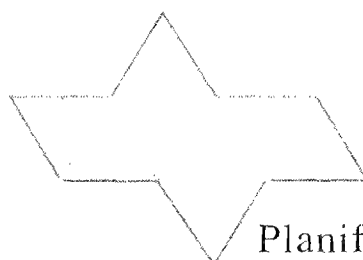
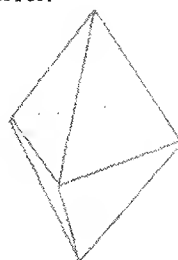
**c) octaedro**

nº de faces: 8

nº de arestas: 12

nº de vértices: 6

forma da face: triangular



Planificação

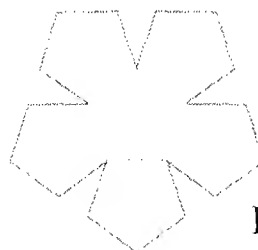
**d) dodecaedro**

nº de faces: 12

nº de arestas: 30

nº de vértices: 20

forma da face: pentagonal



Planificação

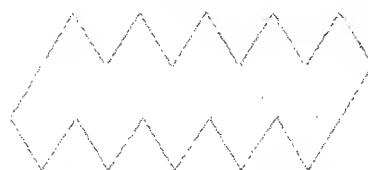
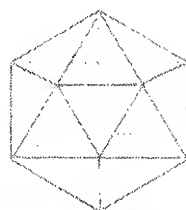
**e) icosaedro**

nº de faces: 20

nº de arestas: 30

nº de vértices: 12

forma da face: triangular



Planificação

**Exercícios complementares:**

**106.** Observando os poliedros regulares do item 5 das teorias calcule a soma dos ângulos das faces:

a) do tetraedro regular;

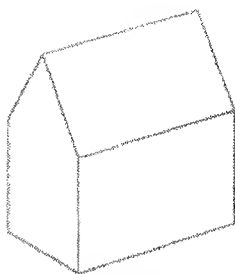
b) do hexaedro regular;

c) do octaedro regular;

d) do dodecaedro regular;

e) do icosaedro regular.

**107.** (UFMS) O número de faces (F), arestas (A) e vértices (V) da casa é, nesta ordem, igual a:



- a) 4, 11, 8                  d) 9, 8, 8  
b) 4, 12, 8                  e) 8, 10, 8  
c) 9, 17, 10

**108.** (UFRN) Em todo poliedro convexo, o número total de vértices e faces supera o número de arestas em duas unidades. O número de vértices de um poliedro convexo de oito faces, todas triangulares, é:

- a) 4   b) 5   c) 6   d) 12   e) 18

**109.** (PUC) O poliedro regular que possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces, denomina-se:

- a) tetraedro                  d) dodecaedro  
b) icosaedro                  e) octaedro  
c) hexaedro

**110.** (Fatec-SP) Um poliedro Q convexo tem: 4 faces com 5 lados, 3 faces com 4 lados e 2 faces com 3 lados. Se  $V$  é o número de vértices de Q, então:

- a)  $V = 9$                       d)  $V = 14$   
b)  $V = 12$                     e) n. d. a.  
c)  $V = 11$

# Capítulo XV

## MATEMÁTICA FINANCEIRA

**1. Introdução** Quando entramos numa loja que oferece um produto com mais de uma forma de pagamento, como saber qual a melhor opção?

É nesse sentido que a matemática financeira complementa e colabora na formação do estudante, tornando-o mais crítico perante os sistemas atuais de financiamento ou possibilitando-lhe compreender as mudanças na política econômica.

**2. Razão** O estudo da matemática financeira envolve noções de proporcionalidade, por isso, vamos recordar dois conceitos importantes: razões e proporções.

Chamamos razão de dois números racionais  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 0$ , o quociente de  $a$  por  $b$ . Sua representação é dada por:  $a \div b$  ou  $\frac{a}{b}$  (lê-se:  $a$  está para  $b$ ).

Esses números recebem nomes especiais:

$\frac{a}{b} \rightarrow$  antecedente

$b \rightarrow$  conseqüente

Consideremos o seguinte exemplo: uma equipe de futebol com 28 vitórias em 60 jogos:

$$\frac{28}{60} = \frac{7}{15} \text{ (lê-se: sete está para quinze)}$$

o que significa sete vitórias a cada quinze jogos.

Ainda vale lembrar que duas razões dizem-se *inversas* quando o antecedente de uma for igual ao conseqüente da outra e vice-versa. Nesse caso, o produto de ambas é igual à unidade (1).

### Exercícios resolvidos:

1. A cidade A tem uma população de 200 000 habitantes para uma área de 1200 km<sup>2</sup>. Qual é a densidade demográfica desta cidade?

Resolução:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{200\,000}{1200} \cong 166 \text{ hab/km}^2$$

2. Um velocista faz 100 m em 20 s. Calcular a velocidade média desse velocista.

Resolução:

$$\text{velocidade média} = \frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

3. Um caminhão tem 10 m de comprimento. Roberto construiu uma miniatura desse caminhão, representando esse comprimento por 5 cm. Qual foi a escala que ele usou para construir a miniatura?

Resolução: Reduzindo à mesma unidade: 10 m = 1000 cm

$$\text{escala} = \frac{5 \text{ cm}}{1000 \text{ cm}} \Rightarrow \frac{1}{200} \text{ ou } 1 : 200$$

### Exercícios propostos:

1. (UFMG) Dois caminhões-tanque carregam o mesmo volume de misturas de álcool e gasolina. A mistura de um contém 3% de álcool e a do outro 5% de álcool. Os dois caminhões descarregam sua carga em um reservatório que estava vazio. A razão do volume de álcool para o de gasolina na mistura formada no reservatório, após os caminhões terem descarregado, é:

- a)  $\frac{1}{25}$    b)  $\frac{1}{24}$    c)  $\frac{1}{16}$    d)  $\frac{1}{12}$    e)  $\frac{1}{8}$

2. (UFES) A escala da planta de um terreno, na qual o comprimento de 100 m foi representado por um segmento de 5 cm, é:

- a) 1 : 10 000   b) 1 : 2 000   c) 1 : 1 000   d) 1 : 200

3. (UFAL) A velocidade da luz é aproximadamente  $3 \cdot 10^5$  km/s e um ano tem cerca de  $3,2 \cdot 10^7$  s. Portanto, em um ano, a luz percorre, aproximadamente:

- a) 10 000 000 km                      d) 9 600 000 000 000 km  
b) 96 000 000 km                      e) 960 000 000 000 000 km  
c) 960 000 000 km

**3. Proporção** Chamamos *proporção* à sentença matemática que expressa a uma igualdade entre duas razões. Assim, consideremos os números racionais  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , com  $b$  e  $d$  diferentes de zero, e vamos determinar as razões:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = x_1 \\ \frac{c}{d} = x_2 \end{array} \right\} \text{Se } x_1 = x_2, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(lê-se:  $a$  está para  $b$ , assim como  $c$  está para  $d$ )

Neste caso, dizemos que os números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  formam, nesta ordem, uma proporção e denominamos os termos segundo suas posições:

$$\underbrace{a : b = c : d}_{\text{extremos}} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} \text{extremo} & \text{meio} & \\ \swarrow a & \searrow c & \\ \frac{a}{b} & = & \frac{c}{d} \\ \nwarrow b & \nearrow d & \\ \text{meio} & \text{extremo} & \end{array}$$

O que determina a propriedade fundamental das proporções:

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

#### **Exercício resolvido:**

1. Calcular o valor de  $x$  na proporção:  $\frac{3}{x} = \frac{2}{4}$

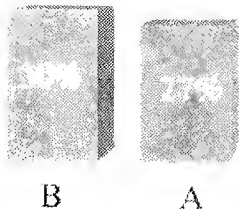
$$\text{Resolução: } 3 \cdot 4 = x \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow 12 = x \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{12}{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = \frac{60}{2} \Rightarrow \boxed{x = 30}$$

#### **Exercícios propostos:**

4. (UFSC) Na partida final de um campeonato de basquete, a equipe campeã venceu o jogo com uma diferença de 8 pontos.

Quantos pontos assinalou a equipe vencedora, sabendo que os pontos assinalados pelas duas equipes estão na razão de 23 para 21?

5. (UFGO) Numa pesquisa eleitoral, o candidato A teria 27% dos votos e o candidato B, 30%. Estes dados estão representados incorretamente no gráfico a seguir:



Se, no gráfico ao lado, a coluna que corresponde ao candidato A mede 3 cm, quanto deve medir a coluna que corresponde ao candidato B para que o gráfico represente corretamente os dados da pesquisa?

6. (UFRS) A média aritmética das idades dos estudantes de uma turma é 18 anos. Quando separados por sexo, essa média é 19 anos para o grupo de rapazes e 16 anos para o grupo de moças. A razão entre o número de rapazes e de moças é:

- a)  $\frac{1}{2}$    b)  $\frac{2}{3}$    c) 2   d)  $\frac{3}{2}$    e) 3

#### 4. Propriedades da proporção

a) Se  $a, b, c$  e  $d$  formam, nesta ordem, uma proporção, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \text{ ou } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

A propriedade é válida, também, para a diferença:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \text{ ou } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

#### Exercícios resolvidos:

1. A soma de dois números é 70 e eles estão na razão de 2 para 3. Calcular esses números.

Resolução: Sejam  $x$  e  $y$  esses números. Temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{2+3}{2} \text{ ou } \frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3}$$

Mas,  $x + y = 70$ , então, vem:

$$\frac{70}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5x = 2 \cdot 70 \Rightarrow x = \frac{140}{5} \Rightarrow \boxed{x = 28}$$

$$\frac{70}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5y = 3 \cdot 70 \Rightarrow y = \frac{210}{5} \Rightarrow \boxed{y = 42}$$

b) Se  $a, b, c$  e  $d$  formam, nesta ordem, uma proporção, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

A propriedade é válida, também, para a diferença:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

2. A diferença entre dois números  $x$  e  $y$  é 30 e eles são tais que  $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ . Determinar  $x$  e  $y$ .

Resolução: Aplicando-se a propriedade do item  $b$ , temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x-y}{3-2} = \frac{x}{3} \text{ ou } \frac{x-y}{3-2} = \frac{y}{2}$$

Mas,  $x - y = 30$ , então:  $\frac{30}{1} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 30 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{x = 90}$

$$\frac{30}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 30 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{y = 60}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

7. a) Calcular o valor de  $x$  e  $y$ , dados:  $\frac{x}{6} = \frac{y}{5}$  e  $x - y = 15$

b) Determinar o valor de  $a$  e  $b$ , dados:  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$  e  $a + b = 42$

8. (UFMG) Dois empresários A e B investiram um total de 490 milhões de cruzeiros em uma fábrica. Todo lucro da fábrica é dividido entre os dois proporcionalmente ao capital empregado.

Se o lucro de A foi de 15 milhões e o de B, de 20 milhões, a diferença entre os capitais investidos, em milhões de cruzeiros, foi de:  
a) 5 b) 70 c) 110 d) 210 e) 262

**5. Divisões Proporcionais** Demonstraremos, a seguir, como proceder em divisões:

a) **Diretamente proporcionais:** Consideremos o número 340. Queremos dividi-lo de maneira diretamente proporcional aos números 4, 6 e 7.

Chamemos de  $x$ ,  $y$  e  $z$  os números obtidos desta divisão. Assim, teremos duas sucessões:  $(x, y, z)$  e  $(4, 6, 7)$ . Então:  $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$

Como  $x + y + z = 340$ , então:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{x+y+z}{4+6+7} = \frac{x}{4} \text{ ou } \frac{y}{6} \text{ ou } \frac{z}{7}$$

Como:  $\frac{x+y+z}{4+6+7} = \frac{340}{17} = \frac{20}{1}$ , então:

$$\frac{20}{1} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 20 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{x=80}$$

$$\frac{20}{1} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 20 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{y=120}$$

$$\frac{20}{1} = \frac{z}{7} \Rightarrow z = 20 \cdot 7 \Rightarrow \boxed{z=140}$$

**b) Inversamente proporcionais:** Consideremos o número 380. Queremos dividi-lo de maneira inversamente proporcional aos números 2, 5 e 4.

Chamaremos  $x$ ,  $y$  e  $z$  os números resultantes, obtendo, portanto, duas sucessões:  $(x, y, z)$  e  $(2, 5, 4)$ , a primeira inversamente proporcional à segunda, isto é,  $(x, y, z)$  pelos inversos dos números 2, 5 e 4,

que são:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{Então: } \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

Como  $x + y + z = 380$ , temos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{x+y+z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{y}{\frac{1}{5}} \text{ ou } \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{380}{\frac{10+4+5}{20}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{y}{\frac{1}{5}} \text{ ou } \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{380}{\frac{19}{20}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{y}{\frac{1}{5}} \text{ ou } \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{380 \cdot 20}{19} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{y}{\frac{1}{5}} \text{ ou } \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{400}{1} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{y}{\frac{1}{5}} \text{ ou } \frac{z}{\frac{1}{4}}$$



$$\frac{400}{1} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 400 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 200}$$

$$\frac{400}{1} = \frac{y}{\frac{1}{5}} \Rightarrow y = 400 \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{y = 80}$$

Logo:

$$\frac{400}{1} = \frac{z}{\frac{1}{4}} \Rightarrow z = 400 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{z = 100}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**9.** (UFMS) O perímetro de um triângulo é 108 cm. As medidas de seus lados são proporcionais aos números 2, 3 e 4. Calcule a medida, em centímetros, do lado maior desse triângulo.

**10.** (UFPA) Uma herança foi deixada por um certo senhor para ser dividida entre sua tia, sua prima, seu primo e o cozinheiro. Sua prima e seu primo ficaram com a metade da herança, repartindo-a na proporção de 4 para 3. Sua tia ganhou o dobro do que ganhou o primo. Se o cozinheiro recebeu R\$ 5000,00 por sua parte, então o valor da herança era:

- a) R\$ 75 000,00                      c) R\$ 65 000,00                      e) R\$ 35 000,00  
b) R\$ 70 000,00                      d) R\$ 55 000,00

**11.** (UFSC) O perímetro de um terreno é 72 m. As medidas de seus lados são inversamente proporcionais a 2, 3, 5 e 6. A medida em metros, do menor lado desse terreno, é:

**12.** (UFRS) Uma estrada de 315 km foi asfaltada por 3 equipes A, B e C, cada uma delas atuando, respectivamente, em um trecho proporcional a 2, 3 e 4. O trecho da estrada que coube à equipe C foi de:  
a) 70 km   b) 96 km   c) 105 km   d) 126 km   e) 140 km

**13.** (UFBA) Os números positivos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  são inversamente proporcionais a 10, 1, 5. Sabendo-se que:  $y - z^2 - 2x = 0$ . Determine  $x + y + z$ .

**6. Porcentagem** Porcentagem é uma razão centesimal ou percentual onde o conseqüente é igual a 100.

Exemplo: 25% (lê-se “vinte e cinco por cento”), que pode ser representado também por:  $\frac{25}{100}$  ou 0,25

### Exercícios resolvidos:

1. Um colégio tem 2 000 alunos. Quanto por cento representam a 5ª série A, que tem 40 alunos?

Resolução: Temos:  $\frac{40}{2000} = 0,02 = (0,02 \cdot 100)\% = 2\%$

Então, para determinar "quanto por cento" 40 representa de 2.000, basta *dividir* 40 por 2 000 e *multiplicar* o quociente obtido por 100. Como *i* é a taxa porcentual, então:  $i = 2\%$

2. Numa cidade, 30% da população são homens e 40% são mulheres. Sabendo-se que há 4 500 crianças, pergunta-se: qual a quantidade de homens e mulheres e qual a população da cidade?

Resolução: 30% são homens, 40% são mulheres  $30\% + 40\% = 70\%$   
Logo, as crianças (4500) representam 30% da população  
(100% - 70%)

Como os homens também representam 30% da população, eles correspondem a 4500 homens.

Somando-se o número de homens e crianças, estabelecemos a seguinte correspondência: 60%  $\Leftrightarrow$  9000

Pela regra de três, temos

60% ——— 9000

40% ——— x

$$60x = 9000 \cdot 40 \Rightarrow x = \frac{36000}{60} \Rightarrow x = 6000 \text{ mulheres}$$

A população da cidade é dada pela soma de homens, mulheres e crianças, ou seja:  $4500 + 6000 + 4500 = 15000$  habitantes

### Exercícios propostos:

14. (UFSC) Ao vestibular de 1982 da UFSC, inscreveram-se 15 325 candidatos, dos quais 14099 concluíram todas as provas. O percentual de abstenção foi:

15. (UFRJ) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem dos homens na sala passe a ser 98%?

16. (UFSC) Se eu tivesse mais 20% da quantia que tenho, poderia pagar uma dívida de Cz\$ 92,00 e ainda ficaria com Cz\$ 8,80. A quantia que possuo é:

17. (UFAL) Um certo número de pessoas subiu em um ônibus no ponto inicial. Na primeira parada, desceram 25% daquele número e,

em seguida 3 pessoas. Na segunda parada não subiu ninguém, mas desceram 25% do número de pessoas presentes, restando, então, 18 pessoas. Nestas condições, o número de pessoas que subiu no ponto inicial é:

- a) 28 b) 25 c) 16 d) 14 e) 11

**7. Lucro e prejuízo** Nas transações comerciais pode ocorrer lucro ou prejuízo.

Designando por V, o preço de venda; C, o preço de custo ou de compra; L, o lucro; e P, o prejuízo, temos:

a) para uma transação com lucro:  $V = C + L$

b) para uma transação com prejuízo:  $V = C - P$

**Exercícios resolvidos:**

1. Um equipamento comprado por R\$ 3000,00 deverá ser vendido a que preço, para que proporcione o lucro de 25% sobre a venda?

Resolução: Temos:  $C = R\$ 3000,00$

$$L = 25\% \text{ de } C \Rightarrow L = 0,25 \cdot C \Rightarrow L = 0,25 \cdot 3\,000,00 \Rightarrow L = 750,00$$

Portanto, o equipamento deverá ser vendido por:

$$V = C + L \Rightarrow V = 3000,00 + 750,00 \Rightarrow V = 3750,00$$

2. Mercedes vendeu uma bicicleta por R\$ 300,00 tendo um lucro nessa transação de 30% sobre a venda. Quanto ela pagou pela bicicleta?

Resolução:  $V = R\$ 300,00$ ,  $L = 30\% \text{ de } V$

$$L = 0,30 \cdot 300,00 \Rightarrow L = 90,00$$

Como  $V = C + L$ , então temos:  $300,00 = C + 90,00$

$$C = 300,00 - 90,00 \Rightarrow C = 210,00$$

Portanto, Mercedes pagou R\$ 210,00 pela bicicleta, vendendo-a por R\$ 300,00, tendo um lucro sobre a venda de **R\$ 90,00**.

3. Um produto custa R\$ 200,00 para ser fabricado e é vendido por R\$ 250,00. Achar a taxa percentual de lucro para: a) o preço da venda e b) o preço do custo.

Resolução: Primeiramente, determinemos o valor do lucro:  $V = C + L$

$$250,00 = 200,00 + L \Rightarrow L = 250,00 - 200,00 \Rightarrow L = 50,00$$

Para calcularmos as taxas percentuais de lucro para o preço da venda e o preço de custo, basta calcularmos as razões:

$$\text{a) } i = \frac{L}{V} = \frac{50,00}{250,00} = 0,20 = 20\%$$

$$b) i = \frac{L}{C} = \frac{50,00}{200,00} = 0,25 = \boxed{25\%}$$

Note que o lucro relacionado com o preço de custo é maior do que o relacionado com o preço de venda.

4. 20% sobre o preço de venda de uma certa mercadoria, a quanto por cento correspondem sobre o preço de custo?

*Resolução:* 20% sobre o preço de venda, significa o lucro (L) que se deseja obter.

Se essa mercadoria é vendida, por exemplo, por R\$ 100,00, o lucro desejado seria de R\$ 20,00. Então, nesse caso, o preço de custo seria:  $V = C + L$

$$100,00 = C + 20 \Rightarrow C = 100,00 - 20,00 \Rightarrow C = 80,00$$

Logo, temos:  $V = 100,00$ ;  $C = 80,00$  e  $L = 20,00$

Calculando a razão do lucro sobre o custo, temos:

$$i = \frac{L}{C} = \frac{20,00}{80,00} = 0,25 \Rightarrow \boxed{i = 25\%}$$

5. Um comerciante vai vender seus produtos, que custaram R\$ 500,00, com um prejuízo de 15% do preço de custo. Nestas condições, qual será o preço de venda de seus produtos?

*Resolução:* Temos:  $C = 500,00$

$$P = 15\% \text{ de } C \Rightarrow P = 0,15 \cdot 500,00 \Rightarrow \boxed{P = 75,00}$$

Como  $V = C - P$ , temos:  $V = 500,00 - 75,00 \Rightarrow V = 425,00$

Portanto, o comerciante venderá seus produtos por R\$ 425,00, com um prejuízo de R\$ 75,00.

6. Vendi um aparelho eletrônico por R\$ 300,00 com prejuízo de 25% do preço de custo. Quanto eu havia pago por ele?

*Resolução:* Temos:  $V = 300,00$

$$P = 25\% \text{ de } C \Rightarrow P = 0,25 \cdot C$$

Como:  $V = C - P$

$$300,00 = C - 0,25 \cdot C \Rightarrow 300,00 = C \cdot (1 - 0,25)$$

$$0,75 \cdot C = 300,00 \Rightarrow C = \frac{300,00}{0,75} \Rightarrow \boxed{C = 400,00}$$

Logo, eu paguei R\$ 400,00 pelo aparelho eletrônico.

### Exercícios propostos:

18. 25% sobre o preço de custo de certa mercadoria, a quanto por cento correspondem sobre a venda?

19. Natália quer vender um apartamento que custou R\$ 160 000,00, lucrando 30% do preço de custo. Qual será o preço de venda do apartamento de Natália?

20. Luiz comprou um carro por R\$ 25 000,00 e vendeu-o por R\$ 30.000,00. Calcular qual a porcentagem de lucro relativo ao:

a) preço de custo; b) preço de venda.

21. Nilva vendeu seu terreno por R\$ 30 000,00 com um prejuízo de 20% do preço de custo. Quanto ela havia pago pelo terreno?

22. (UFSC) Paguei, com multa, Cr\$ 18 450,00 por uma prestação cujo valor era de Cr\$ 15 000,00. Qual a taxa percentual da multa?

23. (UFBA) Um feirante comprou 300 kg de coco ao custo de R\$ 0,30 o quilo, obtendo, com a venda, um lucro de R\$ 6,18. Vendeu 115 kg com 34% de lucro e o restante, com prejuízo. Sabendo-se que os cocos restantes foram vendidos por  $x$  reais o quilo, calcule  $100x$ .

24. (UFMG) Um negociante comprou certa mercadoria e a revendeu do seguinte modo: o primeiro quarto, com um lucro de 5%; o segundo, com 15% de lucro, e a metade restante, com um prejuízo de 6%. Obteve um lucro final de Cr\$ 316 000,00.

O negociante comprou a mercadoria por:

- a) Cr\$ 7 900 000,00                      d) Cr\$ 20 200 000,00  
b) Cr\$ 15 800 000,00                      e) Cr\$ 45 142 000,00  
c) Cr\$ 18 588 000,00

25. (UFGO) Num sacolão que vende legumes variados por um preço único, domingo, foram vendidos 100 kg de tomate, 200 kg de batata e 500 kg de outras variedades. Sabendo-se que os legumes são comprados em caixas de 20 kg a um preço de

Caixa com 20 kg	Tomate	Batata	Outros
Preço Cr\$	30 000,00	20 000,00	25 000,00

qual deverá ser o total arrecadado com as vendas para que o lucro seja de 30% sobre o preço de custo?

**8. Descontos e acréscimos** Quando um valor é aumentado, dizemos que sofreu um *acrécimo*, quando, ao invés, sofre uma diminui-

ção, trata-se de um *desconto*. Assim, para calcularmos acréscimos e descontos, fazemos uso de duas fórmulas denominadas, respectivamente, *fator de aumento* e *fator de diminuição*.

a) fator de aumento:

$$N = A \cdot (1 + i) \text{ onde } \begin{cases} N \text{ é o valor com o acréscimo} \\ A \text{ é o valor do bem} \\ (1+i) \text{ é o fator de aumento} \end{cases}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Um funcionário ganha, mensalmente, R\$ 500,00. No próximo mês, esse funcionário receberá um reajuste salarial de 30% do seu salário atual. Calcular: a) o valor do novo salário; b) o valor do reajuste salarial.

*Resolução:* Temos:  $A = 500$  e  $i \cdot A = 30\%$  de  $A$

a)  $N$  é o valor do novo salário, dado por:  $N = A \cdot (1 + i)$

$$N = 500 \cdot (1 + 0,30) \Rightarrow N = 500 \cdot 1,30 \Rightarrow \boxed{N = 650,00}$$

O fator de aumento utilizado foi: 1,30

b) O valor do reajuste salarial é:

$$i \cdot A = 30\% \text{ de } A = 0,30 \cdot 500 \Rightarrow \boxed{i \cdot A = 150,00}$$

2. O preço de uma certa mercadoria era R\$ 48,00. A partir de hoje, passou a ser R\$ 60,00. Calcular o fator de aumento (ou índice de reajuste).

*Resolução:* Temos:  $A = 48$  e  $N = 60$ . Então:  $N = A \cdot (1 + i)$

$$60 = 48 \cdot (1 + i) \Rightarrow \frac{60}{48} = 1 + i \Rightarrow 1 + i = 1,25$$

O fator de aumento usado foi: 1,25

Portanto, a taxa porcentual de aumento  $i = 1,25 - 1$

$$\boxed{i = 0,25 = 25\%}$$

3. Um funcionário ganha, por mês, R\$ 500,00. Em cada mês, seu salário é descontado, em média, 10% a título de previdência social e imposto sobre a renda. Qual é o valor do salário líquido desse funcionário? Qual o valor descontado mensalmente?

*Resolução:* Temos:  $A = 500$  e  $i \cdot A = 10\%$  de  $A = 0,10$  de  $A$

$$\text{Então: } N = A \cdot (1 - i)$$

$$N = 500 \cdot (1 - 0,10) \Rightarrow N = 500 \cdot 0,90 \Rightarrow N = 450$$

$$i \cdot A = 10\% \text{ de } A = 0,10 \cdot 500 = 50,00$$

Portanto o valor líquido do salário deste funcionário é de R\$ 450,00 e o desconto mensal é de R\$ 50,00.

4. O preço do produto de uma loja sofreu um desconto de 8% e ficou reduzido a R\$ 115,00. Qual era o seu valor antes do desconto?

Resolução:  $N = 115$  e  $i \cdot A = 8\%$  de  $A = 0,08$  de  $A$

$$\text{Então: } N = A \cdot (1 - i)$$

$$115 = A \cdot (1 - 0,08) \Rightarrow 115 = A \cdot 0,92 \Rightarrow A = \frac{115}{0,92} = \boxed{125,00}$$

Logo, o preço antes do desconto era de R\$ 125,00.

5. A produção de uma indústria caiu de 15 000 unidades para 12 000.

Calcular o fator de diminuição dessa produção.

Resolução: Temos:  $N = 12\ 000$  e  $A = 15\ 000$

$$\text{Então: } N = A \cdot (1 - i)$$

$$12000 = 15000 \cdot (1 - i) \Rightarrow 1 - i = \frac{12\ 000}{15\ 000} = 0,80$$

O fator de diminuição foi de: 0,80, e a taxa de diminuição é dada por:  $1 - i = 0,80 \Rightarrow i = 0,20 \Rightarrow \boxed{i = 20\%}$

### ⇒ Exercícios propostos:

26. Marly comprou uma guitarra importada com um desconto de 10% do preço tabelado. Se Marly pagou 360 dólares por essa mercadoria, por quanto ela estava tabelada?

27. (Cesgranrio-RJ) Para comprar um tênis de R\$ 70,00, Renato deu um cheque pré-datado de 30 dias no valor de R\$ 74,20. A taxa de juros cobrada foi de: a) 0,6% ao mês b) 4,2% ao mês c) 6% ao mês d) 42% ao mês e) 60% ao mês

28. (UFRN) O preço de um produto industrial recebeu um aumento de 20%, passando a custar Cr\$ 300,00. Se o aumento tivesse sido de apenas 10%, o produto estava custando: a) Cr\$ 255,00 b) Cr\$ 275,00 c) Cr\$ 280,00 d) Cr\$ 264,00 e) Cr\$ 270,00

29. (UFPA) Uma loja de departamento resolve fazer uma promoção, reduzindo os preços em 20%. Para que esses preços voltem a ser os mesmos praticados antes da promoção, o lojista deverá reajustá-los em: a) 20% b) 22,5% c) 22% d) 25% e) 19,5%

30. (UFPI) Paulo obteve um desconto de 10% na compra de um livro. Carla foi à loja e obteve um desconto de 10% sobre o preço pago por Paulo na compra do mesmo livro. Em relação ao preço original, o desconto que Carla obteve foi de:

a) 18% b) 19% c) 20% d) 21% e) 100%

**31.** (UFRS) Durante um ano, certo produto tem o seu preço reajustado em 15% ao mês. Os preços mensais do produto formam uma progressão:

- a) aritmética com razão 15
- b) aritmética com razão 1,15
- c) geométrica com razão 115
- d) geométrica com razão 15
- e) geométrica com razão 1,15

**9. Acréscimos e descontos sucessivos** Acréscimos e descontos sucessivos, como diz o próprio nome, são valores que aumentam ou diminuem sucessivamente. Para entendermos melhor, observemos atentamente os *exercícios resolvidos*.

**Exercícios resolvidos:**

1. Uma mercadoria teve aumentos sucessivos de 20%, 10% e 5%. De quanto por cento foi o aumento total dessa mercadoria?

*Resolução:* Há duas resoluções possíveis para esse problema:

1ª) 1º aumento: lucro de 20%

sobre 100%  $\Rightarrow 100\% + 20\% = 120\%$

2º aumento: lucro de 10% sobre 120%

100% ——— 120%

10% ——— x

x = 12%

Então:  $120\% + 12\% = 132\%$

3º aumento: lucro de 5% sobre 132%

100% ——— 132%

5% ——— x

x = 6,6

Logo:  $132\% + 6,6\% = 138,6\%$

O aumento total desta mercadoria foi de 138,6%, e a taxa de aumento *i* foi de: 38,6%.

2ª) Vejamos como é possível resolver facilmente esse mesmo problema utilizando o fator de aumento:

1º aumento:  $F_1 = 1 + 0,20 = 1,20$

2º aumento:  $F_2 = 1 + 0,10 = 1,10$

3º aumento:  $F_3 = 1 + 0,05 = 1,05$

Temos:  $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = 1,20 \cdot 1,10 \cdot 1,05 = 1,386$  (fator de aumento)

**Taxa de aumento:  $i = 38,6\%$**



2. O preço de um aparelho eletrônico era de R\$ 1000,00 mas sofreu acréscimos sucessivos de 20% e 30%. Quanto passou a custar esse aparelho eletrônico?

Resolução: Temos:  $F_1 = 1 + 0,20 = 1,20$  e  $F_2 = 1 + 0,30 = 1,30$

$$\text{Então: } N = A \cdot (1 + i)$$

$$N = 1.000 \cdot 1,20 \cdot 1,30 \Rightarrow \boxed{N = 1560,00}$$

O aparelho eletrônico passou a custar R\$ 1560,00, e teve um aumento total de 56%.

3. Um objeto de arte teve seu preço aumentado, sucessivamente, em 20% e 50%, passando a custar R\$ 1440,00. Qual era o preço desse objeto de arte antes desses aumentos?

Resolução: Temos:  $F_1 = 1 + 0,20 = 1,20$  e  $F_2 = 1 + 0,50 = 1,50$

$$\text{Então: } N = A \cdot (1 + i)$$

$$1440 = A \cdot 1,20 \cdot 1,50 \Rightarrow 1440 = 1,8 \cdot A \Rightarrow A = \frac{1440}{1,8}$$

$$A = 800,00$$

Logo, o preço praticado antes desses aumentos era de R\$ 800,00.

4. Um carro foi comprado por R\$ 40 000,00. Foi vendido, em seguida, com um lucro de 20%. O novo proprietário repassou o veículo com um lucro de x%. O último comprador vendeu-o com um lucro de 5%. Sabendo-se que a última venda foi feita por R\$ 55 440,00, qual é o valor de x?

Resolução: Temos:  $F_1 = 1 + 0,20 = 1,20$ ,  $F_2 = 1 + 0,x$  e  $F_3 = 1 + 0,05 = 1,05$

$$\text{Então: } N = A \cdot (1 + i)$$

$$55\,440 = 40\,000 \cdot 1,20 \cdot 1,05 \cdot (1 + 0,x)$$

$$55\,440 = 50\,400 \cdot (1 + 0,x) \Rightarrow 1 + 0,x = \frac{55\,440}{50\,400}$$

$$1 + 0,x = 1,1 \Rightarrow 0,x = 1,1 - 1 \Rightarrow 0,x = 0,1 \Rightarrow \boxed{x = 10\%}$$

5. Uma mercadoria de R\$ 3 000,00 sofreu os descontos sucessivos de 10%, 5% e 4%. A quanto ficou reduzido o preço dessa mercadoria e qual foi o valor do desconto?

Resolução: Trata-se, agora, de desconto, então:  $F_1 = 1 - 0,10 = 0,90$ ;  $F_2 = 1 - 0,05 = 0,95$  e  $F_3 = 1 - 0,04 = 0,96$

$$\text{Logo: } N = A \cdot (1 - i)$$

$$N = 3000 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,96 \Rightarrow N = 2462,4$$

Portanto, R\$ 2 462,40 é o novo preço da mercadoria e o valor do desconto é dado por:  $A - N = 3000 - 2462,4$

Assim, o valor do desconto foi de **R\$ 537,60.**

6. Certo produto industrial que custava R\$ 5 000,00 sofreu um acréscimo de 30% e, em seguida, um desconto de 20%. Qual o preço desse produto após esse acréscimo e desconto?

*Resolução:* Temos acréscimo e desconto, então:  $F_1 = 1 + 0,30 = 1,30$  e  $F_2 = 1 - 0,20 = 0,80$

$$\text{Logo: } N = 3\,000 \cdot 1,30 \cdot 0,80 \Rightarrow N = 5\,200,00$$

O preço do produto, após o acréscimo e o desconto, ficou em **R\$ 5 200,00.**

### **= Exercícios propostos:**

- 32.** (UFPB) Numa certa cidade as passagens de ônibus urbano custavam, no mês de agosto, Cr\$ 90,00; em setembro, houve um aumento de 20% e, em novembro, houve um outro aumento de 25%.

Qual o preço das passagens após esses aumentos?

- a) Cr\$ 120,00                      c) Cr\$ 130,00                      e) Cr\$ 140,00  
b) Cr\$ 125,00                      d) Cr\$ 135,00

- 33.** (UFPE) O valor do dólar, em cruzeiros, subiu 10% num dia e 22% no outro dia. No intervalo desse dois dias, o dólar subiu:

- a) 32,2%   b) 32,0%   c) 33,2%   d) 34,2%   e) 34,0%

- 34.** Uma mercadoria que custava R\$ 20000,00 sofreu os descontos sucessivos de 10%,  $x\%$  e 2% e ficou reduzida a R\$ 16 758,00. Qual o valor da taxa  $x\%$ ?

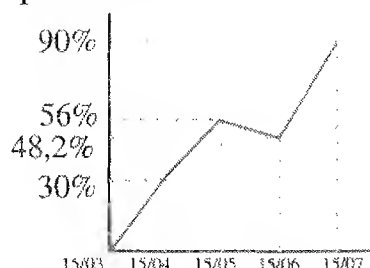
- 35.** (UFGO) Uma certa mercadoria teve um aumento de 20% no preço e, em seguida, foi feito um desconto, também de 20%. O preço dessa mercadoria foi alterado? Justifique sua resposta.

- 36.** (UFMG) Um comerciante aumenta o preço original  $x$  de certa mercadoria em 75%. Em seguida, anuncia essa mercadoria com um desconto de 50%, resultando um preço final de Cr\$ 2 100 000,00. O valor de  $x$  é:

- a) Cr\$ 2 400 000,00                      d) Cr\$ 4 000 000,00  
b) Cr\$ 2 600 000,00                      e) Cr\$ 4 200 000,00  
c) Cr\$ 3 200 000,00

**37** (UFMG) O preço de um determinado produto foi reajustado da seguinte forma: de 15 de março a 15 de abril, sofreu um aumento de 30%; de 15 de março a 15 de maio, 56%; de 15 de março a 15 de junho, 48,2% e de 15 de março a 15 de julho, 90%.

Neste gráfico está representada essa situação:



O índice de reajuste do mês é a variação percentual do preço entre o dia 15 do mês anterior e o dia 15 do mês em questão.

- Se o preço do produto em 15/04 era R\$ 26,00. Calcule o preço em 15/03 e em 15/05.
- Determine o maior índice de reajuste mensal ocorrido no período de 15/03 a 15/07.
- Calcule o percentual de redução do preço de 15/05 a 15/06.

**10. Juros** Para definirmos as variáveis relacionadas aos juros, consideremos o seguinte exemplo:

Jarbas pede emprestado de Maria Ângela a quantia de R\$ 60,00, para ser paga depois de três meses, comprometendo-se a pagar, naquela data, além dos R\$ 60,00, a quantia de R\$ 15,00.

Com base nesta situação, definimos:

- juro:** é a quantia que se paga a título de compensação pelo uso do dinheiro emprestado. Assim, no exemplo, os juros serão os R\$ 15,00 que Jarbas pagará a Maria Ângela ao final de três meses.
- capital:** é o dinheiro sobre o qual recairão os juros. No exemplo, o capital é representado pelos R\$ 60,00 que Jarbas toma emprestado a Maria Ângela.
- taxa de juro:** é a razão entre o juro produzido e o capital empregado na unidade de tempo. A taxa de juros que Jarbas pagará à Maria Ângela ao fim de três meses será de 25%. A taxa de juro é dada pela fórmula:

$$i = \frac{j}{c} \text{ onde, } i \text{ é a taxa de juro, } j \text{ é o juro, } c \text{ é o capital}$$

**11. Unidade de tempo** Também conhecida como *período financeiro* ou *período de capitalização*, é o intervalo de tempo após o qual aplicam-se os juros sobre o capital inicial, somando-se os valores.

É preciso lembrar que os juros sempre são estabelecidos segundo um período de tempo e uma porcentagem. Assim, juros de 7% ao mês significam que, a cada mês, são aplicados juros de 7% sobre o valor anterior.

**12. Montante** O *montante* é o capital resultante da soma do capital inicial e do juro aplicado ao fim do período financeiro. Assim:

$$M = c + j$$

**13. Juros simples** Chama-se operação financeira a *juros simples* aquela em que os juros são calculados apenas sobre o capital inicial para todo o número de períodos de capitalização.

Se um capital 100 produz juros  $r$  em um ano, então, um capital  $c$  produzirá juros  $j$  em  $n$  anos.

Capital	_____	Período	_____	Juros
100	_____	1(ano)	_____	$r$
$c$	_____	$n$ (anos)	_____	$j$

Como o juro é diretamente proporcional ao capital e ao período, podemos escrever:

$$\frac{r}{j} = \frac{100}{c} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{r}{j} = \frac{100}{cn} \Rightarrow j \cdot 100 \Rightarrow rcn \Rightarrow j = \frac{crn}{100} \quad (\text{I})$$

A taxa de juro, dada pela fórmula  $i = \frac{j}{c}$ , tem os valores  $i = \frac{r}{100}$  (II)

Substituindo (I) em (II), temos:  $j = c \cdot i \cdot n$  (III)

Substituindo (III) na fórmula do montante, temos:

$$M = c + j \Rightarrow M = c + c \cdot i \cdot n \Rightarrow \boxed{M = c \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Na matemática financeira, é importante que a taxa combine com o tempo, por isso não se esqueça:

1 ano = 12 meses  $\rightarrow$  taxa anual

1 mês comercial = 30 dias  $\rightarrow$  taxa mensal

1 ano comercial = 360 dias  $\rightarrow$  taxa diária

### Exercícios resolvidos:

1. Gilberto empregou seu capital de R\$ 7 200,00 durante 5 anos a uma taxa de 40% ao ano. Calcular os juros produzidos, nestas condições, deste capital.

Resolução:  $c = 7\,200$ ,  $n = 5$  anos e  $i = 40\%$  a.a.

$$\text{Temos: } j = c \cdot i \cdot n$$

$$j = 7\,200 \cdot 0,40 \cdot 5 \Rightarrow j = 14\,400$$

Então, os juros produzidos foram de **R\$ 14 400,00.**

2. Calcular o capital que, aplicado a 30% ao ano, durante 2 anos, produziu os juros de R\$ 12 000,00.

Resolução:  $i = 30\%$  a.a.,  $n = 2$  a e  $j = 12\,000$

$$\text{Temos: } j = c \cdot i \cdot n$$

Como queremos o capital, vamos isolar  $c$ :

$$c = \frac{j}{i \cdot n} \Rightarrow c = \frac{12\,000}{0,30 \cdot 2} = \frac{12\,000}{0,6} \Rightarrow c = 20\,000$$

O capital aplicado foi de **R\$ 20 000,00.**

3. A que taxa mensal foi aplicado o capital de R\$ 25 000,00, durante 8 meses, produzindo juros de R\$ 7 000,00?

Resolução:  $c = 25\,000$ ,  $n = 8$  meses e  $j = 7\,000$

$$\text{Logo: } j = c \cdot i \cdot n$$

$$i = \frac{j}{c \cdot n} \Rightarrow i = \frac{7\,000}{25\,000 \cdot 8} = \frac{7\,000}{200\,000} = 0,035 \Rightarrow \boxed{i = 3,5\%}$$

4. Amélia aplicou seu capital de R\$ 12 000,00 à taxa de 4,5% ao mês, durante 200 dias. Quanto ela recebeu de juros?

Resolução:  $c = 12\,000$ ,  $i = 4,5\%$  ao mês e  $n = 200$  dias

A unidade de tempo da aplicação deve ser reduzida à mesma

$$\text{unidade de tempo da taxa, logo: } n = \frac{200}{30}$$

$$\text{Assim: } j = c \cdot i \cdot n$$

$$j = 12\,000 \cdot 0,045 \cdot \frac{200}{30} \Rightarrow j = \frac{108\,000}{30} \Rightarrow j = 3\,600$$

Portanto, Amélia recebeu **R\$ 3 600,00** de juros.

5. Vanderlei fez uma aplicação de R\$ 40 000,00 à taxa de 38% ao ano, durante 2 anos, 5 meses e 12 dias. Quanto recebeu de juros com essa aplicação?

Resolução: Temos:  $c = 40\,000$ ,  $i = 38\%$  a.a. e  $n = 2$  anos, 5 meses e 12 dias.

A unidade de tempo da aplicação deve ser reduzida à mesma unidade de tempo da taxa, assim:

$$5 \text{ meses} = \frac{5}{12} \text{ e } 12 \text{ dias} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$$

$$\text{Somando-se: } 2 + \frac{5}{12} + \frac{1}{30} = \frac{120+25+2}{60} = \frac{147}{60}$$

$$\text{Logo: } j = c \cdot i \cdot n$$

$$j = 40\,000 \cdot 0,38 \cdot \frac{147}{60} = \frac{2\,234\,400}{60} \Rightarrow j = 37\,240$$

Portanto, Vanderlei recebeu **R\$ 37 240,00**  
de juros com essa aplicação.

6. Conceição aplicou um certo capital durante 75 dias à taxa de 9% ao mês, recebendo R\$ 90,00 de juros. Qual o montante dessa aplicação?

*Resolução:*  $i = 9\% \text{ a.m.}, j = 90 \text{ e } n = 75 \text{ dias}$

Temos:  $n = 75 \text{ dias} = 2 \text{ meses e } 15 \text{ dias}$ , portanto,

$$\text{a unidade de tempo será: } n = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

Substituindo os valores na fórmula:  $j = c \cdot i \cdot n$

$$c = \frac{90}{0,09 \cdot \frac{5}{2}} \Rightarrow c = 400$$

$$\text{Como } M = c + j: M = 400 + 90 \Rightarrow M = 490$$

Então o montante dessa aplicação foi de **R\$ 490,00.**

### **Exercícios propostos:**

38. (UFSC) Certo negociante pagou Cr\$ 560 000,00 pelo empréstimo da quantia de Cr\$ 500 000,00, durante um mês. Qual a taxa percentual de juros por mês?

39. (FMU-SP) O valor do capital, para que os juros simples a uma taxa de 18% ao ano, durante 8 meses, sejam de Cr\$ 576,00 é igual a:  
a) Cr\$ 4 800,00 b) Cr\$ 7 200,00 c) Cr\$ 8 400,00 d) Cr\$ 9 600,00

40. Benedita empregou o capital de R\$ 9 000,00 à taxa de 8% ao ano. No fim de certo tempo, ela retirou capital e juros no valor de R\$ 10 080,00. Calcular o tempo da aplicação.

41. José aplicou seu capital de R\$ 180 000,00 a juros simples, durante

um ano, um mês e 10 dias, obtendo dessa aplicação R\$ 48 000,00 de juros. A que taxa mensal esteve aplicado o capital de José?

42. Em quantos meses o capital de R\$ 37 000,00, aplicado à taxa de 1,8% ao ano, renderia juros para formar um montante de R\$ 38 110,00?

**14. Juros compostos** Chamamos *juros compostos* à modalidade de transação em que, a cada período os juros produzidos, são aplicados sobre o capital do período anterior. Sendo assim, temos:

$$M = c \cdot (1 + i)^n \text{ onde,}$$

$M$  é o montante,  $c$  é o capital,  $i$  é a taxa de juro composto e  $n$  é o número de períodos.

#### Exercícios resolvidos:

1. Ricardo aplicou R\$ 15 000,00 a juros compostos de 8% ao mês. Que quantia terá após 6 meses de aplicação?

Resolução: Temos:  $M = c \cdot (1 + i)^n$

$$M = 15\,000 \cdot (1 + 0,08)^6 \Rightarrow M = 15\,000 \cdot 1,586\,874\,322$$

$$M = 23\,803,11$$

Logo, Ricardo terá a quantia de **R\$ 23 803,11** após 6 meses.

2. Qual o capital que, investido a juro composto de 4% ao mês, gera um montante de R\$ 6 749,18 durante o período de 3 meses de aplicação?

Resolução: Temos:  $M = 6\,749,18$ ,  $i = 4\%$  a.m. e  $n = 3$  m.

$$\text{Então: } M = c \cdot (1 + i)^n$$

$$6\,749,18 = c \cdot (1 + 0,04)^3 \Rightarrow 6\,749,18 = c \cdot (1,04)^3$$

$$c = \frac{6\,749,18}{1,124864} \Rightarrow \boxed{c \cong 6\,000}$$

O capital inicial foi de, aproximadamente, R\$ 6 000,00.

3. Mônica recebeu um montante de R\$ 130 480,00 por investir seu capital de R\$ 80 000,00 a juros compostos de 13% ao mês. Determinar quanto tempo seu capital ficou investido. (Dados:  $\log 1,631 \cong 0,212$  e  $\log 1,13 \cong 0,053$ )

Resolução: Temos:  $c = 80\,000$ ,  $M = 130\,480$  e  $i = 13\%$  a.m.

$$\text{Assim: } M = c \cdot (1 + i)^n$$

$$130\,480 = 80\,000 \cdot (1 + 0,13)^n \Rightarrow \frac{130\,480}{80\,000} = (1,13)^n$$

$$(1,13)^n = 1,631$$

Para determinar o valor de  $n$ , aplicamos logaritmo aos dois termos da equação:  
 $\log (1,13)^n = \log 1,631 \Rightarrow n \cdot \log 1,13 = \log 1,631$

$$n \cdot (0,053) = 0,212 \Rightarrow n = \frac{0,212}{0,053} \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

Logo, Mônica deixou seu capital investido durante 4 meses.

### Exercícios propostos

43. (UFMG) Por um empréstimo de Cr\$ 80 000,00 à taxa de 1% ao mês, paga-se, de uma única vez, após dois meses, o montante de Cr\$ 115 200,00. Por terem sido aplicados juros compostos, a taxa mensal foi de: a) 15% b) 20% c) 22% d) 24% e) 26%

44. (UFRR) Suponha que um assalariado ganha Cr\$ 500 000,00 mensalmente, com reajuste de 65% anual, e pague uma prestação de Cr\$ 125 000,00 mensais, com reajuste anual de 117,8%. Supondo fixos esses reajustes, em quanto tempo, aproximadamente, o seu vencimento terá um valor exatamente igual ao da prestação? (Dados:  $\log 4 = 0,60$  e  $\log 1,32 = 0,12$ )

45. Guilhermina aplicou R\$ 3 000,00 a juros compostos de 7% ao mês. Que quantia terá após 5 meses de aplicação?

**15. Aplicação ou capital à taxa variável** Quando um investimento (capital) tiver aumentos sucessivos com taxas não-constantes, o montante será dado pelo produto desse capital pelos fatores de aumento. Assim, temos:

$$M = c \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \dots \cdot (1 + i_n)$$

### Exercício resolvido:

1. A um capital de R\$ 5 000,00 foram aplicadas as seguintes taxas de juros compostos: 8% no primeiro mês; 10% no segundo mês e 15% no terceiro mês. Determinar o montante após esses três meses. Calcular a taxa única que equivale a esses três aumentos.

**Resolução:** Temos:  $i_1 = 8\%$ ,  $i_2 = 10\%$  e  $i_3 = 15\%$

$$M = c \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)$$

$$M = 5\,000 \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,15)$$

$$M = 5\,000 \cdot (1,08) \cdot (1,10) \cdot (1,15) \Rightarrow M = 6\,831$$

Logo, o montante é de  $\boxed{\text{R\$ } 6\,831,00.}$

$$\text{Cálculo da taxa única: } i_{\text{ÚNICA}} = \frac{\text{juros (j)}}{\text{Capital (c)}}$$



$$j = M - c \Rightarrow j = 6\,831 - 5\,000 \Rightarrow j = 1\,831$$

$$i_{\text{UNICA}} = \frac{1\,831}{5\,000} \Rightarrow i_{\text{UNICA}} = 0,3662 \Rightarrow \boxed{i_{\text{UNICA}} = 36,62\%}$$

## 16. Definição de alguns termos comuns da matemática financeira

a) **Nota promissória:** É uma promessa de pagamento por escrito feita pelo devedor, numa só via.

O *devedor*, chamado *emitente*, declara, nessa via, que deve pagar uma determinada quantia a uma certa pessoa, em uma data estipulada entre as partes.

b) **Duplicata:** Documento originado por uma operação de venda a prazo ou de prestação de serviço, a *duplicata* é emitida por quem vende ou presta o serviço e é aceita por quem compra ou paga o serviço.

A nota promissória e a duplicata são chamadas de *títulos de crédito* e, portanto, possuem uma data de vencimento. Em alguns casos, quando estes títulos são resgatados antes de sua data de vencimento, pode-se obter um desconto.

Entre outros títulos de crédito, temos a letra de câmbio e o cheque.

c) **Valor nominal:** É a importância declarada no título e que será paga na data de vencimento.

d) **Valor atual ou líquido:** Em alguns casos, o título que for resgatado antes de seu vencimento poderá ter um desconto  $d$ , e o valor atual será a diferença:  $A = N - d$ , onde  $A$  é o valor atual e  $N$  é o valor nominal.

e) **Desconto comercial:** É o desconto feito sobre o valor nominal do título. Calculamos o desconto de modo análogo ao cálculo dos juros simples. Então:  $d_c = N \cdot i \cdot n$ , onde  $d_c$  é o desconto comercial,  $N$  é o valor nominal do título,  $i$  é a taxa de desconto (forma unitária) e  $n$  é a quantidade ou número de períodos entre a data da operação de desconto e a data do vencimento.

f) **Desconto racional ou bancário:** É o desconto feito sobre o valor atual do título. Calcula-se o desconto racional de modo análogo ao desconto comercial, isto é:  $d_r = A \cdot i \cdot n$ , onde  $d_r$  é o desconto racional ou bancário.

### Exercícios resolvidos:

1. Uma nota de valor nominal de R\$ 7 500,00 foi descontada 20 dias antes do vencimento, à taxa de 7% ao mês. Calcular o desconto simples comercial e o valor líquido (atual) recebido.

Resolução: Temos:  $N = 7\,500$ ,  $i = 7\%$  a.m. e  $n = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$$\text{Então: } d_c = N \cdot i \cdot n, d_c = 7\,500 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{d_c = 350,00}$$

O valor líquido (atual) é dado por:  $A = N - d$

$$A = 7\,500 - 350 \Rightarrow \boxed{A = 7\,150,00}$$

Então o valor nominal teve um desconto de R\$ 350,00 e o valor atual foi de R\$ 7 150,00.

2. Uma duplicata de R\$ 20 000,00 foi descontada por R\$ 16 000,00, 4 meses antes do vencimento. Determinar a taxa mensal de desconto racional.

Resolução:  $N = 20\,000$ ,  $A = 16\,000$ ,  $d_r = N - A = 4\,000$  e  $n = 4$  m

Temos, então:  $d_r = A \cdot i \cdot n$

$$4\,000 = 16\,000 \cdot i \cdot 4 \Rightarrow i = \frac{4\,000}{64\,000} \Rightarrow i = 0,0625 \Rightarrow \boxed{i = 6,25\%}$$

3. Uma nota promissória de valor nominal R\$ 2.300,00 foi resgatada antes do seu vencimento por R\$ 1 913,60. Determine quanto tempo faltava para o vencimento, sabendo que a taxa de desconto comercial foi de 4,5% ao mês.

Resolução: Temos:  $N = 2\,300$ ,  $A = 1\,913,60$ ,  $d_c = 386,40$  e  $i = 0,045$

$$d_c = N \cdot i \cdot n \Rightarrow 386,40 = 2\,300 \cdot 0,045 \cdot n \Rightarrow 386,40 = 103,5 \cdot n$$

$$\boxed{n = 3 \text{ meses e } 22 \text{ dias}}$$

Para encontrarmos o valor de  $n$ , fazemos o seguinte cálculo:

$$\begin{array}{r} 386,40 \\ \hline 103,5 \end{array}$$

759      3 meses

x 30 dias

22 770

Multiplicamos o valor do resto por 30, para encontrarmos o número de dias, e o dividimos novamente por 103,5:

$$\frac{22\,770}{103,5} = 22 \text{ dias}$$

### Exercícios propostos:

46. Uma letra de valor nominal de R\$ 3 600,00, vencível a 20-10-1995, foi resgatada antes do seu vencimento a 16-06-95, à taxa de 10% ao ano. Calcular o desconto comercial.

47. Elson resgatou um título, obtendo o desconto de R\$ 192,00 à taxa de 12% ao ano, 8 meses antes do vencimento. Determine o valor nominal desse título.

48. Natalina resgatou uma letra de R\$ 18 600,00, 5 meses antes do seu vencimento, obtendo o desconto racional de R\$ 600,00. Calcule a taxa.

49. Determine o valor nominal de um título que sofreu desconto racional de R\$ 45,00 a 6% ao ano, 90 dias antes do seu vencimento.

**17. Noções de financiamento** Dívidas pagas em parcelas, geralmente têm prestações compostas por dois elementos: juros e amortização.

Os juros são calculados sobre o saldo devedor e a amortização é uma quantia subtraída do total da dívida para se calcular o saldo devedor. Assim, podemos distinguir quatro tipos de planos de pagamento:

- a) juros simples
- b) juros compostos
- c) sistema *Price*: método francês em que a dívida é liquidada com prestações de valores iguais
- d) método hamburguês: método de prestações decrescentes

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar o valor de um financiamento onde a taxa é de 3,5% ao mês, para ser liquidado em 18 prestações de R\$ 5.000,00 por mês.

Resolução: Temos: prestação: 5000

Dado: FRS (taxa, período) = FRS (3,5%; 18) = 24,49969

Então: principal = prestação · FRS

principal = 5 000 · 24,49969 = 122 498,45

O valor do financiamento é de **R\$ 122 498,45**

2. O preço de um carro novo é de R\$ 30 000,00. Nanci comprou esse carro a prazo nas seguintes condições: 20% de entrada e o restante financiado à taxa de 3% ao mês, em 12 meses. Qual o valor da prestação mensal que ela deverá pagar?

Resolução: entrada = 20%

financiamento = 80% de R\$ 30 000,00 = R\$ 24 000,00

dado: FPR (3%, 12) = 0,10046

prestação = principal • FPR (3%, 12)

prestação = 24 000 • 0,10046

prestação = 2411,04

Logo, Nanci pagará 12 prestações de **R\$ 2 411,04**

3. Adão comprou móveis cujo valor à vista foi de R\$ 10 000,00. Ele optou por comprar a prazo dando 20% de entrada e vai pagar o restante em 12 prestações mensais de R\$ 852,40. Determinar a taxa efetiva do financiamento.

Resolução: prestação = R\$ 852,40

principal = 80% de R\$ 10 000,00 = R\$ 8 000,00

n (período) = 12 meses

Então: prestação = principal • FPR (taxa; período)

logo:  $FPR (taxa, 12) = \frac{prestação}{principal} = \frac{852,40}{8\,000} = 0,10655$

Consultando uma tabela financeira você poderá confirmar que, o número 0,10655 na coluna FPR e a linha 12

(n = 12) nos dão o valor da taxa  $\Rightarrow$  **i = 4%**

Observação: Não proporemos exercícios de aplicação abordando *planos de pagamento* pois esta matéria só foi apresentada aqui para ampliar o seu conhecimento, sendo um assunto próprio do 3º grau.

**18. Inflação** Dizemos que há *inflação* quando os preços de bens e serviços sofrem aumento. Quando sofrem diminuição, dizemos que houve *deflação*.

Para resolvermos problemas que envolvem inflação, utilizamos o mesmo raciocínio usado para solucionar problemas de aumentos sucessivos e juros compostos, isto é: multiplicamos o valor do bem pelos fatores de aumento.

A taxa de inflação é calculada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que utiliza, como base, o índice nacional de preços ao consumidor (INPC).

#### Exercícios resolvidos:

1. Qual deve ser a correção de um salário de R\$ 700,00 dentro de um período em que a inflação atingiu 30%?

Resolução:  $N = A \cdot (1 + i)$

$$N = 700 \cdot (1 + 0,30) \Rightarrow N = 700 \cdot 1,30 \Rightarrow N = 910$$

Portanto, o salário passaria a ser R\$ 910,00

A correção seria de **R\$ 210,00 (910 - 700)**

2. Num certo país, as taxas mensais de inflação foram de 20% e 30%. Determine a taxa de inflação acumulada nesse bimestre.

Resolução: Supondo um valor de cem unidades monetárias, anteriores a esses dois aumentos, para reajustar esse valor, temos:

$$N = 100 \cdot 1,20 \cdot 1,30 = 156$$

De onde se conclui que o aumento inflacionário foi de 56, portanto, a taxa de inflação correspondente a esses dois

$$\text{aumentos foi de: } i = \frac{56}{100} = 0,56 \Rightarrow \boxed{i = 56\%}$$

#### Exercícios complementares:

50. (UFES) Os índices de inflação dos três primeiros meses de um determinado ano foram iguais a 10%, 20% e 30%.

- a) Qual o índice de inflação acumulado no trimestre.  
b) Se uma determinada categoria reivindica reajuste trimestral igual à inflação do período e obtém 60% ao final do trimestre citado, que índice de reajuste sobre o novo salário obtido deve ser concedido para se cobrir a perda salarial decorrente?

51. (UFGO) Uma loja vende suas mercadorias à vista com 30% de desconto ou em dois pagamentos mensais iguais, sem entrada e sem juros. Suponha que a inflação nos próximos meses seja de 20% e que o comprador pode comprar uma mercadoria em qualquer um dos planos. Qual ele deverá escolher? Justifique.

52. (UFMG) Um consumidor foi comprar um produto e o vendedor lhe deu duas opções:

1ª – pagar à vista com 15% de desconto;

2ª – pagar o preço do produto em três parcelas iguais, sendo a primeira no ato da compra, a segunda em 30 dias e a terceira em 60 dias.

Sabendo-se que todo o dinheiro disponível do consumidor está aplicado no mercado financeiro e rende 30% ao mês, qual das duas opções é a mais vantajosa para ele? Justifique.

53. (UFRJ) Um eletrodoméstico custa Cr\$ 25 000,00 à vista, mas pode também ser pago em duas vezes: Cr\$ 15 000,00 de entrada e Cr\$ 15 000,00 ao fim de 30 dias. Qual é o juro mensal que a loja está cobrando do cliente que paga em duas vezes?

# Capítulo XVI

## NÚMEROS COMPLEXOS

**1. Introdução** Até agora, quando alguma equação exigia uma raiz quadrada de um número negativo, a solução era impossível dentro do conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ). Por isso, os matemáticos idealizaram um número imaginário ( $i$ ), e a partir deste, surgiram novos números, constituindo o conjunto dos números complexos ( $\mathbb{C}$ ).

**2. Definição** Dada uma equação:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

Para que equações como essa tivessem solução, os matemáticos ampliaram o campo dos números, criando um novo número, não-real, chamado de *unidade imaginária* ( $i$ ). Onde  $i = \sqrt{-1}$

E esse número, elevado ao quadrado:  $i^2 = -1$

Assim, todas as raízes quadradas de números negativos podem ser escritas a partir de  $i$ :

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{2}i$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$$

**3. Conjunto dos números complexos** Com a criação da unidade imaginária ( $i$ ), surgiram novos números, formando um novo conjunto de números, ampliando o conjunto dos números reais. A este conjunto, chamamos *conjunto dos números complexos*, denotado por  $\mathbb{C}$ .

Os números complexos apresentam a forma genérica  $z = a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais. Assim, podemos definir o conjunto  $\mathbb{C}$  como:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$$

onde  $z$  é o número complexo.

**4. O número complexo** Sendo  $z = a + bi$  um número complexo, temos:

- a)  $a + bi$  é chamado de forma algébrica;
- b)  $a$  é denominado de parte real de  $z$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ :  $a = \text{Re}(z)$ ;
- c)  $b$  é denominado de parte imaginária de  $z$ , onde  $b \in \mathbb{R}$ :  $b = \text{Im}(z)$ ;
- d)  $i$  é a unidade imaginária:  $i = \sqrt{-1}$ .

**5. Casos especiais** Tomemos o número complexo em sua forma genérica:  $z = a + bi$

- a) quando  $b = 0$ , então o número  $z = a + bi$  é um número real, pois  
 $z = a + 0i \Rightarrow z = a$

Isso significa que todo número real é também um número complexo, portanto, podemos afirmar:  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Recordando:

$\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais  
 $\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros  
 $\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais  
 $\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais  
 $\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos

Finalmente, podemos escrever:  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- b) quando  $b \neq 0$ , então o número  $z = a + bi$  é dito um número imaginário. Ex.:  $-3 + 5i$
- c) quando  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , então o número  $z = a + bi$  é denominado imaginário puro, ou seja  $z = 0 + bi \Rightarrow z = bi$

#### Exercícios resolvidos:

- 1. Achar as raízes das equações: a)  $x^2 - 4x + 13 = 0$ ; b)  $x^2 + 4 = 0$ ;  
c)  $x^4 - 1 = 0$  e d)  $x^4 - 9 = 0$

Resolução: a)  $x^2 - 4x + 13 = 0$  é uma equação do 2º grau, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 \Rightarrow \Delta = 16 - 52 \Rightarrow \Delta = -36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm 3i)}{\cancel{2}} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 + 3i \\ x'' = 2 - 3i \end{cases} \text{ ou}$$

$$S = \{2 + 3i; 2 - 3i\}$$

- b)  $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i \Rightarrow x' = 2i \text{ ou } x'' = -2i$

$$S = \{2i; -2i\}$$

$$c) x^4 - 1 = 0$$

Para resolvermos a equação conforme uma equação de 2º grau, fatoramos a equação:  $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = 0$

$$\text{Portanto, temos: } x^2 + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 1 = 0$$

$$\text{Daí: } x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Logo: } S = \{i, -i, 1, -1\}$$

d) Como fizemos no exercício anterior, vamos fatorar a equação:

$$x^4 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2 + 3) \cdot (x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Então: } x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} i$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Portanto: } S = \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

2. Calcular: a)  $(-3i)^2$ , b)  $(2i)^2$ , c)  $(5 + i)^2$  e d)  $(3 - 2i)^2$

$$\text{Resolução: a) } (-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (\sqrt{-1})^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

$$\text{b) } (2i)^2 = (2)^2 \cdot (i)^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$\text{c) } (5 + i)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot i + i^2 = 25 + 10i + (-1) = 24 + 10i$$

$$\text{d) } (3 - 2i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 12i + 4 \cdot (-1) = 5 - 12i$$

3. Escrever os números na forma algébrica:

$$\text{a) } -7i \quad \text{b) } \frac{5}{3} \quad \text{c) } -1 \quad \text{d) } i \quad \text{e) } 4i \quad \text{f) } \sqrt{-25} \quad \text{g) } -\sqrt{2}$$

$$\text{Resolução: a) } -7i = 0 - 7i$$

$$\text{e) } 4i = 0 + 4i$$

$$\text{b) } \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + 0i$$

$$\text{f) } \sqrt{-25} = 0 \pm 5i$$

$$\text{c) } -1 = -1 + 0i$$

$$\text{g) } -\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 0i$$

$$\text{d) } i = 0 + i$$

4. Determine  $\text{Re}(z)$  e  $\text{Im}(z)$  nos seguintes números complexos:

$$\text{a) } z = 7 - 2i$$

$$\text{c) } z = 3 + i$$

$$\text{e) } z = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } z = -i$$

$$\text{d) } z = -\sqrt{2} + 3i$$

$$\text{Resolução: a) } z = 7 - 2i \Rightarrow \text{Re}(z) = 7 \text{ e } \text{Im}(z) = -2$$

$$\text{b) } z = -i \Rightarrow \text{Re}(z) = 0 \text{ e } \text{Im}(z) = -1$$

$$\text{c) } z = 3 + i \Rightarrow \text{Re}(z) = 3 \text{ e } \text{Im}(z) = 1$$



$$d) z = -\sqrt{2} + 3i \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\sqrt{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 3$$

$$e) z = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{2}{3} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 0$$

5. Classifique os números complexos do exercício anterior em: real, imaginário ou imaginário puro.

Resolução: a)  $z = 7 - 2i \Rightarrow$  imaginário, b)  $z = -i \Rightarrow$  imaginário puro

$$c) z = -\sqrt{2} + 3i \Rightarrow \text{imaginário, d) } z = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{real}$$

6. Determinar o valor de  $x$  para que os números complexos abaixo, sejam imaginários puros: a)  $z = (x-9) + 2i$  e b)  $w = (x-1)^2 - 3i$

Resolução: Para que sejam imaginários puros, devemos ter a parte real igual a zero, então:

$$a) \operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

$$b) \operatorname{Re}(w) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$\boxed{x = 1}$$

7. Calcular o valor de  $a$  para que o número complexo abaixo seja um número real:  $z = 1 + (a-2)i$

Resolução: Devemos ter  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , portanto:  $a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

### ⇒ Exercícios propostos:

1. Determine as raízes das equações abaixo no conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos:

$$a) 2x^2 + 10 = 0$$

$$c) x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$e) x^4 - 100 = 0$$

$$b) x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$d) x^4 - 25 = 0$$

$$2. \text{ Calcular: a) } (-7i)^2, \text{ b) } (3i)^2, \text{ c) } (1-i)^2 \text{ e d) } \left(\frac{2}{3} + 3i\right)^2$$

3. Escrever os números abaixo na forma algébrica:

$$a) 3,5; \text{ b) } -2i; \text{ c) } -10; \text{ d) } 6i; \text{ e) } -i; \text{ f) } \sqrt{-100}; \text{ g) } \sqrt{-4} \text{ e h) } -\sqrt{3}.$$

4. Determine  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$  nos seguintes números complexos:

$$a) z = 5 - 3i$$

$$d) z = \sqrt{3} + 3i$$

$$g) z = 5$$

$$b) z = i$$

$$e) z = -\sqrt{2} + i$$

$$h) z = \frac{3}{7}$$

$$c) z = 5 + 2i$$

$$f) z = -\sqrt{7} - i$$

5. Classifique os números complexos do exercício anterior em: real, imaginário ou imaginário puro.

6. Determine o valor de  $x$  para que os números complexos abaixo sejam imaginários puros: a)  $z = (x+7) - 3i$  e b)  $w = (x-3)^2 + 5i$

7. Calcule o valor de  $y$  para que o número complexo abaixo seja um número real:  $z = 3 + (y - 5)i$

8. (UFSC) Seja o complexo  $z = i - 1$ . O valor de  $f(z) = 2z^2 + 4z + 5$  é:

9. (UFPA) O número complexo  $z = x + (x^2 - 4)i$  é real se, e somente se:

a)  $x = 0$  b)  $x \neq 0$  c)  $x = \pm 2$  d)  $x \neq \pm 2$  e)  $x \neq 0$  e  $x \neq \pm 2$

**6. As potências de  $i$**  Vamos determinar os valores de  $i^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . Temos:

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1 & i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i & i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \\ & i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1 \\ & \vdots \end{array}$$

Observamos pelos resultados acima que as potências sucessivas de  $i$ , vão-se repetindo de quatro em quatro unidades, na seguinte sequência: 1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ .

Assim:

$$\begin{array}{l} i^0 = i^4 = i^8 = \dots = i^{4n} = 1 \\ i^1 = i^5 = i^9 = \dots = i^{4n+1} = i \\ i^2 = i^6 = i^{10} = \dots = i^{4n+2} = -1 \\ i^3 = i^7 = i^{11} = \dots = i^{4n+3} = -i \end{array}$$

Logo, para calcularmos o resultado de  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , basta dividir o expoente por 4 e considerar o valor do resto dessa divisão, dado pela tabela abaixo:

resto	$i^r$	resultado da potência
0	$i^0$	1
1	$i^1$	$i$
2	$i^2$	-1
3	$i^3$	- $i$

Sendo  $r$  o resto da divisão de  $n$  por 4, mostremos que:  $i^n = i^r$

Temos: 
$$\begin{array}{r} n \overline{) 4} \\ r \quad q \end{array}$$

Pela relação da divisão, podemos escrever:  $n = 4q + r$

Pela igualdade de potências, podemos escrever:  $i^n = i^{4q+r}$

Pelas regras de potenciação, temos:  $i^n = i^{4q} \cdot i^r$  e  $i^n = (i^4)^q \cdot i^r$

Como  $i^4 = 1$ , então  $i^n = 1^q \cdot i^r$

De onde:  $i^n = i^r$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular: a)  $i^{1000}$ , b)  $i^{235}$  e c)  $i^9 - i^{20} + i^{16} - i^{134}$

*Resolução:* a)  $i^{1000}$ . Dividindo-se 1 000 por 4, encontramos resto igual a zero, portanto:  $i^{1000} = i^0 = 1$

b)  $i^{235}$ . Dividindo-se 235 por 4, encontramos resto igual a 3, logo:  $i^{235} = i^3 = -i$

c)  $i^9 - i^{20} + i^{16} - i^{134}$ . Dividindo-se os expoentes por 4, temos restos, respectivamente: 1, 0, 0 e 2. Logo:

$$i - 1 + 1 - (-1) = i + 1$$

2. Determinar a soma  $S = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{306}$

*Resolução:* Sabemos que:  $i^1 = i$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$  e  $i^4 = 1$  e que esses valores se repetem periodicamente.

Como  $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$ , temos:

$$S = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4}_0 + \underbrace{i^5 + \dots + i^8}_0 + \underbrace{i^9 + \dots + i^{12}}_0 + \dots + i^{306}$$

Então, o problema se resume em encontrar o resto da divisão de 306 por 4, pois a soma das potências cujos expoentes são múltiplos de 4, é zero.

$$\begin{array}{r} \text{Logo: } 306 \overline{) 4} \\ 26 \quad 76 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \boxed{S = i^{306} = i^2 \Rightarrow S = -1}$$

(2)

### Exercícios propostos:

10. Calcular: a)  $i^{59}$ , b)  $i^{25}$ , c)  $i^{520}$  e d)  $i^{1402}$

11. Calcular o valor da expressão:  $i^{47} + i^{12} - i^4 - i^{22}$

12. (UFES) Se  $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ , onde  $i^2 = -1$ , então o número de elementos distintos do conjunto  $\{w, w^2, w^3, \dots, w^n, \dots\}$  é:

a) 4   b) 8   c) 10   d) 12   e) infinito

13. (Mack-SP) O valor da expressão  $y = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{1001}$  é:

a) 1   b) i   c) -i   d) -1   e) 1 + i

**7. Igualdade de números complexos** Uma diferença importante entre números complexos e números reais é que os números complexos não são comparáveis, isto é, não é definida, para o campo dos

números complexos, a *relação de ordem*. Assim, não existe um complexo maior ou menor do que outro.

Podemos, no entanto, classificá-los em *iguais* ou *diferentes*.

Assim, dados dois números complexos:  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , com  $a, b, c$  e  $d$  reais, temos que  $z$  e  $w$  são iguais quando suas partes reais e imaginárias são iguais, ou seja:

$$z = w \Rightarrow a + bi = c + di \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular o valor de  $a$  e  $b$  tal que os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = -3 + 5i$  sejam iguais.

Resolução: Se  $z = w$ , então  $a + bi = -3 + 5i$ , daí:  $\boxed{a = -3 \text{ e } b = 5}$

2. Determinar  $a$  e  $b$  na igualdade:  $(a-2) + (b+3)i = 4 + 7i$

Resolução: Pela igualdade, podemos escrever:

$$a - 2 = 4 \Rightarrow a = 6 \text{ e } b + 3 = 7 \Rightarrow b = 4$$

$$\text{Logo: } \boxed{a = 6 \text{ e } b = 4}$$

3. Seja o complexo  $z = (3a + b) + (a + 2b)i$ . Calcular os valores reais de  $a$  e  $b$  de modo que  $z = -2 + 6i$ .

Resolução:  $(3a + b) + (a + 2b)i = -2 + 6i$

$$(3a + b) + (a + 2b)i = -2 + 6i \begin{cases} 3a + b = -2 \text{ (I)} \\ a + 2b = 6 \text{ (II)} \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação (I) por  $(-2)$ , e somando-a com (II), temos:  $-6a - 2b = 4 \Rightarrow a + 2b = 6 \Rightarrow -5a = 10 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$$\text{Logo: } b = \frac{6 + 2}{2} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

4. Com os dados do problema anterior, calcule os valores de  $a$  e  $b$  de modo que: a)  $z = 15i$  e b)  $z = 5$

Resolução: a)  $(3a + b) + (a + 2b)i = 15i$ , então:  $\begin{cases} 3a + b = 0 \text{ (I)} \\ a + 2b = 15 \text{ (II)} \end{cases}$

Da equação (I) concluímos:  $b = -3a$

Substituindo este valor em (II), temos:  $a + 2 \cdot (-3a) = 15$

$$a - 6a = 15 \Rightarrow -5a = 15 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

$$\text{Logo: } b = (-3) \cdot (-3) \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

$$b) (3a + b) + (a + 2b)i = 5, \text{ então: } \begin{cases} 3a + b = 5 \text{ (I)} \\ a + 2b = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{De (I), temos: } \boxed{a = -2b}$$

$$\text{Substituindo-se em (II): } 3 \cdot (-2b) + b = 5$$

$$-6b + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{Logo: } a = -2 \cdot (-1) \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

5. Sendo  $z = (a^2 - 2) + (3 + b)i$  e  $w = 7 + 5i$ , determine os valores reais de  $a$  e  $b$  de modo que  $z$  seja igual a  $w$ .

$$\text{Resolução: } z = w \Rightarrow (a^2 - 2) + (3 + b)i = 7 + 5i$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} a^2 - 2 = 7 \text{ (I)} \\ 3 + b = 5 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{Calculando-se o valor de } a \text{ na equação (I), temos: } a^2 = 7 + 2$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$\text{E o valor de } b \text{ na equação (II), temos: } 3 + b = 5$$

$$b = 5 - 3 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

**8. Conjugado de um número complexo** Definimos como complexo conjugado de  $z = a + bi$ , o número complexo  $\bar{z} = \overline{a + bi}$ . Assim:

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

É interessante notar que, multiplicando-se um número complexo pelo seu conjugado, teremos partes reais iguais, mas partes imaginárias simétricas.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2, \text{ mas } i^2 = -1, \text{ então:}$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2(-1)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Note que o produto  $z \cdot \bar{z}$ , é a soma de dois números reais ( $a$  e  $b$ ), portanto, o produto  $z \cdot \bar{z}$  é um número real e recebe a denominação de *Norma de  $z$* .

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Seja  $z = 3 + 4i$ . Obter  $\bar{z}$ .

$$\text{Resolução: } z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \overline{3 + 4i} \therefore \boxed{\bar{z} = 3 - 4i}$$

2. Seja  $w = 2 - 7i$ . Obter  $\bar{w}$

$$\text{Resolução: } w = 2 - 7i \Rightarrow \bar{w} = \overline{2 - 7i} \therefore \boxed{\bar{w} = 2 + 7i}$$

3. Seja  $k = -6 - 3i$ . Calcular  $\bar{k}$ .

Resolução:  $k = -6 - 3i \Rightarrow \bar{k} = \overline{-6 - 3i} \therefore \boxed{\bar{k} = -6 + 3i}$

Resolução:  $z = 2i \Rightarrow \bar{z} = \overline{2i} \therefore \boxed{\bar{z} = -2i}$

$w = -3i \Rightarrow \bar{w} = \overline{-3i} \therefore \boxed{\bar{w} = 3i}$

### Exercício proposto:

14. Obter o conjugado de:

a)  $z = i$ , b)  $z = 1 - 2i$ , c)  $z = (1 + i) \cdot (2 - i)$  e d)  $z = (2 + 3i) - (4 - i)$

**9. Operações com números complexos** As operações com números complexos são feitas de forma análoga aos números reais, ou com expressões do tipo  $a + bx$ .

**a) Adição:** Para somarmos dois ou mais números complexos, basta somarmos suas partes reais e imaginárias separadamente. Ex.:

$z = a + bi$  e  $w = c + di$

$z + w = (a + bi) + (c + di) = \therefore \boxed{z + w = (a + c) + (b + d)i}$

### Exercícios resolvidos:

1. Sendo  $z = 3 + 2i$  e  $w = -5 + 4i$ , efetuar  $z + w$ .

Resolução:  $z + w = (3 + 2i) + (-5 + 4i)$

2. Calcular:  $(2 - 5i) + (-1 + 7i) + (3 + 2i) =$

Resolução:  $(2 - 5i) + (-1 + 7i) + (3 + 2i) = (2 - 1 + 3) + (-5 + 7 + 2)i$   
 $\therefore \boxed{(2 - 5i) + (-1 + 7i) + (3 + 2i) = 4 + 4i}$

3. Dados:  $z = 7i$ ;  $w = 2 - 3i$  e  $k = 5$ , calcular:  $z + w + k$ .

Resolução:  $z + w + k = (0 + 7i) + (2 - 3i) + (5 + 0i) =$   
 $\boxed{= (0 + 2 + 5) + (7 - 3 + 0)i = 7 + 4i}$

**b) Subtração:** O processo de subtração de números complexos é análogo à soma, portanto:  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , então

$z - w = (a + bi) - (c + di) = \therefore \boxed{z - w = (a - c) + (b - d)i}$

### Exercícios resolvidos:

1. Sendo  $z = 9 - i$  e  $w = -3 + 8i$ , calcular  $z - w$ .

Resolução:  $z - w = (9 - i) - (-3 + 8i) = [9 - (-3)] + (-1 - 8)i = \boxed{12 - 9i}$

2. Calcular:  $(3 + 2i) + (-5 - 7i) - (4 - 2i)$

Resolução:  $(3 + 2i) + (-5 - 7i) - (4 - 2i) = (3 - 5 - 4) + [2 - 7 - (-2)]i =$   
 $\boxed{= -6 - 3i}$

3. Com os dados do primeiro problema, calcular  $w - z$ .

Resolução:  $w - z = (-3 + 8i) - (9 - i) = (-3 - 9) + [8 - (-1)]i =$   
 $\boxed{= -12 + 9i}$

c) **Multiplicação:** Usaremos a regra da multiplicação de binômios para multiplicar dois números complexos, lembrando que  $i^2 = -1$ . Sendo  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , dois números complexos, temos que:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z \cdot w = ac + adi + bci - bd$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

### Exercícios resolvidos:

1. Dados  $z = 3 + 4i$  e  $w = 2 + 5i$ , efetuar  $z \cdot w$

*Resolução:*  $z \cdot w = (3 + 4i) \cdot (2 + 5i) = 6 + 15i + 8i + 20i^2$

$$z \cdot w = 6 + 23i - 20$$

$$z \cdot w = -14 + 23i$$

2. Dados  $z = 7i$  e  $w = 2 - 3i$ , calcular  $z \cdot w$

*Resolução:*  $z \cdot w = 7i \cdot (2 - 3i) \Rightarrow z \cdot w = 14i - 21i^2$

$$z \cdot w = 21 + 14i$$

3. Verificar se  $1 + i$  e  $1 - i$  são raízes da equação  $x^2 - 2x + 2 = 0$

*Resolução:* Substituindo  $x$  por  $1 + i$  no primeiro membro da equação, temos:  $(1 + i)^2 - 2 \cdot (1 + i) + 2 = 0$

$$1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 0 \Rightarrow 1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2 = 0$$

$0 = 0$ , logo  $1 + i$  é uma raiz dessa equação.

Substituindo  $x$  por  $1 - i$  no primeiro membro da equação, vamos verificar a segunda raiz:  $(1 - i)^2 - 2 \cdot (1 - i) + 2 = 0$

$$1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2 = 0 \Rightarrow 1 + 2i - 1 - 2 + 2i + 2 = 0$$

$0 = 0$ , de onde  $1 - i$  é outra raiz dessa equação.

### Exercícios propostos:

15. Calcular os valores reais de  $a$  e  $b$  para que os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = -\frac{2}{5} + 3i$  sejam iguais.

16. Dado o complexo  $z = (2a - b) + (a + 5b)i$ , determine os valores dos reais  $a$  e  $b$  de modo que: a)  $z = -1 + 3i$ , b)  $z = -22i$  e c)  $z = 18$

17. Sendo  $z = (a + 3) + (3 - b^2)i$  e  $w = 4 - 13i$ , determinar os valores dos números reais  $a$  e  $b$  tal que  $z = w$ .

18. Dados  $z = 2 - 3i$  e  $w = -3 + 5i$ , obtenha:

a)  $z + w$ , b)  $z - w$ , c)  $w - z$ , d)  $z \cdot w$ , e)  $z^2$  e f)  $w^2$

19. Sendo  $z = 2 - i$ ;  $w = 2 + i$  e  $k = 3 - 2i$ , calcular:

a)  $z + w - k$ , b)  $z \cdot w \cdot k$ , c)  $(z - w) \cdot k$  e d)  $z^2 - w + k$

20. (UF Pelotas) A equação do 2º grau cujas raízes são os números complexos  $i$  e  $1 - i$  é:

$$a) x^2 - x + 1 + i = 0 \quad c) x^2 - x - 1 + i = 0 \quad e) x^2 - x + 1 - i = 0$$

$$b) x^2 + x + 1 + i = 0 \quad d) x^2 + x - 1 + i = 0$$

**21.** (Cesem) O produto  $(5 + 7i) \cdot (3 - 2i)$  vale:

$$a) 1 + 11i \quad b) 1 + 31i \quad c) 29 + 11i \quad d) 29 - 11i \quad e) 29 + 31i$$

**22.** UFGO) O valor de  $x$  para o qual o produto  $(4 + 2i) \cdot (x - 8i)$  é um número real é: a) 32 b) 16 c) 8 d) 4 e) 2

**d) Divisão:** A divisão de dois números complexos  $z$  por  $w$ , com  $w \neq 0$ , é obtido utilizando a representação fracionária e, em seguida, racionalizando essa fração, através do conceito de conjugado de  $w$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Sejam:  $z = 4 + 5i$  e  $w = 2 + 3i$ . Calcular  $\frac{z}{w}$ .

*Resolução:* Temos:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} \Rightarrow \frac{4+5i}{2+3i} = \frac{(4+5i) \cdot (2-3i)}{(2+3i) \cdot (2-3i)} = \\ &= \frac{8-12i+10i-15i^2}{2^2-3^2i^2} = \frac{8-12i+10i+15}{4-9i^2} = \\ &= \frac{23-2i}{4+9} = \frac{23-2i}{13} \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \frac{z}{w} = \frac{23}{13} - \frac{2i}{13}$$

2. Dados  $z = 3 + i$  e  $w = 2 - 7i$ , efetue  $\frac{z}{w}$ .

*Resolução:* Temos:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} \Rightarrow \frac{3+i}{2-7i} = \frac{(3+i) \cdot (2+7i)}{(2-7i) \cdot (2+7i)} = \\ &= \frac{6+21i+2i+7i^2}{2^2-7^2i^2} = \frac{6+21i+2i-7}{4-49i^2} = \\ &= \frac{-1+23i}{4+49} = \frac{-1+23i}{53} \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \frac{z}{w} = \frac{-1}{53} + \frac{23i}{53}$$



3. Sendo  $z = 4 + 3i$  e  $w = 2i$ , obter  $\frac{z}{w}$ .

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} \Rightarrow \frac{4 + 3i}{2i} = \frac{(4 + 3i) \cdot (-2i)}{(2i) \cdot (-2i)} = \\ &= \frac{-8i + 6i^2}{-4i^2} = \frac{-8i + 6}{4} = \\ &= \frac{\cancel{2}(-4i + 3)}{\cancel{4}} = \frac{-4i + 3}{2} = \frac{3 - 4i}{2}\end{aligned}$$

Logo:  $\boxed{\frac{z}{w} = \frac{3}{2} - \frac{4i}{2} = \frac{3}{2} - 2i}$

**10. Raízes quadradas complexas** Um número complexo  $z$  ( $z \neq 0$ ) apresenta sempre duas raízes complexas.

Para entendermos melhor o processo, tomemos como exemplo o número complexo  $z = 16i$ . Considerando que o número complexo  $w$  represente as raízes de  $z$ , então  $w = \sqrt{z}$  ou  $w^2 = z$ .

Se  $w = x + yi$  ( $x, y$ : reais), então:  $w^2 = z$

$$(x + yi)^2 = 16i \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 16i \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 16i$$

Pela igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0(I) \\ 2xy = 16(II) \end{cases}$$

Isolando  $y$  em (II), temos:  $y = \frac{8}{x}$  (III)

Substituindo (III) em (I):

$$x^2 - \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{64}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 64 = 0$$

Fatorando-se esse valor do 1º membro da equação biquadrada, temos:

$$(x^2 + 8) \cdot (x^2 - 8) = 0$$

$$x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow \pm 2\sqrt{2}$$

Substituindo-se  $x'$  e  $x''$  em (III), obteremos  $y'$  e  $y''$ , assim:

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{2} \Rightarrow y' = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ x'' = -2\sqrt{2} \Rightarrow y'' = \frac{8}{-2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Substituindo os valores de  $x$  e  $y$  em  $w$ , temos, finalmente, as raízes complexas de  $z$ :

$$w = x + yi$$

$$w' = x' + y'i \Rightarrow w' = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$w'' = x'' + y''i \Rightarrow w'' = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

Logo:  $w' = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$  e  $w'' = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$  são raízes quadradas de  $z = 16i$ .

### Exercício resolvido:

1. Calcular as raízes quadradas complexas de  $z = 3 - 4i$

Resolução: Temos:  $w^2 = z$ . Seja  $w = x + yi$  ( $x, y$ : reais), então:

$$(x + yi)^2 = 3 - 4i \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \text{ (I)} \\ 2xy = -4 \text{ (II)} \end{cases}$$

Isolando o valor de  $y$  na equação (II), temos:  $x \cdot y = -\frac{4}{2}$

$$y = -\frac{2}{x} \text{ (III)}$$

Substituindo esse valor na equação (I), obtemos:

$$x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\text{Fazendo } k = x^2, \text{ teremos: } k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k' = 4 \\ k'' = -1 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\text{Como } k = x^2, \text{ então: } \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{ou} \\ x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Substituindo  $x = \pm 2$  na equação (III), temos:

$$x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{-2}{2} \Rightarrow y' = -1$$

$$x'' = -2 \Rightarrow y'' = \frac{-2}{-2} \Rightarrow y'' = 1$$

Portanto,  $w' = 2 - i$  e  $w'' = -2 + i$  são raízes quadradas de  $z = 3 - 4i$

**11. Equações de 1º e 2º graus em  $\mathbb{R}$**  Resolvemos as equações em  $\mathbb{C}$ , de maneira análoga a em  $\mathbb{R}$ . Observe os *exercícios resolvidos*.

### Exercícios resolvidos:

1. Resolver as seguintes equações em  $\mathbb{C}$ :

a)  $5 + i + 2z = 3i + z$

c)  $(3 - 2i) \cdot z = 13$

b)  $i \cdot z = 1$

d)  $z^2 + 2z + 10 = 0$

Resolução: a)  $5 + i + 2z = 3i + z \Rightarrow 2z - z = 3i - i - 5 \Rightarrow z = 2i - 5$

$$S = \{2i - 5\}$$

$$b) i \cdot z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{i} \Rightarrow z = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1}$$

$$z = -i \text{ ou } z = 0 - i \Rightarrow S = \{-i\}$$

c)  $(3 - 2i) \cdot z = 13$

$$z = \frac{13}{3 - 2i} \Rightarrow z = \frac{13 \cdot (3 + 2i)}{(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)} =$$

$$\frac{39 + 26i}{9 + 4} = \frac{39 + 26i}{13} = \frac{39}{13} + \frac{26i}{13}$$

$$z = 3 + 2i \Rightarrow S = \{3 + 2i\}$$

d) Embora  $z^2 + 2z + 10 = 0$  seja uma equação com números complexos, é uma equação de 2º grau e, portanto, utilizamos a fórmula de Bhaskara:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2a} =$$

$$z = \frac{-2 \pm 6i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z' = -1 + 3i \\ z'' = -1 - 3i \end{cases} \text{ ou}$$

Logo:  $S = \{-1 + 3i; -1 - 3i\}$

2. Dado  $z = 1 - 2i$ , achar o inverso de  $z$ .

Resolução: O inverso de  $z$  é dado por  $z^{-1} = \frac{1}{z}$

$$\text{Logo: } z^{-1} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1 \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{1 + 2i}{1^2 - 2^2 i^2}$$

$$z^{-1} = \frac{1 + 2i}{1 + 4} = \frac{1 + 2i}{5} \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5}}$$

3. Determine  $z$  de modo que:  $2z + \bar{z} = 2 + 5i$

Resolução: Consideremos  $z = a + bi$  e façamos a substituição na equação:  $2 \cdot (a + bi) + (a - bi) = 2 + 5i$

$$2a + 2bi + a - bi = 2 + 5i \Rightarrow 3a + bi = 2 + 5i$$

$$\text{Logo: } 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \text{ e } b = 5$$

$$z = \frac{2}{3} + 5i \Rightarrow \boxed{S = \frac{2}{3} + 5i}$$

4. Determine o valor de  $x$  para que  $z = \frac{3 + xi}{1 - i}$  seja real.

*Resolução:* Racionalizando  $z$ , temos:

$$z = \frac{(3 + xi) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{3 + 3i + xi + xi^2}{1^2 - i^2} = \frac{3 + 3i + xi - x}{1 + 1}$$

$$z = \frac{(3 - x) + (3 + x)i}{2} = \frac{3 - x}{2} + \frac{(3 + x)i}{2}$$

Para que  $z$  seja um número real, devemos ter  $b = 0$ , então:

$$\frac{3 + x}{2} = 0 \Rightarrow 3 + x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

De fato, se  $x = -3$ , então:

$$z = \frac{3 + xi}{1 - i} = \frac{3 - 3i}{1 - i} = \frac{3(1 - i)}{(1 - i)} = 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Logo: } \boxed{z = 3}$$

5. Determinar o valor de  $x$  para que o complexo  $z = \frac{5x + 2i}{2 + 5i}$ , seja um imaginário puro:

*Resolução:*

$$\begin{aligned} \text{Temos: } z &= \frac{(5x + 2i) \cdot (2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{10x + 4i - 25xi + 10}{2^2 - 5^2 i^2} = \\ &= \frac{(10x + 10) + (4 - 25x)i}{4 + 25} = \frac{10x + 10}{29} + \frac{(4 - 25x)i}{29} \end{aligned}$$

Para que  $z$  seja um imaginário puro, devemos ter:

$$a = 0 \Rightarrow \frac{10x + 10}{29} = 0 \Rightarrow 10x + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\text{De fato, se } x = -1, \text{ então } z = \frac{5 \cdot (-1) + 2i}{2 + 5i} = \frac{-5 + 2i}{2 + 5i} =$$

$$= \frac{(-5 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{-10 + 29i + 10}{2^2 - 5^2 \cdot i^2} = \frac{29i}{29} = i$$

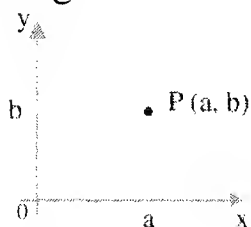
$$z = i \text{ (imaginário puro). Logo } \boxed{x = -1}$$

### Exercícios propostos:

23. Calcular as raízes quadradas complexas do complexo  $z = -8 - 6i$
24. (UFSE) Uma das raízes quadradas do número complexo  $4i$  é:  
a)  $-2i$  b)  $\sqrt{2} + i$  c)  $-\sqrt{2} - i$  d)  $\sqrt{2}(1 + i)$  e)  $\sqrt{2}(1 - i)$
25. Calcular os quocientes de: a)  $\frac{1+i}{2-i}$  e b)  $\frac{7+6i}{3-i}$
26. Calcule o valor de  $x$  para que o quociente  $\frac{x-i}{1-3i}$  seja um imaginário puro.
27. Resolver, no conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos, as equações abaixo: a)  $3z - 2i + 1 = 2z + i$ , b)  $(2 - 2i) \cdot z = 8$  e c)  $z^2 - iz + 2 = 0$
28. (UFRS) A soma das partes real e imaginária de  $\frac{i}{1-i}$  é:  
a)  $-2$  c)  $0$  e)  $2$   
b)  $-1$  d)  $1$
29. (UFMS) Determine  $x \in \mathbb{R}$ , tal que o quociente  $\frac{5+(x-8)i}{5-i}$  seja também um número real.
30. (UFPA) O conjugado do quadrado do número complexo  $z = \frac{2+3i}{-5-i}$  é: a)  $i$  b)  $-i$  c)  $\frac{i}{2}$  d)  $-\frac{i}{2}$  e)  $\frac{1-i}{2}$
31. (UFPA) Se  $x = 1 - ai$  e  $\bar{y} = 2 - 3i$ , o valor de  $a$ , para que  $\frac{\bar{x}}{y}$  seja um número real é: a)  $0$  b)  $\frac{1}{13}$  c)  $\frac{5}{13}$  d)  $\frac{1}{2}$  e)  $\frac{3}{2}$

**12. Representação gráfica – plano de Argand-Gauss** Quando representamos um número complexo  $z$ , através de um par ordenado  $(a, b)$  no plano cartesiano, esse plano passa a ser chamado de plano de “Argand-Gauss”, devido aos estudos feitos pelos matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Assim,  $z = a + bi$  está associado ao ponto  $P(a, b)$ , sendo a representação da parte real de  $z$ :  $\text{Re}(z)$  – no eixo das abscissas e a parte imaginária de  $z$ :  $\text{Im}(z)$  no eixo das ordenadas, temos:



onde o eixo  $Ox$  é o eixo real

o eixo  $Oy$  é o eixo imaginário

$xOy$  é o plano de Argand-Gauss

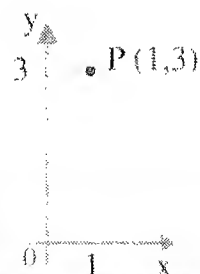
$P$  é a imagem de  $z$ , também chamado de *afixo* de  $z$ .

### Exercício resolvido:

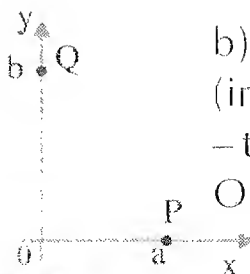
1. Representar o número complexo  $z = 1 + 3i$  no plano de Argand-Gauss.

**Resolução:**  $z = 1 + 3i$  pode ser representado pelo par  $(1, 3)$  ao qual associaremos o ponto  $P(1, 3)$ , chamado de afixo de  $z$ .

Então, note que:



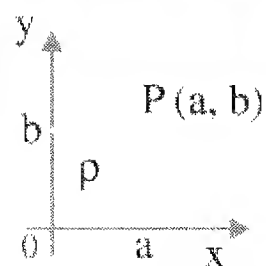
a)  $z = a + 0i$  (complexos reais) – possuem afixo no eixo Ox  $[P(a, 0)]$ .



b)  $z = 0 + bi$ ,  $b \neq 0$  (imaginários puros) – têm afixo no eixo Oy  $[Q(0, b)]$ .

### 13. Módulo de um número complexo

Consideremos o complexo  $z = a + bi$ , representado pelo ponto  $P(a, b)$ , indicado no gráfico abaixo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Portanto, podemos concluir que o módulo de  $z$  é a distância  $\rho$  de  $P$  à origem dos eixos. O módulo de  $z$  é indicado por  $|z|$ ,  $|a + bi|$  ou  $\rho$ .

$$|z| = |a + bi| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### Exercícios resolvidos:

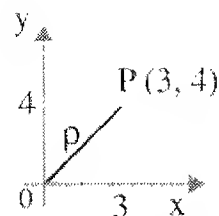
1. Determinar o módulo do complexo  $z = 3 + 4i$  e fazer a sua representação geométrica no plano de Argand-Gauss.

**Resolução:** a)  $z = 3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boxed{\rho = 5}$$

Logo, o módulo do complexo  $z = 3 + 4i$  é  $\rho = 5$ .

b) Representação geométrica:



2. Calcular os módulos dos complexos abaixo e fazer as suas representações geométricas no plano de Argand-Gauss.

a)  $z = 6i$ , b)  $z = 4$ , c)  $z = -3i$  e d)  $z = 12 - 5i$

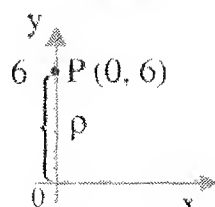
Resolução: a)  $z = 6i$ , logo:  $a = 0$ ;

$$b = 6 \Rightarrow P(0, 6)$$

$$\text{Então: } |z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{0^2 + 36}$$

$$\boxed{\rho = 6}$$

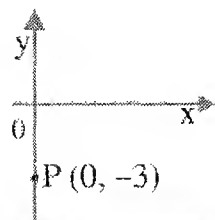


$$c) z = -3i \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0 + 9}$$

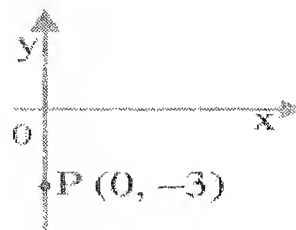
$$\boxed{\rho = 3}$$



$$b) z = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 0^2} \Rightarrow \boxed{\rho = 4}$$

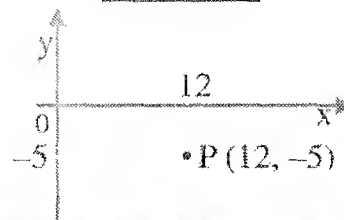


$$d) z = 12 - 5i \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25}$$

$$\boxed{\rho = 13}$$



**14. Propriedades do módulo dos números complexos** As propriedades do módulo de um número complexo são decorrentes do módulo de um número real. Dados  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , temos:

a) o módulo de um número complexo é um *número real*, não negativo, isto é:  $|z| \geq 0$

b) o produto de dois ou mais números complexos é igual ao produto dos módulos dos complexos fatores, ou seja:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

c) os módulos de um número complexo e de seu conjugado são iguais:  $|z| = |\bar{z}|$

d) o módulo do quociente de dois números complexos é igual ao quociente do módulo do complexo *dividendo* pelo módulo do

complexo *divisor*. Assim:  $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$ , com  $w \neq 0$

**Exercício resolvido:**

1. Dados os complexos  $z = 3 + 2i$  e  $w = 2 - 5i$ , provar as propriedades do módulo dos complexos.

Resolução: a) "o módulo de um número complexo é um número real não negativo já que todo número real elevado ao quadrado resulta em um número positivo.

b) "o produto de dois ou mais números complexos é igual ao produto dos módulos dos complexos fatores". Temos:

$$\begin{aligned} |(3 + 2i) \cdot (2 - 5i)| &= |3 + 2i| \cdot |2 - 5i| \\ |6 - 11i - 10i^2| &= \left(\sqrt{3^2 + 2^2}\right) \cdot \left(\sqrt{2^2 + (-5)^2}\right) \\ |6 + 10 - 11i| &= \left(\sqrt{9 + 4}\right) \cdot \left(\sqrt{4 + 25}\right) \\ |16 - 11i| &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{16^2 + (-11)^2} = \sqrt{13 \cdot 29} \\ \sqrt{256 + 121} &= \sqrt{377} \Rightarrow \boxed{\sqrt{377} = \sqrt{377}} \end{aligned}$$

c) "os módulos de um número complexo e de seu conjugado são iguais", ou seja:  $|z| = |\bar{z}|$

$$|3 + 2i| = |3 - 2i|$$

$$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} \Rightarrow \sqrt{9 + 4} = \sqrt{9 + 4} \Rightarrow \boxed{\sqrt{13} = \sqrt{13}}$$

d) "o módulo do quociente de dois números complexos é igual ao quociente do módulo do complexo dividendo pelo módulo do complexo divisor". Assim:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{w} \right| &= \left| \frac{3 + 2i}{2 - 5i} \right| = \left| \frac{(3 + 2i) \cdot (2 + 5i)}{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} \right| = \\ &= \left| \frac{6 + 15i + 4i + 10i^2}{2^2 - 5^2 \cdot i^2} \right| = \left| \frac{6 + 19i - 10}{4 - 25i^2} \right| = \left| \frac{-4 + 19i}{29} \right| = \sqrt{\left(\frac{-4}{29}\right)^2 + \left(\frac{19}{29}\right)^2} = \quad \text{e} \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \left| \frac{3 + 2i}{2 - 5i} \right| = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{9 + 4}}{\sqrt{4 + 25}} = \\ &= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{29^2}} = \frac{\sqrt{377}}{29} \quad \text{(II)} \\ &= \sqrt{\frac{16 + 361}{29^2}} = \sqrt{\frac{377}{29^2}} = \frac{\sqrt{377}}{29} \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

Como (I) = (II), então:  $\boxed{\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}}$



### Exercícios propostos:

33. Determine o módulo dos números complexos abaixo e faça a representação geométrica deles.

a)  $z = 4 - i$ , b)  $z = \sqrt{2} + i$ , c)  $z = -3$ , d)  $z = 11i$  e e)  $z = 1 + \sqrt{3}i$

34. (UFSC) Dado o complexo  $z = a + bi$ . A soma de  $z$  com o seu conjugado é 18 e o produto de ambos é 145. Determine o módulo de  $a \cdot b$ .

35. (UFPA) Se  $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 2-3i & 2+3i \end{bmatrix}$ , então  $|\det A|$  é:

a) 64 b)  $\sqrt{50}$  c) 36 d) 13 e) 8

36. (UFSC) Seja  $z = i(a + 3i)$ . Se  $|z| = 5$ , então o valor positivo de  $a$  é:

37. (UFRS) A razão entre o módulo de um número complexo não nulo e o módulo do seu conjugado é: a)  $-2$  b)  $-1$  c)  $\frac{1}{2}$  d) 1 e) 2

38. (UFSC) Dados  $z_1 = 5 - 10i$  e  $z_2 = 2 + i$ , o valor de  $\left| \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right|$  é:

39. (UFSC) Dado:  $z = (2 + i) \cdot \left[ \frac{6 + \sqrt{123}}{10} + \left( \frac{2\sqrt{123} - 3}{10} \right)i \right]$ , determine o valor numérico de  $|z|^2$ .

40. (UFBA) Sendo:  $\begin{vmatrix} \overline{1-i} & i^4 & \frac{1}{2+i} \\ 0 & 5i & 1 \\ i & -i & 1 \end{vmatrix} = a + bi$ , determine  $|a| + |b|$ .

41. (UFSC) Se  $z = \frac{(10-i) \cdot i^3 + i^{50}}{(1-i)^2}$ , determine  $|z|^2$ .

42. (UFSC) Determine a soma dos números associados às afirmativas verdadeiras:

01. O valor do módulo de  $z = -3 + 4i$  é 5.

02. Todo número real é um número complexo.

04. Se  $a = \frac{1}{4}$ , então  $z = (12a - 3) + i$  é um número imaginário puro.

08.  $6 + \sqrt{2}$  é um número imaginário.

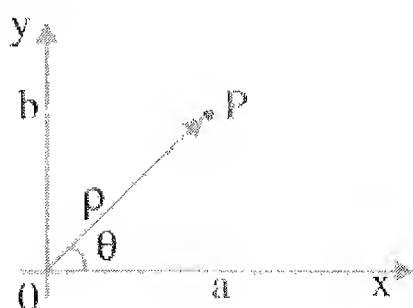
16. O valor de  $i^{10}$  é igual a  $-1$ .

32.  $i\sqrt{-1}$  é a unidade do número  $z = a + bi$ .

**43.** (UFSC) Dado  $z = -1 + i\sqrt{3}$ , determine a soma dos números associados à(s) afirmação(ões) verdadeira(s):

- 01. O conjugado de  $z$  é  $\bar{z} = -1 - i\sqrt{3}$
- 02. O quadrado de  $z$  é  $z^2 = 2(1 - \sqrt{3}i)$
- 04. O oposto de  $z$  é  $-z = 1 - i\sqrt{3}$
- 08. O produto de  $z$  pelo seu conjugado é  $z \cdot \bar{z} = 4$
- 16. O módulo de  $z$  é  $|z| = 10$
- 32. A norma de  $z$  é  $|z|^2 = 4$

**15. Argumento de um número complexo** Dado um número complexo  $z = a + bi$ , com  $z \neq 0$  e sendo  $P$  o afixo de  $z$ , denomina-se argumento do complexo  $z$  o ângulo  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ), formado por  $\overrightarrow{OP}$  com o eixo real  $Ox$ , medido no sentido anti-horário, como podemos observar no gráfico abaixo:



Notação:  $\theta = \arg(z)$ , onde  $\theta$  é o ângulo e  $\arg(z)$  é o argumento de  $z$ .

Sendo  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  (módulo de  $z$ ), e observando o triângulo destacado no gráfico, podemos escrever:

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\rho}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{\rho}$$

Através do *seno* e *cosseno* de  $\theta$ , podemos determinar o ângulo  $\theta$  usando os valores da tabela trigonométrica.

### **Exercícios resolvidos:**

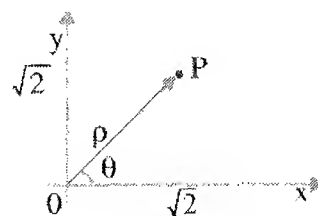
1. Determinar o argumento do complexo  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

**Resolução:**  $a = \sqrt{2}$  e  $b = \sqrt{2}$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \rho = 2$$

Cálculo de  $\theta$ :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



E o ângulo que tem cosseno e seno, cujos valores notáveis são  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , é:  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ou  $\theta = 45^\circ$

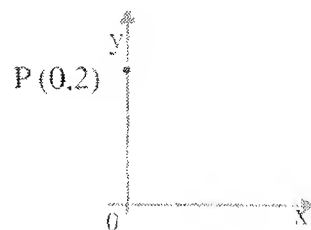
2. Calcular os argumentos dos números complexos: a)  $z = 2i$  e b)  $z = 4$

Resolução: a) Temos:  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} \Rightarrow \rho = 2$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{0}{2} = 0 \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Logo:  $\theta = 90^\circ$  ou  $\theta = \frac{\pi}{2}$



b) Temos:  $\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} \Rightarrow \rho = 4$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{4}{4} = 1 \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{0}{4} = 0 \end{cases}$$

Logo:  $\theta = 0^\circ$



## 16. Forma trigonométrica ou polar dos números complexos

Vimos que a forma algébrica de um número complexo  $z$  é  $z = a + bi$ . Agora, escreveremos o mesmo número complexo  $z$  só que, em função de seu módulo e de seu argumento. A esta forma, denominamos *forma trigonométrica* ou *polar* de  $z$ .

Como:  $\cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos \theta$

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \sin \theta$$

então, substituindo estes valores na forma algébrica  $z = a + bi$ , temos:  $z = \rho \cdot \cos \theta + \rho \cdot \sin \theta \cdot i$

$z = \rho(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ , que é a forma trigonométrica ou polar de  $z$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Obter a forma trigonométrica do número complexo  $z = \sqrt{3} + i$

Resolução: Temos:  $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$

$$\text{Então: } |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} \Rightarrow r = 2$$

Calculando o argumento de  $z$ :

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2} \text{ e } \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30^\circ \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Logo: } z = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \text{ ou } z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

2. Passar para a forma algébrica o número complexo

$$z = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

Resolução: Temos agora o problema inverso.

$$\text{Como } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ então: } z = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z = \frac{2}{2} + i \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ (forma algébrica)}$$

### Exercícios complementares:

**44.** Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:

a)  $z = -4$ , b)  $z = -3i$  e c)  $z = 1 + \sqrt{3}i$

**45.** Passar para a forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a)  $z = 1 + i$ , b)  $z = 8i$  e c)  $z = -5$

**46.** Passar para a forma algébrica os números complexos abaixo:

a)  $z = 4 \cdot (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

b)  $z = 2 \cdot (\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$

c)  $z = 2 \cdot (\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$

**47.** (PUC-RS) Se  $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  e  $w = |w| \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$  são, respectivamente, as formas trigonométricas dos números complexos  $z = 1 + \sqrt{3}i$  e  $w = -1 + \sqrt{3}i$ , então o valor de  $y - \theta$  é:

a)  $30^\circ$

d)  $90^\circ$

b)  $45^\circ$

e)  $120^\circ$

c)  $60^\circ$

# Capítulo XVII

## POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

**1. Introdução** Agora que, finalmente estudamos o último conjunto de números – o conjunto dos números complexos –, podemos dar início ao estudo dos polinômios.

### Polinômios

**1. Função polinomial** Chamamos de *função polinomial* ou *polinômio* a toda função  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por uma equação do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde:  $P(x)$  é o polinômio em  $x$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$  são números reais denominados coeficientes  
 $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$  são números naturais denominados expoentes

$x$  é um número complexo denominado variável

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$  são os termos ou monômios.

Observe as expressões algébricas:

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x + 1$  é função polinomial

$P(x) = x^2 - 2x + 1$  é função polinomial

$P(x) = 3$  é função polinomial

$P(x) = x^{-2} + 5x - 4$  não é função polinomial, pois  $-2$  não é um número natural ( $-2 \notin \mathbb{N}$ )

$P(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - 2x + 1$  não é função polinomial, pois

$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$  e o expoente  $\frac{3}{2}$  não é um número natural ( $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ )

$P(x) = x^3 + 2x^2 + \sqrt{-4}x$ , não é função polinomial, pois  $\sqrt{-4}$  não é um número real ( $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ ).

**2. Grau do polinômio** O grau do polinômio é dado pelo maior expoente de  $x$  com coeficiente diferente de zero. Assim, no polinômio:  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , se  $a_n \neq 0$  o grau do polinômio  $P(x)$  é o expoente máximo  $n$ , ou seja:

$\text{gr}(P) = n$ , onde  $\text{gr}(P)$  é o grau do polinômio

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar o grau dos polinômios abaixo:

a)  $P(x) = 6x^3 - 15x^2 - 3x + 14x^4 + 9$ ; b)  $P(x) = 2x^9 + 3x^8 - x^7$

c)  $P(x) = 12x^3 - x^2 + 4x - 10x^3 + 2x + x^4 + 1 - 2x^4$ ; d)  $P(x) = \sqrt{2}x - 1$

e)  $P(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - 1$  e f)  $P(x) = -3$

**Resolução:** a) Ordenando decrescentemente os expoentes da variável  $x$ , temos:  $P(x) = 14x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 3x + 9$ , de onde podemos concluir que:  $\text{gr}(P) = 4$

b)  $\text{gr}(P) = 9$

c) Reduzindo os termos semelhantes e ordenando decrescentemente os expoentes da variável  $x$ , temos:

$P(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x + 1$ , de onde  $\text{gr}(P) = 4$

d)  $\text{gr}(P) = 1$ ; e)  $\text{gr}(P) = 5$

f) É um polinômio constante, ou seja:  $\text{gr}(P) = 0$ , pois podemos escrever  $P(x) = -3x^0$

2. Ordene e complete o polinômio em  $x$ :  $P(x) = 5x^3 - 2x^4 + 1$

**Resolução:** ordenando:  $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 1$

completando:  $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

**3. Princípio de identidade de polinômios** Dois polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais, ou seja, os polinômios  $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  e  $B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  serão iguais se, e somente se:

$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$

Quando isso ocorre, dizemos que  $A(x)$  é idêntico a  $B(x)$ , e indicamos por  $A(x) \equiv B(x)$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Sendo os polinômios  $A(x) = 2x^3 + nx^2 - mx + 7$  e  $B(x) = px^3 + 3x^2 - 4x$

+7, estabelecer as condições para que  $A(x)$  e  $B(x)$  sejam idênticos.

*Resolução:* Os coeficientes devem ser iguais. Logo, para que  $A(x) \equiv B(x)$  devemos ter:  $p = 2, n = 3$  e  $m = 4$

2. Calcular o valor de  $m, n, p$  e  $q$  a fim de que se verifique a identidade de:  $3x^3 + 7x^2 - x + 5 \equiv (m+n)x^3 + (m-n)x^2 + (q-p)x + (3q-4)$

*Resolução:* Como os coeficientes dos termos correspondentes, por definição, devem ser iguais, temos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} m+n=3 \text{ (I)} \\ m-n=7 \text{ (II)} \end{cases} & \text{e} & \begin{cases} q-p=-1 \text{ (III)} \\ 3q-4=5 \text{ (IV)} \end{cases} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 2m=10 & & 3q=9 \\ \boxed{m=5} & & \boxed{q=3} \end{array}$$

Substituindo  $q = 3$  na equação (3), temos:

$$q-p = -1 \Rightarrow 3-p = -1 \Rightarrow \boxed{p=4}$$

Substituindo  $m = 5$  na equação (I), temos:

$$m+n=3 \Rightarrow 5+n=3 \Rightarrow \boxed{n=-2}$$

**4. Polinômio idênticamente nulo** Dizemos que um polinômio é idênticamente nulo, quando todos os seus coeficientes são iguais a zero e indicamos por  $P(x) \equiv 0$ . Ex.: Sendo  $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , temos:  $a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$

**Exercício resolvido:**

1. Determine  $a, b$  e  $c$  de modo que o polinômio  $P(x) = (2a-1)x^2 + (3a-2b)x + (4a-c)$  seja idênticamente nulo.

*Resolução:* Para que  $P(x)$  seja idênticamente nulo, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero. Então:

$$\begin{array}{l} 2a-1=0 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \\ 3a-2b=0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} - 2b=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{4}} \\ 4a-c=0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - c=0 \Rightarrow \boxed{c=2} \end{array}$$

**5. Valor numérico de um polinômio** Quando, num polinômio  $P(x)$ , substituirmos  $x$  por um número  $a$  ( $a \in \mathbb{C}$ ), obtemos um número que indicaremos por  $P(a)$ . A esse número chamamos de *valor numérico* de  $P(x)$ .

Caso o valor numérico de  $P(x)$  para  $x = a$  seja igual a zero, dizemos que  $a$  é a *raiz* ou *zero* desse polinômio.

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ é raiz de } P(x)$$

Exemplo:  $P(x) = -2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 5$ . Se  $a = -1$ , temos:

$$a = -1 \Rightarrow P(-1) = -2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5$$

$$P(-1) = -2 \cdot 1 - 1 - 3 \cdot 1 + 1 + 5$$

$$P(-1) = -2 - 1 - 3 + 1 + 5$$

$$P(-1) = -6 + 6$$

$$P(-1) = 0$$

Logo,  $a = -1$  é raiz ou zero de  $P(x)$

### Exercícios resolvidos:

1. Dado o polinômio  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ , obter o valor numérico de  $P(x)$ , para  $x = 2$ .

Resolução: Temos:  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

$$P(2) = 2 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 2 - 1 \Rightarrow P(2) = 2^4 - 3 \cdot 4 + 2 - 1$$

$$P(2) = 16 - 12 + 1 \Rightarrow \boxed{P(2) = 5}$$

Note que o valor numérico de  $P(x)$ , para  $x = 2$ , é a imagem do 2 pela função polinomial  $P(x)$ .



2. Considere o polinômio  $P(x) = -2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 5$ , calcular  $P\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot P(-2)$ .

Resolução: Temos:  $P(x) = -2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 5$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 5$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 5 \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 5$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$$

$$P(-2) = -2 \cdot (-2)^4 + (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5$$

$$P(-2) = -2 \cdot 16 + (-8) - 3 \cdot 4 + 2 + 5$$

$$P(-2) = -32 - 8 - 12 + 2 + 5$$

$$P(-2) = -45$$



$$\text{Logo: } P\left(\frac{1}{2}\right) - 3P(-2) = \frac{15}{4} - 3 \cdot (-45) = \frac{15}{4} + 135$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) - 3P(-2) = \frac{555}{4}$$

3. Sendo  $x = 3$ , raiz ou zero de  $P(x) = -x^3 + 2x^2 + yx - 6$ , obter o valor de  $y$ .

Resolução:  $P(3) = 0$

$$-3^3 + 2 \cdot (3)^2 + y \cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow -27 + 18 + 3y - 6 = 0$$

$$3y = 15 \Rightarrow y = 5$$

### ⇒ Exercícios propostos:

1. Destacar os termos e os coeficientes dos polinômios abaixo:

a)  $P(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{5}x^2 + x - 3$ ; b)  $Q(x) = 2^3x^2 - 5x + \sqrt{2}$  e

c)  $R(x) = -x^2 + x + 1$

2. Assinalar quais dos itens abaixo representam uma função polinomial:

a)  $P_1(x) = 3^{-2}x^5 + 2x^2 - 1$  e)  $P_5(x) = 2x^3 - 5x^{-2} - 2x + 3$

b)  $P_2(x) = \sqrt{5}x^3 + 7x^2 - 5\sqrt{x} + 3$  f)  $P_6(x) = 5x^2 + \sqrt{-2}x + 1$

c)  $P_3(x) = \frac{2}{5}x + \sqrt{2}$

g)  $P_7(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} - 5$

d)  $P_4(x) = 8x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$

3. Determine o grau de cada polinômio em  $x$ , abaixo:

a)  $P(x) = 7x^2 - 3x^4 + 2x^3 + x - 8$ ; b)  $Q(x) = 5x + 1$ ; c)  $R(x) = 1$ ;

d)  $S(x) = \sqrt{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ ; e)  $T(x) = x^6 + x^8$ ; f)  $U(x) = 0x^3 + 0x^2 + 2x$

g)  $V(x) = 5x^6 + 2x^3 - 2x^5 + 4x^2 - 1 - 5x^6 + 5x^5 + x^4$

h)  $Z(x) = ax^2 + bx + c$ ; i)  $W(x) = 0$

4. Ordene e complete os polinômios em  $x$ :

a)  $P(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2 - 6x^7$ , b)  $Q(x) = \frac{3}{2}x^2$  e c)  $R(x) = 2$

5. Dado  $P(x) = 0$ , explicar através de um exemplo, o porquê de não se definir o grau para um polinômio nulo.

6. Sendo  $P(x) = (a + 1)x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ , o valor de  $a$  para que o grau do polinômio  $P(x)$  seja igual a 2 é: a) 0 b) 3 c) -1 d) -3 e) 1

7. (Mack-SP) Determine  $m \in \mathbb{R}$ , para que o polinômio  $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$  seja de grau 2.

8. Dado o polinômio:  $P(x) = mx^5 + 3x^4 - 2x^3 + 9$ , determine o valor de  $m$  para que:

a)  $P(x)$  seja de 4º grau, isto é:  $\text{gr}(P) = 4$

b)  $P(x)$  seja de 5º grau, isto é:  $\text{gr}(P) = 5$

9. (UFRS) O valor de  $a$  para que  $(a^2-1)x^4 + (a^2-a-2)x^3 + ax^2 + x$  seja um polinômio do 2º grau na variável  $x$ , é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

10. Calcular  $a$  e  $b$  de modo que o polinômio  $P(x) = (ab-2)x^3 + (a^2-b^2-3)x^2 + (a+b-3)x + (2a-5b+1)$  seja identicamente nulo.

11. Dados:  $P(x) = (m-1)x^2 + (n+3)x + 10$  e  $Q(x) = mx^2 + nx + 5p$ . Calcule  $m$ ,  $n$  e  $p$  de modo que:  $P(x) + Q(x) \equiv 0$

12. (Mack-SP) Calcule os valores de  $m$ ,  $n$  e  $l$  para os quais o polinômio  $P(x) = (2m-1)x^3 - (5n-2)x^2 + (3-2l)$  seja identicamente nulo.

13. (UFSC) O polinômio  $P(x) = (a-3)x^3 + (b+2a)x^2 + (6b+c)x$  é identicamente nulo. Calcule o valor de  $2 \cdot (a+b+c)$ .

14. (Fuvest-SP) Calcule os coeficientes do polinômio do 1º grau  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $P(0) = 1+i$  e  $P(1+i) = 0$

15. (UFPA) Se o polinômio  $P(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$  tem uma raiz igual a 3 e  $P(-1) = -24$ , então  $m-n$  é um número:

a) primo c) múltiplo de 3 e) divisor de 10  
b) múltiplo de 2 d) múltiplo de 8

## 6. Operações com polinômios

a) **Adição:** Somar dois ou mais polinômios é obter um polinômio onde os coeficientes são dados pela adição dos coeficientes dos termos semelhantes. Exemplo:  $A(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$  e  $B(x) = -x^2 + 8x - 3$

Para calcularmos  $A(x) + B(x)$ , temos dois métodos:

$$5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$$

a.1) pelo dispositivo prático  $\frac{-x^2 + 8x - 3}{5x^3 + 3x^2 + 5x - 4}$

a.2) reduzindo os termos semelhantes numa só linha:

$$A(x) + B(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 - x^2 + 8x - 3$$

$$A(x) + B(x) = 5x^3 + 4x^2 - x^2 - 3x + 8x - 3 - 1$$

$$A(x) + B(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$$

b) **Subtração:** A diferença de dois polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$  é o polinômio obtido através da soma de  $A(x)$  com o oposto de  $B(x)$ .  
 $A(x) - B(x) = A(x) + [-B(x)]$

Exemplo:  $A(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$  e  $B(x) = -x^2 + 8x - 3$ . Então:

$$A(x) - B(x) = (5x^3 + 4x^2 - 3x - 1) - (-x^2 + 8x - 3)$$

$$A(x) - B(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 + x^2 - 8x + 3$$

$$A(x) - B(x) = 5x^3 + 5x^2 - 11x + 2$$

$$5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$$

Utilizando o dispositivo prático, temos: 
$$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 3 \\ 5x^3 + 5x^2 - 11x + 2 \end{array}$$

**c) Multiplicação:** Obter o produto de dois polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$  é aplicar a propriedade distributiva do polinômio  $A(x)$  em  $B(x)$ .

Exemplo:  $A(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$  e  $B(x) = -x^2 + 8x - 3$ . Então:

$$A(x) \cdot B(x) = (5x^3 + 4x^2 - 3x - 1) \cdot (-x^2 + 8x - 3)$$

$$A(x) \cdot B(x) = -5x^5 + 40x^4 - 15x^3 - 4x^4 + 32x^3 - 12x^2 + 3x^3 - 24x^2 + 9x + x^2 - 8x + 3$$

$$A(x) \cdot B(x) = -5x^5 + 36x^4 + 20x^3 - 35x^2 + x + 3$$

Podemos, também, obter o produto  $A(x) \cdot B(x)$ , usando o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 \\ -x^2 + 8x - 3 \\ \hline -5x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2 \\ +40x^4 + 32x^3 - 24x^2 - 8x \\ -15x^3 - 12x^2 + 9x + 3 \\ \hline -5x^5 + 36x^4 + 20x^3 - 35x^2 + x + 3 \end{array}$$

**d) Divisão:** A divisão de polinômios é feita pelo método da chave (também conhecido como divisão euclidiana).

$$\begin{array}{l} D \overline{) d} \\ r \quad q \end{array}$$

Sejam dois polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$ , onde  $A(x)$  é o dividendo e  $B(x)$  é o divisor, com  $B(x) \neq 0$ . Dizemos que existe um único par de polinômios  $Q(x)$  e  $R(x)$  em que  $Q(x)$  é o quociente e  $R(x)$  é o resto, tal que:  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$  e  $\text{gr}(R) < \text{gr}(B)$  ou  $R(x) \equiv 0$

E se  $R(x) \equiv 0$ , dizemos que a divisão é *exata* ou então que  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

Esquemáticamente, temos: 
$$\begin{array}{l} A(x) \overline{) B(x)} \\ R(x) \quad Q(x) \end{array}$$

Exemplo: Dividindo os polinômios:  $A(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$  por  $B(x) = -x^2 + 8x - 3$ , pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 & -x^2 + 8x - 3 \\
 \underline{-5x^3 + 40x^2 - 15x} & -5x - 44 \\
 44x^2 - 18x - 1 & \text{quociente} \\
 \underline{-44x^2 + 352x - 132} & \\
 334x - 133 & \\
 \hline
 & \text{resto}
 \end{array}$$

Os procedimentos para resolver essa divisão são:

- Dividimos o termo de maior grau do dividendo ( $5x^3$ ) pelo termo de maior grau do divisor ( $-x^2$ ), obtendo o primeiro termo do quociente ( $-5x$ ).
- Multiplicamos o termo obtido no quociente ( $-5x$ ) por todos os termos do divisor ( $-x^2 + 8x - 3$ ) e adicionamos o produto assim obtido ( $5x^3 - 40x^2 + 15x$ ) com os sinais trocados, ao dividendo.
- Como o resto parcial ( $44x^2 - 18x - 1$ ) ainda não apresenta grau menor do que o divisor, então repetimos o processo até obter um resto nulo ou, como no nosso exemplo, o resto cujo grau é menor do que o do divisor:  $\text{gr}(R) = 1 < \text{gr}(B) = 2$ .

Assim, temos: o resto  $R(x) = 334x - 133$  e o quociente  $Q(x) = -5x - 44$ .

### Exercícios resolvidos:

- Determine  $m$ ,  $n$  e  $p$  para que a identidade  $(m^2 - 1)x^3 + (n + 1)x^2 + p^2x + 3 \equiv 5x^2 + 81x + 3$ .

**Resolução:** Para que a identidade se verifique, devemos ter:  $m^2 - 1 = 0$  (como no 2º membro da equação não existe  $x^3$ , então o coeficiente é zero)

$$\begin{aligned}
 n + 1 &= 5 \text{ e } p^2 = 81 \\
 \text{Logo: } m^2 &= 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow m = \pm 1 \\
 n + 1 &= 5 \Rightarrow n = 5 - 1 \Rightarrow n = 4 \\
 p &= \pm\sqrt{81} \Rightarrow \boxed{p = \pm 9}
 \end{aligned}$$

- Sendo  $P(x)$  um polinômio do 2º grau onde  $P(0) = -2$  e  $P(2x) + P(x-1) \equiv 3x^2 + 7x - 8$ , determine  $P(x)$ .

**Resolução:**  $P(x)$  é polinômio do 2º grau, então:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= ax^2 + bx + c \\
 P(0) &= -2, \text{ então: } -2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow -2 = 0 + 0 + c \\
 &\quad \boxed{c = -2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(2x) &= 2 \cdot (ax^2 + bx + c) \Rightarrow P(2x) = 2 \cdot (ax^2 + bx - 2) \\
 P(2x) &= 2ax^2 + 2bx - 4 \Rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ então:}
 \end{aligned}$$

$$P(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$P(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) - 2$$

$$P(x-1) = a(x^2 - 2x + 1) + bx - b - 2$$

$$P(x-1) = ax^2 - 2ax + a + bx - b - 2$$

$$P(x-1) = ax^2 + (-2a + b)x + (a - b - 2)$$

$$\text{Logo: } P(2x) + P(x-1) \equiv 3x^2 + 7x - 8$$

$$(2ax^2 + 2bx - 4) + [ax^2 + (-2a + b)x + (a - b - 2)] \equiv 3x^2 + 7x - 8$$

Reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$3ax^2 + (-2a + 3b)x + (a - b - 6) \equiv 3x^2 + 7x - 8$$

Pela identidade de polinômios, temos:  $3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$$-2a + 3b = 7 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 3b = 7 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a - b - 6 = 1 - 3 - 6 = -8$$

Então o polinômio  $P(x)$  é:  $P(x) = 1 \cdot x^2 + 3x + (-2)$

$$\boxed{P(x) = x^2 + 3x - 2}$$

3. Sendo  $A(x)$  um polinômio de 4º grau e  $B(x)$  um polinômio do 3º grau, determine o grau dos polinômios abaixo:

a)  $A(x) + B(x)$ , b)  $A(x) - B(x)$  e c)  $A(x) \cdot B(x)$

Resolução: a)  $A(x) + B(x)$  será um polinômio do 4º grau, pois:

$$A(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad B(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

$$A(x) + B(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e + a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

$$A(x) + B(x) = ax^4 + (b + a')x^3 + (c + b')x^2 + (d + c')x + (e + d'),$$

$$\text{logo: } \text{gr}(A + B) = 4$$

$$\text{b) } A(x) - B(x)$$

Com os dados do item anterior, podemos concluir que

$A(x) - B(x)$  é do 4º grau.

c)  $A(x) \cdot B(x)$  é um polinômio do 7º grau pois, na multiplicação, somamos os expoentes de bases iguais, assim:  $(ax^4) \cdot (a'x^3) = aa'x^7$

### ⇒ Exercícios propostos:

16. (PUC-SP) Determine os valores de  $m$ ,  $n$  e  $p$  de modo que sejam idênticos os polinômios:  $P_1(x) = (m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p)x + n$  e  $P_2(x) = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$

17. (FAAP-SP) Calcule  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que o polinômio  $P_1(x) = a(x - c)^3 + b(x + d)$  seja idêntico a  $P_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ .

18. (UFPA) Os polinômios  $P(x) = mx^2 - nx - 4$  e  $Q(x) = x^2 + mx + n$  são tais que  $P(x + 1) = Q(2x)$ . Os valores de  $m$  e  $n$  são, respectivamente:

a) 1 e -4   b) 2 e 4   c) 4 e -4   d) 4 e 0   e) -4 e 0

**19.** (PUC-SP) Sendo  $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + ax + b)$  para todo  $x$  real, os valores de  $a$  e  $b$  são, respectivamente:

a)  $-1$  e  $-1$  b)  $0$  e  $0$  c)  $1$  e  $1$  d)  $1$  e  $-1$  e)  $-1$  e  $1$

**20.** (UFBA) Considere os polinômios:  $P_1 = 3a^3 - 4a^2b + 7b^3$ ,  $P_2 = -6a^3 + 15a^2b + 5b^3$  e  $P_3 = ma^3 + na^2b + pb^3$ . Sendo  $P_1 + P_2 + P_3 \equiv 0$ , calcule  $lm + n + pl$

**21.** (Cessem-SP) Dividindo  $(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$  por um certo polinômio  $P(x)$ , obtemos quociente  $(x - 1)$  e o resto  $(2x - 1)$ . O polinômio  $P(x)$  é igual a:

a)  $2x^2 - 3x + 2$  b)  $x^2 - 3x + 2$  c)  $x^2 - x + 1$  d)  $2x^2 - 3x + 1$  e) n. d. a.

**22.** (Cessem-SP) Dividindo-se  $P(x)$  por  $(x - 3)$  resulta um resto  $-7$  e um quociente  $(x - 4)$ . Qual é  $P(x)$ ?

a)  $x^2 - 7x + 5$  c)  $\frac{x + 4}{x - 4}$  d)  $2x^2 - x + 14$   
b)  $2x$  e)  $2x^2 - 14x + 10$

**23.** (UFGO) Associe a cada uma das alternativas abaixo a letra V se for verdadeira, e a letra F se for falsa.

I – A soma de dois polinômios do 3º grau é sempre um polinômio do 3º grau.

II – O produto de um polinômio do 2º grau por um do 3º grau é sempre um polinômio de 6º grau.

III – A diferença entre um polinômio do 3º grau e um do 2º grau é sempre um polinômio do 3º grau.

IV – O resto da divisão de um polinômio do 3º grau por um do 2º grau é sempre um polinômio do 1º grau.

Na ordem apresentada, tem-se:

a) FFVV b) FFVF c) VVFF d) VVVF e) VFVF

**24.** (UFRS) Se  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios de graus respectivamente iguais a  $n$  e  $m$ , então o grau de  $2(x - 1)^3 \cdot p(x) \cdot q^4(x)$  é:

a)  $12nm$  b)  $12nm^4$  c)  $3nm^4$  d)  $3 + n + 4m$  e)  $3 + n + m^4$

**7. Decomposição da função racional** Denominamos função racional toda função da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ onde } P(x) \text{ e } Q(x) \text{ são polinômios. A maioria des-}$$

sas funções pode ser decomposta em somas de outras funções racionais.

Exemplo: Vamos encontrar os valores de M e N na identidade abaixo:

$$\frac{3x+1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{M}{x-2} + \frac{N}{x-3}, \text{ onde } x \neq 2 \text{ e } x \neq 3.$$

Calculamos o m.m.c. dos denominadores do 2º membro da identidade:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{M(x-3)+N(x-2)}{(x-2) \cdot (x-3)} \\ \frac{3x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{Mx-3M+Nx-2N}{(x-2) \cdot (x-3)} \\ \frac{3x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{(M+N)x+(-3M-2N)}{(x-2) \cdot (x-3)} \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } M+N=3 \text{ e } -3M-2N=1$$

$$\text{Resolvendo o sistema } \begin{cases} 3M+3N=9 \\ -3M-2N=1 \end{cases}$$

$$N=10$$

$$\text{e } M=-7$$

Confirmando o resultado, substituímos  $N=10$  e  $M=-7$  na identidade:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{3x+(21-20)}{(x-2) \cdot (x-3)} \\ \frac{3x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{3x+1}{(x-2) \cdot (x-3)} \end{aligned}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

25. (Mogi-SP) Se  $\frac{x+1}{x^2+2x-24} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+6}$ , então  $2A+B$  é igual a:

- a)  $-\frac{3}{2}$  b)  $\frac{1}{2}$  c) 1 d)  $\frac{3}{2}$  e) -1

26. (UFSC) Determine  $a+b+c$  na identidade:

$$\frac{32}{x^3-4x} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2} \text{ com } x \neq 0, x \neq 2 \text{ e } x \neq -2$$

27. Se  $\frac{x}{x^2-3x+2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ , então A e B valem respectivamente:

- a) 2 e -1 b) 1 e 1 c) -1 e 2 d) 2 e 2 e) -1 e -2

**8. Método de Descartes** A divisão de polinômios, como já vimos, pode ser efetuada através do método da chave ou divisão euclidiana. Entretanto, o matemático e filósofo francês, Descartes, desenvolveu um outro método que leva o seu nome — o *Método de Descartes*.

O que Descartes verificou é que o quociente pode ter sua forma algébrica determinada através da equação:

$\text{gr}(Q) = \text{gr}(A) - \text{gr}(B)$ , onde  $A(x)$  é o dividendo e  $B(x)$  é o divisor.

Os coeficientes, sob a forma geral, serão determinados através da identidade de polinômios.

Da mesma maneira, o resto deve obedecer a condição:

$$\text{gr}(R) < \text{gr}(B) \text{ ou } R(x) \equiv 0$$

Exemplo: Determinar  $Q(x)$  e  $R(x)$  na divisão de

$A(x) = 6x^4 - 10x^3 - x^2 + 5x + 4$  por  $B(x) = 3x^2 - 2x + 2$ , pelo método de Descartes.

$$\text{gr}(Q) = \text{gr}(A) - \text{gr}(B) \Rightarrow \text{gr}(Q) = 4 - 2 \Rightarrow \text{gr}(Q) = 2$$

Portanto, a forma algébrica de  $Q(x)$  é:  $Q(x) = ax^2 + bx + c$

Para  $R(x)$ , temos que:  $\text{gr}(R) < \text{gr}(B)$  ou  $\text{gr}(R) \equiv 0$

Como o  $\text{gr}(B) = 2$ , então o grau máximo de  $R(x)$  é 1, o que determina sua expressão algébrica da seguinte maneira:

$$R(x) = dx + e$$

Por definição, temos:  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Substituindo os valores, temos:

$$6x^4 - 10x^3 - x^2 + 5x + 4 = (3x^2 - 2x + 2) \cdot (ax^2 + bx + c) + dx + e$$

$$6x^4 - 10x^3 - x^2 + 5x + 4 = 3ax^4 + (3b - 2a)x^3 + (2a - 2b + 3c)x^2 + (2b - 2c + d)x + (2c + e)$$

Pela igualdade de polinômios, temos que os coeficientes do primeiro termo devem ser iguais aos do segundo. Portanto, temos:

$$3a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$3b - 2a = -10 \Rightarrow 3b - 2 \cdot 2 = -10 \Rightarrow 3b = -6 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

$$2a - 2b + 3c = -1 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + 3c = -1 \Rightarrow 3c = -9 \Rightarrow \boxed{c = -3}$$

$$2b - 2c + d = 5 \Rightarrow 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) + d = 5 \Rightarrow -4 + 6 + d = 5 \Rightarrow$$

$$d = 5 - 2 \Rightarrow \boxed{d = 3}$$

$$2c + e = 4 \Rightarrow 2 \cdot (-3) + e = 4 \Rightarrow -6 + e = 4 \Rightarrow \boxed{e = 10}$$

Substituindo os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$  nas formas algébricas de  $Q(x)$  e  $R(x)$ , temos:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = 2x^2 - 2x - 3$$

$$R(x) = dx + e$$

$$R(x) = 3x + 10$$



### Exercícios resolvidos:

1. Determinar  $p$  e  $q$  de modo que:  $A(x) = x^3 - px^2 - qx + 2$  seja divisível por  $B(x) = x^2 - 3x + 2$

*Resolução:* Se  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ , então o resto  $R(x) \equiv 0$ .

Calculando o grau de  $Q(x)$ , temos:  $\text{gr}(Q) = \text{gr}(A) - \text{gr}(B)$

$$\text{gr}(Q) = 3 - 2$$

$\text{gr}(Q) = 1$  e  $Q(x)$  será da forma:  $Q(x) = ax + b$

Logo:  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) \Rightarrow x^3 - px^2 - qx + 2 = (x^2 - 3x + 2) \cdot (ax + b)$

Efetuada o produto do 2º membro da identidade e igualando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$$x^3 - px^2 - qx + 2 = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (2a - 3b)x + 2b, \text{ onde: } a = 1$$

$$-p = 3a + b \Rightarrow -p = 3 + b$$

$$2a - 3b = -q \Rightarrow 2 - 3b = -q$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

Substituindo os valores de  $b$  nas outras equações, temos:

$$-p = 3 + 1 \Rightarrow p = -4$$

$$-q = 2 - 3 \cdot 1 \Rightarrow q = 1$$

$$Q(x) = ax + b \Rightarrow \boxed{Q(x) = x + 1}$$

2. (UFMS) Dividindo-se um polinômio  $P(x)$  por  $(x - 4)$ , obtém-se o quociente  $x^2 - 3x - 9$ , e resto 8. Determine o valor de  $P(1)$ .

*Resolução:* Seja  $B(x)$  o divisor de  $P(x)$ :  $B(x) = x - 4$

Como  $Q(x) = x^2 - 3x - 9$ , é do 2º grau, então:  $B(x) \cdot Q(x)$  será de grau  $1 + 2 = 3$  (lembre-se que somamos os graus, na multiplicação).

Assim,  $P(x)$  será do 3º grau e, portanto, da forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Por definição:  $P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ , então:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 4) \cdot (x^2 - 3x - 9) + 8$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 7x^2 + 3x + 36 + 8$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 7x^2 + 3x + 44$$

$$\text{Assim: } a = 1, b = -7, c = 3 \text{ e } d = 44$$

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 44 \Rightarrow P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 44$$

$$P(1) = 1 - 7 + 3 + 44 \Rightarrow P(1) = 41$$

### Exercícios propostos:

28. (UFAM) A divisão de  $P(x) = x^3 - 7x + 6$  por  $D(x) = x - 2$  apresenta o quociente  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ . Os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  são, respectivamente: a) 1, 2 e -3 b) 1, -2 e -3 c) 1, 2 e 3 d) -1, 2 e 3

**29.** (UFSC) Os números  $m$  e  $n$  são tais que o polinômio  $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + mx + n$  é divisível por  $x^2 - 3$ . O valor de  $m + n$  é:

**30.** (UFSC) Qual o valor de  $a$  para que o polinômio  $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + ax^2 - 4x + 12$  seja divisível por  $x^3 + 2x^2 - x + 3$ ?

**31.** (UFSC) Determine o resto da divisão do polinômio  $3x^3 + 8x^2 + 32$  por  $x + 3$ .

**32.** (UFPI) O resto da divisão de  $kx^2 + x - 1$  por  $x + 2k$  é:

a)  $-2k - 1$  b)  $k - 1$  c)  $4k^2 - 4k - 1$  d)  $k^3 - k - 1$  e)  $4k^3 - 2k - 1$

**33.** (UFPI) Se o polinômio  $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + ax + b$  é divisível por  $(x - 1)^2$ , então podemos afirmar que: a)  $a = -5$  e  $b = -3$ , b)  $a = -5$  e  $b = 3$ , c)  $a = 5$  e  $b = 3$ , d)  $a = 5$  e  $b = -3$  e e)  $a = 3$  e  $b = 5$

**34.** (UFAM) O quociente  $\frac{x^5 - 32}{x - 2}$  é o polinômio:

a)  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$  c)  $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$   
b)  $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 24$  d)  $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

**9. Teorema do resto ou de D'Alembert** Antes de enunciarmos o teorema do resto, observemos o que ocorre na divisão do polinômio  $A(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 20$  pelo binômio  $B(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 5x - 20 & x - 2 \\ -x^3 + 2x^2 & x^2 - 4x - 3 \\ \hline -4x^2 + 5x & \\ 4x^2 - 8x & \\ \hline -3x - 20 & \\ 3x - 6 & \\ \hline -26 & \rightarrow \text{resto } R(x) \end{array}$$

Logo,  $R(x) = -26$

Se observarmos bem, veremos que:  $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$  [raiz de  $B(x)$ ]

Substituindo a raiz de  $B(x)$  em  $A(x)$ , temos:

$$A(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 20 \Rightarrow A(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 20$$

$$A(2) = 8 - 24 + 10 - 20 \Rightarrow A(2) = -26$$

$$\text{Portanto, } R(x) = A(2) = -26$$

Mas como chegamos a esta conclusão?

Simples. Pela condição, temos que:  $\text{gr}(R) < \text{gr}(B)$ , portanto, se  $\text{gr}(B) = 1$ ,  $\text{gr}(R) = 0$ , logo podemos representar  $R(x)$  simplesmente por  $r$ .

Pela definição, temos:  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

No caso de substituirmos todo  $x$  pela raiz de  $B(x)$ , teremos:

$$A\left(\frac{-b}{a}\right) = \left(a \frac{-b}{a} + b\right) \cdot Q\left(\frac{-b}{a}\right) + r \Rightarrow A\left(\frac{-b}{a}\right) = 0 + r \Rightarrow A\left(\frac{-b}{a}\right) = r$$

Portanto:

#### Teorema de D'Alembert

Um polinômio  $A(x)$  será divisível por  $B(x) = ax + b$  se, e somente se,  $A\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$

#### Exercícios resolvidos:

1. Calcule o valor de  $m$  para que o polinômio

$A(x) = 4x^2 - 6x + m$  seja divisível por  $B(x) = x - 3$ .

**Resolução:** Pelo teorema de D'Alembert, sendo  $B(x) = x - 3$ ,  $A(x)$  só será divisível por  $A(x)$  se  $A\left(\frac{-(-3)}{1}\right) = 0$ . Portanto,  $A(3) = 0$ , isto é: o valor numérico de  $A(x)$  para a raiz do divisor ( $x = 3$ ) é zero.

$$\text{Então: } A(3) = 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + m = 0 \Rightarrow 36 - 18 + m = 0$$

$$\boxed{m = -18}$$

2. Sabendo-se que o polinômio  $A(x)$  é do 2º grau e que, dividido por  $(x - 1)$ ,  $x$  e  $(x + 2)$ , deixa restos 0, 1 e 15 respectivamente, determinar  $A(x)$ .

**Resolução:** Como  $A(x)$  é do 2º grau, então é da forma:

$$A(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$B_1(x) = x - 1 \Rightarrow x = 1 \text{ é raiz de } B_1(x) \text{ e } R_1(x) = 0$$

$$B_2(x) = x \Rightarrow x = 0 \text{ é raiz de } B_2(x) \text{ e } R_2(x) = 1$$

$$B_3(x) = x + 2 \Rightarrow x = -2 \text{ é raiz de } B_3(x) \text{ e } R_3(x) = 15$$

$$\text{Logo: } A(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow 0 = a + b + c \text{ (I)}$$

$$A(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1 \text{ (II)}$$

$$A(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$15 = 4a - 2b + 1 \Rightarrow 4a - 2b = 14 \text{ (III)}$$

Substituindo o valor de  $c$  ( $c = 1$ ) na equação (I), temos:

$$a + b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

$$\text{Resolvendo o sistema: } \begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 14 \end{cases}$$

$$\text{Temos: } a = 2 \text{ e } b = -3$$

$$\text{Portanto: } \boxed{A(x) = 2x^2 - 3x + 1}$$

### 9a. Divisão de um polinômio por um produto de fatores lineares

Se um polinômio  $A(x)$  é divisível, separadamente, por  $(x - \alpha)$  e por  $(x - \beta)$  com  $\alpha \neq \beta$ , então  $A(x)$  será divisível pelo produto  $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ .

Demonstração:

$$\begin{array}{ccc} A(x) \overline{) x - \alpha} & A(x) \overline{) x - \beta} & A(x) \overline{) (x - \alpha) \cdot (x - \beta)} \\ 0 & 0 & R(x) \\ Q_1(x) & Q_2(x) & Q(x) \end{array}$$

Como  $A(x)$  é divisível por  $(x - \alpha)$ , então  $A(\alpha) = 0$  (I)

Como  $A(x)$  é divisível por  $(x - \beta)$ , então  $A(\beta) = 0$  (II)

O resto da divisão de  $A(x)$  por  $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$  é, no máximo, um polinômio de 1º grau, pois o divisor  $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$  é uma expressão algébrica de 2º grau  $[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$ , então:  $R(x) = ax + b$

Pela definição, temos:  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$$A(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot Q(x) + ax + b$$

Substituindo  $x$  por  $\alpha$ , temos:  $A(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot (\alpha - \beta) \cdot Q(\alpha) + a\alpha + b$

$$A(\alpha) = 0 \cdot (\alpha - \beta) \cdot Q(\alpha) + a\alpha + b \Rightarrow A(\alpha) = a\alpha + b$$

Substituindo, agora,  $x$  por  $\beta$ :  $A(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot (\beta - \beta) \cdot Q(\beta) + a\beta + b$

$$A(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot 0 \cdot Q(\beta) + a\beta + b \Rightarrow A(\beta) = a\beta + b$$

Substituindo estes valores em (I) e em (II), temos:

$$\begin{cases} A(\alpha) = a\alpha + b = 0 \\ A(\beta) = a\beta + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Resolvendo o sistema: } \begin{cases} a\alpha + b = 0 \\ -a\beta - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{0}{(\alpha - \beta)} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$
$$\hline (\alpha - \beta) \cdot a = 0$$

Substituindo o valor de  $a$  na equação, temos:

$$a\alpha + b = 0 \Rightarrow 0\alpha + b = 0 \therefore \boxed{b = 0}$$

Portanto, o resto  $R(x) = ax + b$  será:  $R(x) = a0 + 0 \Rightarrow \boxed{R(x) = 0}$

Se  $R(x) = 0$ , então  $A(x)$  é divisível por  $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ , (produtos de fatores lineares) como queríamos demonstrar.

Assim, generalizando, se  $A(x)$  é divisível por  $n$  fatores lineares distintos  $(x - \alpha_1)$ ,  $(x - \alpha_2)$ ,  $(x - \alpha_3)$ , ...,  $(x - \alpha_n)$ , então  $A(x)$  é divisível pelo produto  $(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Verificar se o polinômio  $A(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  é divisível por  $(x - 1) \cdot (x - 3)$ .

**Resolução:** Se o polinômio  $A(x)$  for divisível pelo produto  $(x-1) \cdot (x-3)$ , então basta verificar se  $A(x)$  é divisível, separadamente, por  $(x-1)$  e por  $(x-3)$ .

$$\text{Assim: } A(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6$$

$$A(1) = 1 - 6 + 11 - 6 \Rightarrow A(1) = 0$$

$$A(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 \Rightarrow A(3) = 27 - 54 + 33 - 6 \Rightarrow A(3) = 0$$

Como  $A(1) = 0$  e  $A(3) = 0$ ,  $A(x)$  é divisível por  $(x-1) \cdot (x-3)$ .

2. Determinar  $p$  e  $q$  tal que o polinômio:  $A(x) = x^4 + 6x^3 + px^2 + qx - 24$  seja divisível por  $(x+1) \cdot (x-2)$ .

**Resolução:** Se  $A$  é divisível por  $(x+1)$  e por  $(x-2)$ , temos:

$$\text{a) } A(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 + 6 \cdot (-1)^3 + p \cdot (-1)^2 + q \cdot (-1) - 24 = 0$$

$$1 - 6 + p - q - 24 = 0 \Rightarrow p - q = 29 \quad (\text{I})$$

$$\text{b) } A(2) = 0 \Rightarrow 2^4 + 6 \cdot 2^3 + p \cdot 2^2 + q \cdot 2 - 24 = 0$$

$$16 + 48 + 4p + 2q - 24 = 0 \Rightarrow 2p + q = -20 \quad (\text{II})$$

Resolvendo o sistema das equações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} p - q = 29 \\ 2p + q = -20 \end{cases}$$

$$\underline{\quad 3p = 9 \Rightarrow p = 3 \quad}$$

$$3 - q = 29 \Rightarrow q = -26$$

3. Dê os restos das divisões de: a)  $A(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 2$  por  $x-2$  e

b)  $A(x) = x^5 - 32$  por  $x-2$

**Resolução:** a) A raiz do divisor  $x-2$  é  $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\text{Então: } A(2) = R(x) \Rightarrow A(2) = 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 2$$

$$A(2) = 32 + 8 \Rightarrow A(2) = 40$$

Logo, o resto  $R(x) = 40$

b) A raiz do divisor  $x-2$  é  $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\text{Então: } A(2) = R(x) \Rightarrow A(2) = 2^5 - 32 \Rightarrow A(2) = 32 - 32 \Rightarrow A(2) = 0$$

Logo, o resto  $R(x) = 0$ , isto é, a divisão é exata.

4. Calcule  $p$  de modo que  $A(x) = x^4 - 3x^3 + px - 2$  seja divisível por  $x-2$ .

**Resolução:** Se  $A(x)$  é divisível por  $x-2$ , então o resto  $R(x)$  é igual a zero. Como  $A(x) = R(x) = 0$ , então:  $A(2) = 0$

$$2^4 - 3 \cdot 2^3 + p \cdot 2 - 2 = 0 \Rightarrow 16 - 24 + 2p - 2 = 0 \Rightarrow 2p = 10 \Rightarrow p = 5$$

5. Determine  $m$  e  $n$  de modo que o polinômio  $A(x) = 2x^3 + mx^2 - nx - 3$  seja divisível por  $x^2 - 1$ .

**Resolução:** Podemos decompor o divisor  $x^2 - 1$  em  $(x+1) \cdot (x-1)$ .

Assim, se  $A(x)$  é divisível por  $(x+1) \cdot (x-1)$ , então  $A(x)$  é divisível, separadamente, por  $(x+1)$  e por  $(x-1)$ .

a)  $A(x)$  é divisível por  $(x+1)$ , então:  $A(-1) = 0$

$$2 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1)^2 - n \cdot (-1) - 3 = 0 \Rightarrow -2 + m + n - 3 = 0$$

$$m + n = 5 \text{ (I)}$$

b)  $A(x)$  é divisível por  $(x-1)$ , então:  $A(1) = 0$

$$2 \cdot 1^2 + m \cdot 1^2 - n \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow 2 + m - n - 3 = 0$$

$$m - n = 1 \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema de equações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} m + n = 5 \\ m - n = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{2m = 6 \Rightarrow m = 3 \text{ e } n = 2}$$

6. Sabendo-se que o polinômio  $A(x)$  deixa resto 4 quando dividido por  $(x-2)$  e deixa resto  $-1$  quando dividido por  $(x+3)$ , determine o resto da divisão do  $A(x)$  por  $(x-2) \cdot (x+3)$ .

**Resolução:** Pelo teorema do resto, temos que:  $A(2) = 4$  e  $A(-3) = -1$

O grau do resto  $R(x)$  na divisão de  $A(x)$  por  $(x-2) \cdot (x+3)$  é, no máximo, 1. Então, podemos escrever  $R(x)$  como uma expressão algébrica do 1º grau:  $R(x) = ax + b$ .

$$\text{Logo: } A(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot Q(x) + ax + b$$

Substituindo  $x$  por 2 e, depois, por  $-3$  na identidade acima, temos:

$$\text{a) } A(2) = (2-2) \cdot (2+3) \cdot Q(x) + a \cdot 2 + b$$

$$4 = 0 \cdot 5 \cdot Q(x) + 2a + b \Rightarrow 4 = 0 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 4 \text{ (I)}$$

$$\text{b) } A(-3) = (-3-2) \cdot (-3+3) \cdot Q(x) + a \cdot (-3) + b$$

$$-1 = (-5) \cdot 0 \cdot Q(x) - 3a + b \Rightarrow -1 = 0 - 3a + b \Rightarrow -3a + b = -1 \text{ (II)}$$

$$\text{Resolvendo o sistema: } \begin{cases} 2a + b = 4 \\ -3a + b = -1 \end{cases}, \text{ temos que: } \boxed{a = 1 \text{ e } b = 2}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

**35.** (FGV-SP) O resto da divisão do polinômio  $P(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$  pelo binômio  $x+1$  é:

a) 2   b) 3   c)  $-1$    d) 1   e) 0

**36.** (Cescom) O valor de  $k$  a fim de que o polinômio  $x^4 + kx^2 + 2x - 8$  seja divisível por  $x+2$  é: a) 2   b) 1   c) 0   d)  $-1$    e)  $-2$

**37.** (UFBA) O resto da divisão de  $P(x) = 3x^5 + 2x^4 + 3px^3 + x - 1$  por  $(x+1)$  é 4, se  $p$  é igual a: a)  $\frac{5}{3}$    b)  $-2$    c)  $-3$    d)  $-10$    e)  $-\frac{7}{3}$

38. (FAAP-SP) Que número real  $A$  se deve adicionar à expressão  $x^3 + 2x^2$  para se obter um polinômio divisível por  $x + 5$ ?

39. (PUCC-SP) Se você efetuar a divisão do polinômio  $2x^3 - 21x^2 + 5x - 1$  pelo binômio  $x + 1$ :

- a) o quociente não possui termo independente  
b) os coeficientes dos termos do quociente serão 2, -23 e 28  
c) o resto será 29    d) o quociente é do 1º grau    e) n. d. a.

40. (FEI-SP) Dado o polinômio:  $P(x) = 4x^4 - 5x^2 - 3bx + a$ , calcule  $a$  e  $b$ , de modo que  $P(x)$  seja divisível por  $(x^2 - 1)$ .

41. (UFMS) Determine  $m$  e  $n$ , de modo que  $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx - 3$  seja divisível por  $(x + 1) \cdot (x - 3)$ .

42. (FGV-SP) Para que o polinômio  $x^3 - 8x + mx - n$  seja divisível por  $(x + 1) \cdot (x - 2)$ , o produto  $m \cdot n$  deve ser igual a:

- a) -8    b) 10    c) -10    d) 8    e) -6

**10. Dispositivo de Briot-Ruffini** O dispositivo de Briot-Ruffini é um método muito simples e prático para se efetuar a divisão de um polinômio  $A(x)$  por um binômio do primeiro grau, da forma  $ax + b$ .

Acompanhemos o desenvolvimento do método dividindo os polinômios  $A(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$  e  $B(x) = x - 2$ .

Dispositivo de Briot-Ruffini:

Coeficientes de $A(x)$	raiz de $B(x)$
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px 10px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span>Coeficientes de <math>A(x)</math></span> <span>Coeficientes de <math>Q(x)</math></span> </div> <div style="border-top: 1px solid black; padding: 5px 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">1</div> <div style="padding: 5px 10px;">3</div> <div style="padding: 5px 10px;">-2</div> <div style="padding: 5px 10px;">-6</div> <div style="padding: 5px 10px;">2</div> </div> <div style="padding: 5px 10px;">1</div> <div style="padding: 5px 10px;">3</div> <div style="padding: 5px 10px;">-2</div> <div style="padding: 5px 10px;">-6</div> </div> </div> </div>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">2</div> <div style="padding: 5px 10px;">2</div> </div>

- a) Escrevemos a raiz de  $B(x)$  e os coeficientes de  $A(x)$ , que devem estar reduzidos e ordenados conforme o esquema ao lado:
- b) Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo  $A(x)$ :

1	3	-2	-6	2
1	3	-2	-6	
1	3	-2	-6	2

- c) Multiplicamos o número abaixado pela raiz e somamos com o segundo coeficiente, colocando o resultado desta operação logo abaixo do segundo coeficiente:

					(+)
1	3	-2	-6	2	
1	5				
					(x)

- d) Repetimos a última seqüência para os coeficientes restantes:

(+)					(+)
1	3	-2	-6	2	
1	5	8			
					(x)

e) Separamos o último número:

1	3	-2	-6	2
1	5	8	10	

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 Coeficientes de  $Q(x)$ 
resto:  $R(x)$

Pelo método de Descartes, temos:  $\text{gr}(Q) = \text{gr}(A) - \text{gr}(B)$ , por isso:  
 $\text{gr}(Q) = 3 - 1 = 2$

Então:  $Q(x) = ax^2 + bx + c$

Substituindo os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  obtidos pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:  $Q(x) = x^2 + 5x + 8$

Pela condição:  $\text{gr}(R) < \text{gr}(B)$ , temos  $\text{gr}(R) = 0$ . Daí podemos concluir que:  $R(x) = 10$

### Exercícios resolvidos:

1. Efetuar a divisão de  $A(x) = 2x^4 - 3x^2 - 15$  por  $B(x) = x + 3$ .

*Resolução:* Note que o coeficiente em  $x^3$  é zero:  $0x^3$ , e o coeficiente em  $x$  é  $0x$ . Então, no dispositivo, temos:

2	0	-3	0	-15	-3
2	-6	15	-45	120	

$(-3 \cdot 2 + 0) \quad [-3 \cdot -6 + (-3)] \quad (-3 \cdot 15 + 0) \quad [-3 \cdot -45 + (-15)]$

Portanto:  $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 15x - 45$  e  $R(x) = 120$

2. Calcular o quociente  $Q(x)$  e o resto  $R(x)$  da divisão do polinômio

$A(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x - 8$  por  $B(x) = 2x - 3$ .

*Resolução:* Note que o coeficiente de  $x$  no divisor  $B(x)$  é diferente de 1. A raiz do divisor  $B(x)$ , será:

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Teremos, portanto, cálculos fracionários.

3	-5	0	7	-8	$\frac{3}{2}$
3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{47}{8}$	$\frac{13}{16}$	

$(\frac{3}{2} \cdot 3 - 5) \quad (\frac{3}{2} \cdot -\frac{1}{2} + 0) \quad (\frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{4} + 7) \quad (\frac{3}{2} \cdot \frac{47}{8} - 8)$

$\underbrace{\hspace{10em}}$  termos do quociente ↘ resto

Neste caso, devemos ainda dividir os termos dos coeficientes do quociente (obtidos no dispositivo) por 2 (denominador da raiz), e o resto permanecerá o que foi obtido nesse dispositivo.

Assim, os coeficientes definitivos do quociente  $Q(x)$ , serão:



$$3 \div 2 = \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \div 2 = -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4} \div 2 = -\frac{3}{8}; \frac{47}{8} \div 2 = \frac{47}{16}$$

Então: 
$$Q(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{47}{16} \text{ e } R(x) = \frac{13}{16}$$

3. Determinar  $m$  e  $n$  reais, de modo que o polinômio  $A(x) = x^4 + 2x^3 - mx^2 + nx - 3$  seja divisível por  $B(x) = (x-1) \cdot (x+3)$ .

**Resolução:** Já vimos que, se um polinômio  $A(x)$  é divisível por  $(x-1) \cdot (x+3)$ ,  $A(x)$  será divisível, separadamente, por  $(x-1)$  e por  $(x+3)$ .

Vamos calcular  $m$  e  $n$ , através do dispositivo de Briot-Ruffini, dividindo, primeiramente,  $A(x)$  por  $(x-1)$  e, em seguida, dividir o quociente obtido por  $(x+3)$ , ou seja:

$$\begin{array}{r|rrrr} A(x) & 1 & 2 & -m & n & -3 \\ \hline (x-1)(x+3) & 1 & 3 & 3-m & -m+n & -m+n \\ \hline Q(x) & 1 & 3 & 3-m & -m+n & -m+n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|rr} A(x) & 1 & 3 \\ \hline x-1 & 1 & 3 \\ \hline Q'(x) & 1 & 3 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r|rrrr} A(x) & 1 & 2 & -m & n & -3 \\ \hline (x+3)(x-1) & 1 & 3 & 3-m & -m+n & -m+n \\ \hline Q(x) & 1 & 3 & 3-m & -m+n & -m+n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|rr} A(x) & 1 & 3 \\ \hline x+3 & 1 & 3 \\ \hline Q'(x) & 1 & 3 \end{array}$$

Temos, então:

1	2	-m	n	-3	1
<hr/>					
	(1 · 1 + 2)	(1 · 3 - m)	[1 · (3 - m) + n]	1 · (3 - m + n) · 3	
1	3	3 - m	-m + n	-m + n	
					resto

Dividindo o quociente obtido por  $(x+3)$ :

1	3	3 - m	3 - m + n	-3	
<hr/>					
	(-3 · 1 + 3)	(-3 · 0 + 3 - m)	(-9 + 3m + 3 - m + n)	[-3 · (-6 + 2m + n) - m + n]	
1	0	3 - m	-6 + 2m + n	18 - 7m - 2n	
					resto

Como  $A(x)$  é divisível por  $(x-1)$  e por  $(x+3)$ , então os restos são iguais a zero. Logo:  $-m + n = 0$  (I)

$$18 - 7m - 2n = 0 \text{ (II)}$$

Da equação (I), temos:  $m = n$ .

Substituindo na equação (II):

$$7n + 2n = 18 \Rightarrow 9n = 18 \Rightarrow n = 2$$

Portanto,  $m = n = 2$

### Exercícios propostos:

43. Aplique o dispositivo de Briot-Ruffini, para calcular o quociente e o resto da divisão de: a)  $A(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 4$  por  $B(x) = x + 1$  e b)  $A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$  por  $B(x) = 2x - 1$

44. (Cescem) Se o polinômio  $F(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$  é divisível por  $(x - 1)^2$ , então:

a)  $a : b = 3$  b)  $b - a = 1$  c)  $a + b = 1$  d)  $a \cdot b = 2$  e)  $a - b = 2$

45. (UFBA) Na divisão de um polinômio  $P(x)$  pelo binômio  $(x + a)$ , usou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini e encontrou-se:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & p & -3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline q & -4 & 5 & r & 7 & \end{array}$$

Os valores de  $a$ ,  $q$ ,  $p$  e  $r$  são, respectivamente:

a)  $-2$ ,  $1$ ,  $-6$  e  $6$  c)  $2$ ,  $-2$ ,  $-2$  e  $-6$  e)  $2$ ,  $-2$ ,  $1$  e  $-6$   
b)  $-2$ ,  $1$ ,  $-2$  e  $-6$  d)  $2$ ,  $1$ ,  $-4$  e  $4$

46. (FGV-SP) Determine o produto  $m \cdot n$  para que o polinômio  $x^3 - 6x^2 + mx + n$  seja divisível por  $(x - 1) \cdot (x - 2)$ .

47. Calcular o valor dos elementos desconhecidos nos esquemas abaixo, sendo que foi aplicado a eles o dispositivo de Briot-Ruffini.

a)  $\begin{array}{r|rrrr} a & b & c & d \\ \hline 4 & 20 & 101 & 508 \end{array}$  b)  $\begin{array}{r|rrrr} a & 3 & c & d \\ \hline 1 & b & 6 & 16 \end{array}$

## Equações polinomiais

**1. Introdução** Embora a resolução da equação de 2º grau já fosse conhecida desde o século VI d.C., somente no século XVI, Scipion del Ferro e Cardan, matemáticos italianos, desenvolveram fórmulas de solução para equações de terceiro e quarto graus.

A partir de então, os matemáticos de todo o mundo tentaram desenvolver fórmulas para solucionar equações de quinto grau ou maiores, mas, em 1824, o norueguês Niels Henrick Abel provou que fórmulas gerais para solucionar equações com graus superiores a quatro eram inexistentes, embora as equações pudessem ser resolvidas por outros meios.

**2. Definição** Denominamos *equações polinomiais*, ou *algébricas*, às equações da forma:  $P(x) = 0$ , onde  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n > 0$ .

Recordando que:  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  onde  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$  são números complexos denominados coeficientes.

$n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$  são números naturais denominados expoentes.  
 $x$  é um número complexo denominado variável.

O grau da equação é dado pelo maior expoente da variável. Assim:

$3x - 1 = 0$  é uma equação de 1º grau

$x^2 + 2x - 1 = 0$  é uma equação de 2º grau

$2x^3 - ix^2 + 1 = 0$  é uma equação de 3º grau

$x^4 - 1 = 0$  é uma equação de 4º grau

$\sqrt{3}x^5 + ix = 0$  é uma equação de 5º grau

Resolver uma equação algébrica é obter o seu conjunto-verdade, que é o conjunto de todas as suas raízes, isto é, os valores de  $x$  que tornam verdadeira a igualdade:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1 x + a_0 = 0$$

**3. Teorema fundamental da álgebra** Demonstrado por Gauss, em 1799, o teorema fundamental da álgebra declara:

Toda equação algébrica  $P(x) = 0$ , de grau  $n > 0$ , admite pelo menos uma raiz real ou complexa.

Embora o teorema nos garanta que toda equação polinomial tem uma solução, ele não nos ensina como obtê-la. As equações de 5º grau e maiores, como já foi dito, não possuem fórmulas para sua solução, mas veremos como tentar resolvê-las por outros meios.

**4. Teorema da decomposição** Todo polinômio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  de grau  $n > 0$  pode ser decomposto num produto de  $n$  fatores do tipo  $(x - \alpha)$ , onde  $\alpha$  é raiz de  $P(x)$ :

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são raízes de  $P(x)$

$a_n$  é o coeficiente inicial

**Demonstração:** O teorema fundamental da álgebra nos garante que o polinômio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  tem pelo menos uma raiz.

Consideremos  $\alpha_1$  raiz de  $P(x)$ . Neste caso,  $P(\alpha_1) = 0$  e  $P(x)$  é divisível por  $(x - \alpha_1)$ , que é um de seus fatores:

$$\begin{array}{r} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) x - \alpha_1} \\ a_n x^{n-1} + \dots \end{array}$$

$$\text{Logo: } P(x) = (x - \alpha_1) \cdot \underbrace{Q_1(x)}_{Q_1(x)}$$

O grau de  $Q_1(x)$ , determinado por Descartes, é  $(n-1) \cdot Q_1(x)$  deve ser, pelo teorema fundamental da álgebra, divisível por uma raiz. Consideremos  $\alpha_2$  esta raiz:

$$\begin{array}{r} a_n x^{n-1} + \dots \quad | \quad x - \alpha_2 \\ 0 \quad \quad \quad a_n x^{n-2} + \dots \rightarrow Q_2(x) \end{array}$$

De onde podemos concluir:  $Q_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot Q_2(x)$ .

Continuando esta operação até à  $n$ -ésima expressão, teremos:

$$Q_{n-1}(x) = (x - \alpha_n) \cdot Q_n$$

Mas, em  $Q_n$ , o grau do polinômio será zero, e  $Q_n$  será igual a uma constante cujo valor é  $a_n$ .

Se substituirmos todas as equações obtidas em  $P(x)$ , teremos:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

Teorema da decomposição:

Todo polinômio de grau  $n$  tem exatamente  $n$  raízes reais e complexas.

#### Exercícios resolvidos:

1. Obter a forma fatorada do polinômio:  $P(x) = 2x^2 - 6x - 8$

**Resolução:** As raízes dessa equação são  $\alpha_1 = -1$  e  $\alpha_2 = 4$  e, como podemos colocar 2 em evidência, então  $a_n = 2$

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

$$P(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 4) \Rightarrow \text{forma fatorada}$$

2. Compor os polinômios, sabendo-se que suas raízes são: a) 1, 3 e 9 e b) -5, 0, 1 e -1

**Resolução:** a) Como  $P(x)$  possui três raízes distintas, então  $P(x)$  é do 3º grau. Logo:  $P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$

$$\text{Fazendo } a_n = 1, \text{ temos: } P(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 9)$$

$$\text{Efetuando-se o produto, temos: } P(x) = x^3 - 13x^2 + 39x - 27$$

b)  $P(x)$  é do 4º grau, pois possui quatro raízes distintas. Logo:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_4)$$

$$\text{Fazendo } a_n = 1 \text{ e substituindo os valores}$$

$$\text{das raízes, temos: } P(x) = 1 \cdot (x + 5) \cdot (x + 0) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$

$$P(x) = 1 \cdot (x + 5) \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \Rightarrow P(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$$

3. Se -2 é uma das raízes da equação  $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ , determinar as outras duas raízes.



**Resolução:** A equação dada pode ser escrita da seguinte forma:  
 $(x-3) \cdot (x-3) \cdot (x+5) = 0$ .

Essa equação tem 3 raízes, tais que:

3: é uma raiz dupla, isto é, tem multiplicidade 2

-5: é uma raiz simples

2. Calcular  $m$  e  $n$  de modo que  $x^3 - mx^2 + nx - 4 = 0$ , admita o número 1 como raiz dupla.

**Resolução:** Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -m & n & -4 & 1 \\ \hline 1 & 1-m & 1-m+n & -m+n-3 & \\ 1 & 2-m & 3-2m+n & & \end{array}$$

Como os restos são iguais a zero, temos:

$$\begin{cases} -m + n - 3 = 0 \\ 3 - 2m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = 3 \\ -2m + n = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - n = -3 \\ -2m + n = -3 \end{cases}$$

$$-m = -6 \Rightarrow m = 6$$

$$\text{e } 6 - n = -3 \Rightarrow n = 9$$

$$\text{Portanto, } m = 6 \text{ e } n = 9$$

**6. Teorema das raízes complexas** Se uma equação  $P(x) = 0$ , de coeficientes reais, apresentar uma raiz complexa  $(a + bi)$ , então o complexo deste número também será raiz de  $P(x)$ , ambos com a mesma multiplicidade.

Num polinômio  $P(x)$  com coeficientes reais e grau ímpar há, no mínimo, uma raiz real.

#### **Exercício resolvido:**

1. Calcular as raízes da equação:  $x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 = 0$ , sendo que  $(2 + i)$  é uma dessas raízes.

**Resolução:** Se  $(2 + i)$  é uma raiz, então  $(2 - i)$  também o é:

$$\text{Temos: } P(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot Q(x) = 0$$

$$P(x) = [x - (2 + i)] \cdot [x - (2 - i)] \cdot Q(x) = 0$$

$$P(x) = [(x - 2) + i] \cdot [(x - 2) - i] \cdot Q(x) = 0$$

Temos o produto de uma soma por uma diferença (caso de fatoração). Logo:

$$P(x) = [(x - 2)^2 - i^2] \cdot Q(x) = 0$$

$$P(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot Q(x) = 0$$

Para obtermos as outras duas raízes, basta dividirmos, lembrando que:  $D = d \cdot q$

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 &= (x^2 - 4x + 5) \cdot (ax^2 + bx + c) \\ x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 &= \\ &= ax^4 + (b - 4a)x^3 + (c - 4b + 5a)x^2 + (-4c + 5b)x + 5c \end{aligned}$$

Pela igualdade dos termos correspondentes:  $a = 1$   
 $b - 4a = -1 \Rightarrow b - 4 \cdot 1 = -1 \Rightarrow b = -1 + 4 \Rightarrow b = 3$   
 $c - 4b + 5a = -5 \Rightarrow c - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -5$   
 $c - 12 + 5 = -5 \Rightarrow c = 2$

Portanto:  $Q(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow Q(x) = x^2 + 3x + 2$

De onde:  $x' = -2$  ou  $x'' = -1$

Assim:  $S = \{-2, -1, 2 + i, 2 - i\}$

### Exercícios propostos:

54. Compor os polinômios  $P(x)$ , onde as raízes são: a)  $-2, 1, 2$  e  $3$  e b)  $-3, 0, 1$

55. (UFSC) O número complexo  $(1 + 4i)$  é raiz da equação:  $x^2 + px + q = 0$  de coeficientes reais. Determine o valor de  $q - p$ .

56. (UFSE) Uma das raízes da equação  $3x^3 + 21x^2 + 48x + 30 = 0$  é  $3 + i$ . Em consequência, é verdade que:

- a) a equação não tem raízes reais
- b) a equação tem uma raiz dupla
- c) outra raiz da equação é  $i$
- d) outra raiz da equação é  $3$
- e) outra raiz da equação é  $3 - i$

57. (Cesgranrio-RJ) Sabendo-se que  $2i$  e  $1 + \sqrt{2}$  são raízes do polinômio  $x^5 + 4x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 24$ , podemos afirmar que:

- a) a soma de todas as raízes é igual a  $4$
- b)  $-2i$  e  $-1 - \sqrt{2}$  são raízes da equação
- c)  $-2i$  e  $3$  são raízes da equação
- d)  $-2i$  e  $6$  são raízes da equação
- e) o produto das raízes é  $-24$

58. Uma das raízes reais da equação  $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  é  $2 + i$ . O valor de  $a + b$  é: a)  $5$  b)  $-5$  c)  $-4$  d)  $4$  e)  $9$

**7. Relações de Girard** São as relações estabelecidas entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica. Assim, consideremos a equação algébrica:  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  (I)

Se agruparmos os termos em sua forma fatorada:

$a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = 0$ , obteremos a seguinte equação:

$$a_n x^n - a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x^{n-1} +$$

$$+ a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad (\text{II})$$

Pela igualdade de polinômios, temos em (I) e (II):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

A estas relações denominamos *relações de Girard*.

### Exercício resolvido:

1. Determinar as relações entre as raízes e os coeficientes das equações: a)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , b)  $2x^3 - 4x^2 + 6x + 10 = 0$  e c)  $2x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 18 = 0$

Resolução: a) Na equação  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , temos:  $n = 2$

$$a_n = a = 1; a_{n-1} = b = -4 \text{ e } a_{n-2} = a_0 = c = 3$$

Logo, temos: soma das raízes:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \Rightarrow \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{4}{1} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 4$$

produto das raízes:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = - \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{3}{1} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 3$$

b) Na equação  $2x^3 - 4x^2 + 6x + 10 = 0$ , temos:  $n = 3$

$$a_n = a = 2; a_{n-1} = b = -4; a_{n-2} = c = 6 \text{ e } a_{n-3} = a_0 = d = 10$$

Assim: soma das raízes:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = - \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

soma dos produtos tomados dois a dois:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \frac{a_{n-2}}{a_n} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{produto das raízes: } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \Rightarrow - \frac{d}{a} = \frac{-10}{2} = -5$$

c) Na equação  $2x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 18 = 0$ , temos:  $n = 4$

$$a_n = a = 2; a_{n-1} = b = 6; a_{n-2} = c = -1; a_{n-3} = d = 7 \text{ e}$$

$$a_{n-4} = a_0 = e = -18$$



Assim: soma das raízes:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-6}{2} = -3$$

soma dos produtos dois a dois:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{a_{n-2}}{a_n} \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

soma dos produtos três a três:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \Rightarrow \frac{-d}{a} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{produto das quatro raízes: } \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \Rightarrow \frac{e}{a} = -\frac{18}{2} = -9$$

### ⇒ Exercícios complementares:

**59.** (Mauá-SP) Dada a equação  $x^3 - 9x^2 + 26x + a = 0$ , determine o valor de  $a$  para que as raízes dessa equação sejam números naturais sucessivos.

**60.** (UFMG) Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são raízes da equação  $x^3 + x - 1 = 0$ , calcule o valor de  $\log$

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

**61.** (PUC-SP) Calcule a soma das raízes da equação

$$17x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 14x + 5 = 0$$

# Capítulo XVIII

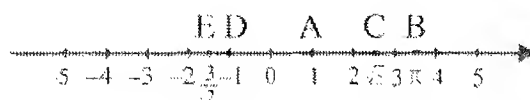
## GEOMETRIA ANALÍTICA

**1. Introdução** A Geometria Analítica foi desenvolvida durante o séc. XVII por René Descartes (1596-1650), filósofo, físico, advogado e matemático francês, autor da máxima “penso, logo existo”.

Sua obra foi exposta em seu livro *La Géométrie*, que introduziu a álgebra no estudo da geometria e vice-versa criando a geometria com coordenadas. Seus estudos foram tão significativos que a palavra *cartesiano* é uma homenagem ao seu nome, pois Descartes, em latim, é *Cartesius*.

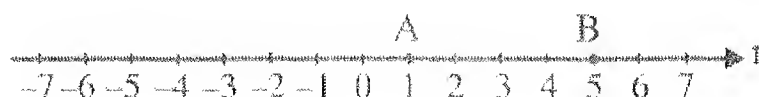
**2. Definição** Um dos objetivos da Geometria Analítica é determinar a reta que representa uma certa equação ou obter a equação de uma reta dada, estabelecendo uma relação entre a geometria e a álgebra.

**3. Sistema de coordenadas sobre uma reta** Estabelecer um sistema de coordenadas sobre uma reta, é associar, a cada ponto desta reta, um número real. Conseqüentemente, todo ponto dessa reta fica determinado, quando é dada a sua coordenada. Assim, na reta abaixo, temos:



Os pontos A, B, C, D e E estão associados, respectivamente, aos números reais 1,  $\pi$ ,  $\sqrt{5}$ , -1 e  $\frac{3}{2}$ . Portanto, podemos afirmar:  
a coordenada de A é o número real 1,  
a coordenada de B é o número real  $\pi$ , e assim por diante.

**4. Distância entre dois pontos na reta real** A distância entre dois pontos A e B, numa reta, é determinada pelo módulo ou valor absoluto da diferença entre as coordenadas de A e B, por isso, a distância será sempre um número real não-negativo e que representa o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ . Ex.:



$$d(A, B) = |5 - 1| = |1 - 5| = 4$$

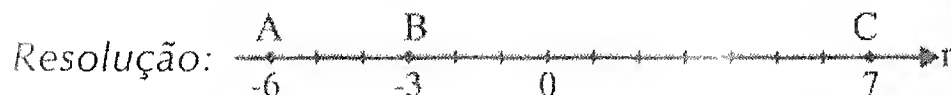
Portanto, de maneira geral, temos:

$d(A, B) = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ , onde as coordenadas de A e B são  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

**Exercício resolvido:**

1. Sabendo-se que na reta real os pontos A, B e C têm coordenadas -6, -3 e 7, respectivamente, determinar as distâncias abaixo:

a)  $d(A, B)$  b)  $d(B, C)$  c)  $d(A, C)$  d)  $d(C, A)$  e)  $d(B, A)$  f)  $d(C, B)$



$$a) d(A, B) = |-3 - (-6)| = |-3 + 6| = |3| = 3$$

$$b) d(B, C) = |7 - (-3)| = |7 + 3| = |10| = 10$$

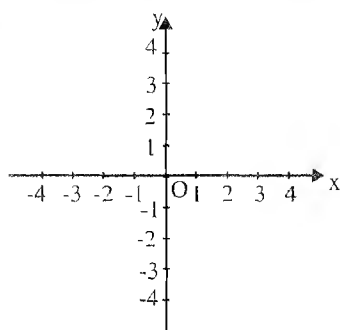
$$c) d(A, C) = |7 - (-6)| = |7 + 6| = |13| = 13$$

$$d) d(C, A) = |-6 - 7| = |-13| = 13$$

$$e) d(B, A) = |-6 - (-3)| = |-6 + 3| = |-3| = 3$$

$$f) d(C, B) = |-3 - 7| = |-10| = 10$$

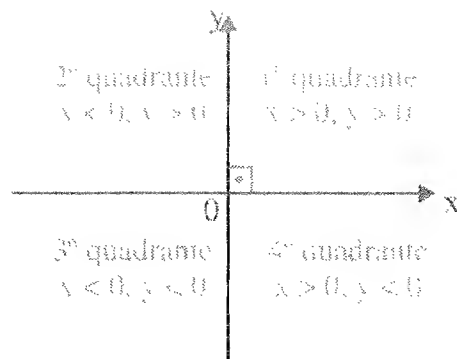
**5. Coordenadas cartesianas** Para representar graficamente um par ordenado de números reais, fixamos um referencial cartesiano ortogonal no plano:



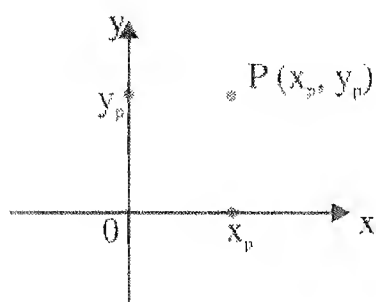
onde a reta  $x$  é o eixo das abscissas e a reta  $y$  é o eixo das ordenadas.

O ponto O, que intercepta as retas  $x$  e  $y$ , é denominado de *origem*.

Note que os eixos  $x$  e  $y$  dividem o plano em quatro regiões denominadas *quadrantes*:



Para determinarmos as coordenadas de um ponto  $P$ , traçamos linhas perpendiculares aos eixos  $x$  e  $y$ .



$x_p$  é a abscissa do ponto  $P$

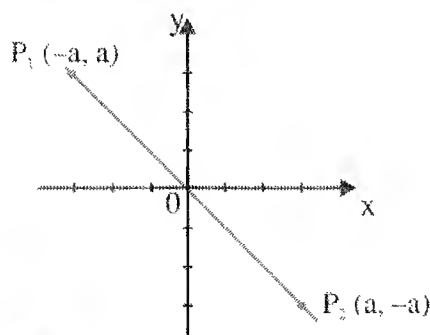
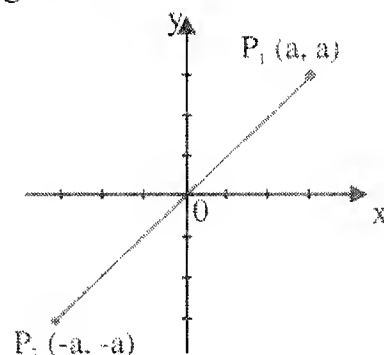
$y_p$  é a ordenada do ponto  $P$

$x_p$  e  $y_p$  constituem as coordenadas do ponto  $P$

Os pontos, conforme as coordenadas, pertencem a um dos quadrantes determinados pelos eixos  $x$  e  $y$ . Os pontos situados sobre os eixos  $x$  e  $y$ , por convenção, não pertencem a quadrante algum.

Se um ponto  $P$  pertencer à bissetriz do 1º e 3º quadrantes, então suas coordenadas serão denominadas iguais:

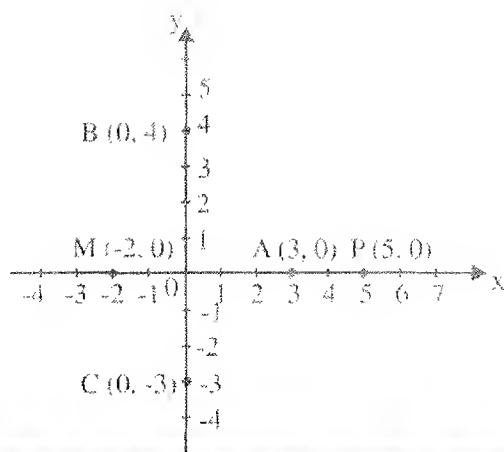
Se um ponto  $P$  pertencer à bissetriz do 2º e 4º quadrantes, então suas coordenadas serão denominadas simétricas:



### Exercício resolvido:

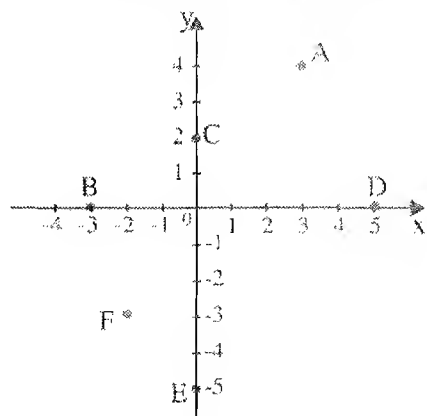
1. Representar no plano cartesiano ortogonal os pontos: a)  $A(3, 0)$ , b)  $P(5, 0)$ , c)  $M(-2, 0)$ , d)  $B(0, 4)$  e e)  $C(0, -3)$

Resolução:

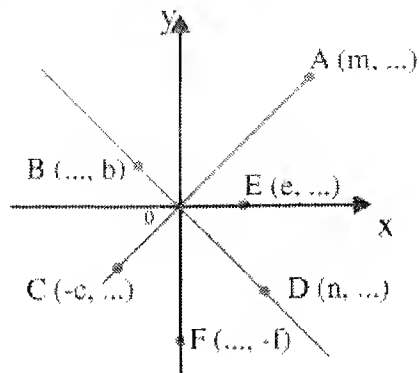


### Exercícios propostos:

1. Os pontos A, B e C, na reta real, têm coordenadas 2, -6 e -3, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos a seguir: a) AB, b) BC, c) AC, d) BA e e) CA
2. Sendo as coordenadas -1, -7 e -2 dos pontos A, B e C, respectivamente, na reta real, calcular: a)  $d(A, B)$ , b)  $d(B, C)$ , c)  $d(A, C)$  e d)  $d(C, A)$
3. Represente no plano cartesiano ortogonal os pontos: A(-2, 3), B(3, 0), C(-3, -2), D(1, 2), E(0, -4), F(2, 2) e G(-3, 3).
4. Dê as coordenadas dos pontos assinalados no gráfico abaixo:



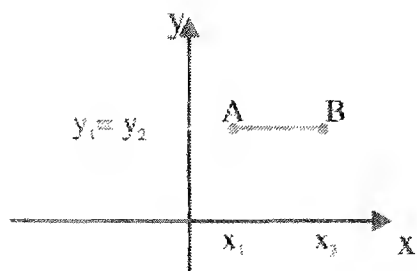
5. Em que quadrantes se encontram os seguintes pontos: a) (2, -5), b) (-1, 3), c) (4, 4), d) (-5, -1), e) (0, -3), f) (2, 0), g) (-1, 1) e h) (0, 2)
6. Dado o gráfico ao lado, completar com: a) ordenada do ponto A, b) abscissa do ponto B, c) ordenada do ponto C, d) ordenada do ponto D, e) ordenada do ponto E e f) abscissa do ponto F.



**6. Distância entre dois pontos de um plano** Através das coordenadas de dois pontos A e B, podemos localizar esses pontos num sistema cartesiano ortogonal e, com isso, determinar a distância  $d(A, B)$  entre eles.

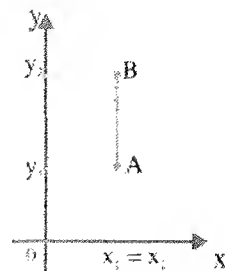
Assim, temos uma das três possibilidades a seguir, onde:  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ :

a)  $\overline{AB}$  é paralelo ao eixo das abscissas ( $\overline{AB} \parallel x$ )



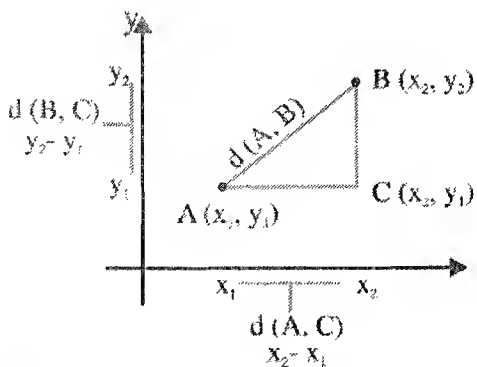
Como  $y_1 = y_2$ , a distância  $d(A, B)$  é dada pela diferença, em módulo, das abscissas  $x_1$  e  $x_2$ :  $d(A, B) = |x_2 - x_1|$

b)  $\overline{AB}$  é paralelo ao eixo das ordenadas ( $\overline{AB} \parallel y$ )



Como  $x_1 = x_2$ , a distância  $d(A, B)$  é dada pela diferença, em módulo, das ordenadas  $y_1$  e  $y_2$ :  $d(A, B) = |y_2 - y_1|$

c)  $\overline{AB}$  não é paralelo aos eixos  $x$  e  $y$ .



Nesse caso, basta observar a figura acima e verificar que o triângulo ABC é retângulo e portanto, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, sabendo-se que:

$$d(A, C) = |x_2 - x_1| \text{ e } d(B, C) = |y_2 - y_1|.$$

Logo:

$$[d(A, B)]^2 = [d(A, C)]^2 + [d(B, C)]^2$$

$$[d(A, B)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a distância entre os pontos  $A(5, 11)$  e  $B(2, 7)$ .

Resolução:  $A(5, 11)$ :  $x_1 = 5$  e  $y_1 = 11$  e  $B(2, 7)$ :  $x_2 = 2$  e  $y_2 = 7$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (7 - 11)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{9 + 16}$$

$$d(A, B) = \sqrt{25} \Rightarrow \boxed{d(A, B) = 5}$$

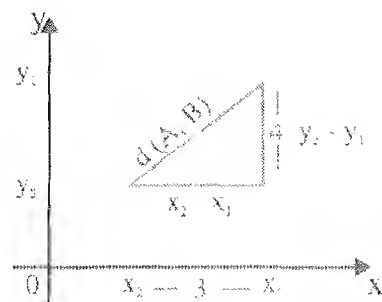
Logo, a distância é  $d = 5$ . Podemos verificar graficamente o resultado obtido algebricamente:

$$d(A, B)^2 = 3^2 + 4^2$$

$$d(A, B)^2 = 9 + 16$$

$$d(A, B) = \sqrt{25}$$

$$d(A, B) = 5$$



2. Calcular a distância  $d$  entre os pontos  $A(2, -5)$  e  $B(7, 7)$ .

*Resolução:*  $A(2, -5)$ :  $x_1 = 2$  e  $y_1 = -5$  e  $B(7, 7)$ :  $x_2 = 7$  e  $y_2 = 7$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(7 - 2)^2 + [7 - (-5)]^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{5^2 + 12^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{25 + 144} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{169}$$

$$\boxed{d(A, B) = 13}$$

3. Determine a distância do ponto  $A(4, -3)$  à origem do sistema.

*Resolução:* A origem do sistema é o ponto  $O(0, 0)$

Temos:  $A(4, -3)$ :  $x_1 = 4$  e  $y_1 = -3$

$O(0, 0)$ :  $x_2 = 0$  e  $y_2 = 0$

$$\text{Logo: } d(A, O) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d(A, O) = \sqrt{(0 - 4)^2 + [0 - (-3)]^2}$$

$$d(A, O) = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow d(A, O) = \sqrt{25} \Rightarrow \boxed{d(A, O) = 5}$$

4. Sabendo-se que o ponto  $P(a, 3)$  é eqüidistante dos pontos  $A(2, 5)$  e  $B(3, 4)$ , obter a abscissa  $a$  do ponto  $P$ .

*Resolução:*  $P$  é eqüidistante de  $A$  e  $B$ , o que significa que  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  têm o mesmo comprimento. Logo,  $d(P, A) = d(P, B)$

$$\text{a) } d(P, A) = \sqrt{(2 - a)^2 + (5 - 3)^2} \Rightarrow d(P, A) = \sqrt{(2 - a)^2 + 2^2}$$

$$d(P, A) = \sqrt{(2 - a)^2 + 4} \quad (\text{I})$$

$$\text{b) } d(P, B) = \sqrt{(3 - a)^2 + (4 - 3)^2} \Rightarrow d(P, B) = \sqrt{(3 - a)^2 + 1} \quad (\text{II})$$

Como  $d(P, A) = d(P, B)$ , então  $(\text{I}) = (\text{II})$

$$\sqrt{(2 - a)^2 + 4} = \sqrt{(3 - a)^2 + 1} \Rightarrow \left( \sqrt{(2 - a)^2 + 4} \right)^2 = \left( \sqrt{(3 - a)^2 + 1} \right)^2$$

$$(2 - a)^2 + 4 = (3 - a)^2 + 1 \Rightarrow 4 - 4a + a^2 + 4 = 9 - 6a + a^2 + 1$$

$$-4a + a^2 + 6a - a^2 = 9 + 1 - 4 - 4 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

5. Calcular o perímetro do triângulo cujos vértices são  $A(-1, -3)$ ,  $B(6, 1)$  e  $C(2, -5)$  e verificar se esse triângulo é retângulo.

*Resolução:* Para sabermos quanto mede cada lado, basta calcularmos as distâncias entre os pontos:

$$d(A, B) = \sqrt{[6 - (-1)]^2 + [1 - (-3)]^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(6+1)^2 + (1+3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{7^2 + 4^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{49 + 16} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{65}$$

$$d(A, C) = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + [-5 - (-3)]^2} \Rightarrow d(A, C) = \sqrt{(2+1)^2 + (-5+3)^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{3^2 + (-2)^2} \Rightarrow d(A, C) = \sqrt{9 + 4} \Rightarrow d(A, C) = \sqrt{13}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} \Rightarrow d(B, C) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{16 + 32} \Rightarrow \boxed{d(B, C) = \sqrt{52}}$$

$$\text{perímetro} = d(A, B) + d(A, C) + d(B, C) = \sqrt{65} + \sqrt{13} + \sqrt{52}$$

$$\text{perímetro} = \sqrt{65} + \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{65} + 3 \cdot \sqrt{13}$$

Agora podemos verificar se o triângulo ABC é retângulo:

Como o lado AB é o maior lado do triângulo, então, pelo

teorema de Pitágoras:  $[d(A, B)]^2 = [d(A, C)]^2 + [d(B, C)]^2$

$$(\sqrt{65})^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{52})^2 \Rightarrow 65 = 13 + 52 \Rightarrow 65 = 65$$

Logo, o triângulo ABC é retângulo e sua hipotenusa é AB.

### Exercícios propostos:

7. Calcular as distâncias  $d$  entre os pontos abaixo: a)  $A(4, -1)$  e  $B(2, 1)$ , b)  $C(-3, 2)$  e  $D(4, -6)$  e c)  $E(-1, -3)$  e  $F(-2, -5)$

8. Calcular a distância do ponto  $P(8, -6)$  à origem do sistema.

9. A distância entre os pontos  $A(x, 3)$  e  $B(-1, 7)$  é 5. Então:

a)  $x = 3$  ou  $x = -5$       c)  $x = 1$  ou  $x = -3$       e)  $x = -6$  ou  $x = -1$

b)  $x = 2$  ou  $x = -4$       d)  $x = 0$  ou  $x = -2$

10. (UECE) Se o ponto  $P(m, 0)$  é equidistante dos pontos  $P_1(2, 4)$  e  $P_2(4, 6)$ , então  $m$  é igual a: a) 6    b) 7    c) 8    d) 9

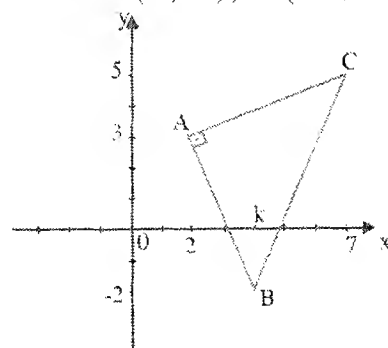
11. (UFES) Quais as coordenadas do ponto  $P$  do plano cartesiano que pertence à bissetriz do segundo quadrante e equidista dos pontos  $A(0, 3)$  e  $B(-1, 0)$ ? a)  $(2, 2)$     b)  $(0, 2)$     c)  $(2, 0)$     d)  $(-2, 2)$     e)  $(2, -2)$

12. (UFSC) Dados os pontos  $A(-1, -1)$ ,  $B(5, -7)$  e  $C(x, 2)$ , determine  $x$  sabendo que o ponto  $C$  é equidistante dos pontos  $A$  e  $B$ .

13. O perímetro do triângulo ABC cujos vértices são  $A(0, 0)$ ,  $B(12, 5)$  e  $C(0, -4)$  é: a) 23    b) 33    c) 22    d) 11    e) 32

14. (FGV-SP) Sabe-se que o triângulo ABC da figura ao lado é retângulo em A. Calcule o valor de  $k$ .

15. (PUC-SP) Sendo  $A(3, 1)$ ,  $B(4, -4)$  e  $C(-2, 2)$  os vértices de um triângulo, então esse triângulo é:





- a) retângulo e não isósceles      d) isósceles e não retângulo  
 b) retângulo e isósceles      e) n. d. a.  
 c) equilátero

**16.** (PUC-SP) Os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 3)$  e  $(10, 0)$  são vértices de um retângulo. O quarto vértice do retângulo é o ponto:

- a)  $(9, -3)$  b)  $(9, -2)$  c)  $(9, -1)$  d)  $(8, -2)$  e)  $(8, -1)$

**7. Ponto que divide um segmento em uma dada razão** Sejam os pontos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $M(x_m, y_m)$ , sendo  $M$  ( $M \neq B$ ) um ponto que divide o segmento  $\overline{AB}$  na razão:

$$r = \frac{AM}{MB}$$

Na figura ao lado, temos:

$$\triangle APM \sim \triangle MRB$$

Logo, seus lados são proporcionais:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{MR} \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{QR}{RB} \quad (\text{II})$$

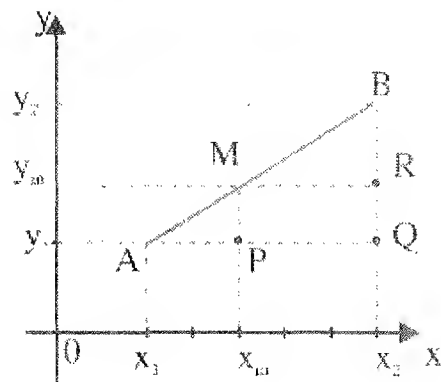
Como  $\frac{AM}{MB} = r$ , então: (I)  $\frac{AP}{MR} = r$  e  $\frac{QR}{RB} = r$  (II)

$$\frac{x_m - x_1}{x_2 - x_m} = r \quad \text{e} \quad \frac{y_m - y_1}{y_2 - y_m} = r$$

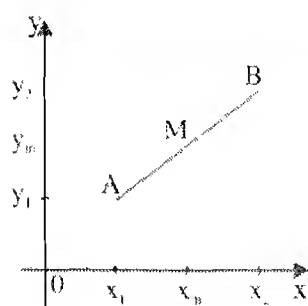
$$x_m - x_1 = r \cdot (x_2 - x_m) \quad \text{e} \quad y_m - y_1 = r \cdot (y_2 - y_m)$$

$$x_m(1 + r) = rx_2 + x_1 \quad \text{e} \quad y_m(1 + r) = ry_2 + y_1$$

$$\boxed{x_m = \frac{rx_2 + x_1}{1+r} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}}, \text{ que são coordenadas de } M.$$



**7a. Ponto Médio** O ponto médio é definido quando temos razão  $r = 1$ . Assim:



$$x_m = \frac{1 \cdot x_2 + x_1}{1+1}$$

$$y_m = \frac{1 \cdot y_2 + y_1}{1+1}$$

$$x_m = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Note que as coordenadas do ponto médio  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ , de um segmento qualquer, são

a média aritmética das coordenadas dos extremos desse segmento.

### Exercícios resolvidos:

1. Dados A(2, 3) e B(6, 1), encontrar o ponto médio M do segmento  $\overline{AB}$ .

Resolução:  $M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{6 + 2}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right)$

$M\left(\frac{8}{2}, \frac{4}{2}\right) \Rightarrow M(4, 2)$

2. Calcular os pontos médios dos lados de um triângulo, onde os vértices são: A(4, 0), B(0, 3) e C(5, 7).


Resolução: Temos:

$$M_{AB}\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \Rightarrow M_{AB}\left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{3 + 0}{2}\right) \Rightarrow M_{AB}\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

$$M_{AC}\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \Rightarrow M_{AC}\left(\frac{5 + 4}{2}, \frac{7 + 0}{2}\right) \Rightarrow M_{AC}\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

$$M_{BC}\left(\frac{5 + 0}{2}, \frac{7 + 3}{2}\right) \Rightarrow M_{BC}\left(\frac{5}{2}; 5\right)$$

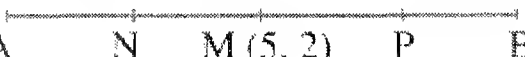
3. Determine as coordenadas dos três pontos M, N e P que dividem em 4 partes iguais o segmento  $\overline{AB}$  onde A(10, 1) e B(0, 3).

Resolução: 

M é o ponto médio de  $\overline{AB}$

Logo:  $M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{0 + 10}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) \Rightarrow M(5, 2)$

Vamos calcular os pontos médios dos segmentos

$\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$ : 

$$N\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{5 + 10}{2}, \frac{2 + 1}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{15}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{0 + 5}{2}, \frac{3 + 2}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Logo, o segmento  $\overline{AB}$  ficou dividido em quatro partes iguais pelos pontos

$$N\left(\frac{15}{2}, \frac{3}{2}\right), M(5, 2) \text{ e } P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

4. Sendo  $A(3, 7)$  e  $B(1, -5)$ , dividir o segmento  $\overline{AB}$  na razão  $r = 3$ .

Resolução: Temos:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_1 = 7$ ,  $y_2 = -5$  e  $r = 3$

Seja  $M(x_m, y_m)$  o ponto que divide  $\overline{AB}$  na razão  $r = 3$ , assim, substituímos os valores acima em:

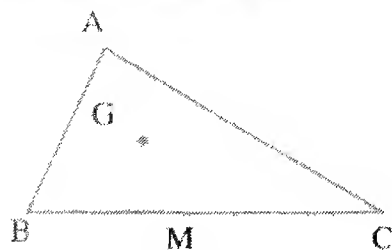
$$x_m = \frac{rx_2 + x_1}{1+r} = \frac{3 \cdot (1) + 3}{1+3} = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow x_m = \frac{3}{2}$$

$$y_m = \frac{ry_2 + y_1}{1+r} = \frac{3 \cdot (-5) + 7}{1+3} = \frac{-15+7}{4} = \frac{-8}{4} \Rightarrow y_m = -2$$

Logo, o segmento  $\overline{AB}$  ficou dividido na razão  $r = 3$

pelo ponto  $M\left(\frac{3}{2}; -2\right)$ .

**8. Baricentro** O baricentro (G) de um triângulo é o ponto de intersecção das medianas do triângulo:



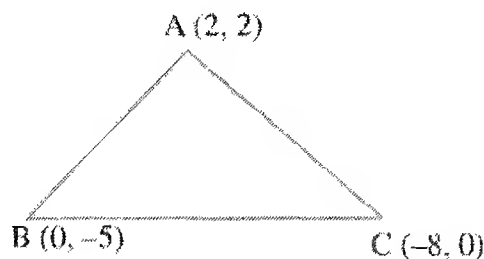
O baricentro divide as medianas na razão de  $2 : 1$ . Na figura, temos:  $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$ . As coordenadas do baricentro G, de um triângulo ABC, são iguais à média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo:

$$x_g = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_g = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar o baricentro de um triângulo ABC cujos vértices são  $(0, -5)$ ,  $(2, 2)$  e  $(-8, 0)$ .

Resolução:  $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$



$$G\left(\frac{2+0-8}{3}, \frac{2-5+0}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{-6}{3}, \frac{-3}{3}\right) \Rightarrow \boxed{G(-2, -1)}$$

2. Sabendo-se que o baricentro de um triângulo ABC, onde  $A(1, 5)$  é  $G(4, 2)$ , calcule o ponto médio do lado BC.

Resolução:

$$x_g = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 4 = \frac{1+x_B+x_C}{3} \Rightarrow 12 = 1+x_B+x_C \Rightarrow x_B+x_C = 11 \text{ (I)}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 2 = \frac{5 + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 6 = 5 + y_B + y_C \Rightarrow y_B + y_C = 1 \text{ (II)}$$

Como M é o ponto médio de  $\overline{BC}$ , então:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

Substituindo-se os valores de (I) e (II), temos:

$$x_M = \frac{11}{2} \text{ e } y_M = \frac{1}{2}. \text{ Portanto, } M\left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

### ⇒ Exercícios propostos:

17. Dados A(7, -2) e B(1, 6), obter o ponto médio M do segmento  $\overline{AB}$ .

18. Calcule as coordenadas de um ponto P, que divide um segmento  $\overline{AB}$ , na razão  $r$ , nos seguintes casos: a) A(-3, 2), B(5, -1) e  $r = 1$ , b) A(12, -4), B(3, -8) e  $r = 3$  e c) A(0, 2), B(5, 7) e  $r = -2$

19. Determine os pontos médios dos lados de um triângulo cujos vértices são: A(1, 2), B(6, 4) e C(3, 7).

20. Calcule as coordenadas do ponto B, sabendo-se que o ponto A tem coordenadas (2, 1) e o segmento  $\overline{AB}$  tem como ponto médio o ponto M(3, 3).

21. Divida o segmento  $\overline{AB}$  onde A(-1, 6) e B(-3, -2) em quatro partes iguais.

22. O baricentro do triângulo ABC, onde seus vértices são: A(3, 7), B(1, 2) e C(6, 4) é:

a)  $\left(\frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right)$  b)  $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{13}\right)$  c)  $\left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$  d)  $\left(\frac{3}{13}, \frac{3}{10}\right)$  e) n. d. a.

23. Sabendo-se que o baricentro de um triângulo ABC, onde A(-2, 2), é G(1, -3), calcule o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ .

24. (UFRN) Se três vértices de um retângulo são os pontos (-2, -1), (3, -1) e (3, 3), o quarto vértice é o ponto:

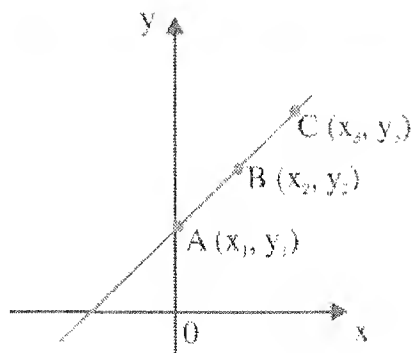
a) (-1, -2) b) (-2, 3) c) (-1, -1) d) (-1, 3) e) (3, -2)

25. (UFPA) O ponto A(4, 8) e B(-2, 2) são vértices opostos de um quadrado cuja área vale: a) 36 b) 20 c) 18 d) 16 e) 12

26. (Mauá-SP) Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios dos lados do triângulo são: M(-2, 1), N(5, 2) e P(2, -3).

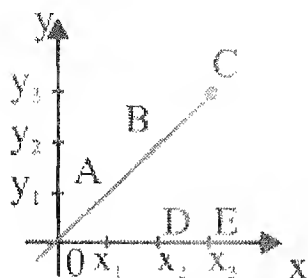
## Estudo da reta

**1. Condição de alinhamento de três pontos** Consideremos três pontos de uma mesma reta,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$ , conforme a figura abaixo:



Determinemos uma *condição* para que três pontos estejam alinhados, relacionando as coordenadas desses pontos.

Da figura, concluímos que, como  $\triangle ACE \sim \triangle ABD$ , então:



$$\frac{d(A, E)}{d(A, D)} = \frac{d(E, C)}{d(D, B)}, \text{ ou seja: } \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1},$$

$$\text{ou: } (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Escrevendo a mesma equação sob a forma de determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Provemos que, nessas condições,  $D = 0$ .

$$D = x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2$$

$$D = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad (\text{I})$$

Retornemos, portanto, à equação anterior:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 0$$

$$[\text{MMC: } (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1)] \frac{(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) - [(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)]}{(x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1)} = 0$$

$$x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1 - [x_2 y_3 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_1 y_1] = 0$$

$$x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1 - x_2 y_3 + x_1 y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_1 = 0$$

$$x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1) = 0 \quad (\text{II})$$

Multiplicando ambos os membros da equação por  $(-1)$ , temos:

$$-x_3 y_2 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - \cancel{x_1 y_1} + x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + \cancel{x_1 y_1} = 0$$

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \text{ (II)}$$

Note que (I) = (II), logo:  $D = 0$

Assim, podemos dizer que:

Três pontos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  estão alinhados se, e

$$\text{somente se: } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por outro lado, se  $D \neq 0$ , então os pontos A, B e C serão vértices de um triângulo cuja área é:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |D|, \text{ onde o valor do determinante é sempre dado em}$$

módulo, pois a área não pode ser um número negativo.

### Exercícios resolvidos:

1. Verificar se os pontos A, B e C abaixo estão alinhados (são colineares).

a)  $A(-1, 3)$ ,  $B(3, 3)$  e  $C(2, 0)$  e b)  $A(5, 5)$ ,  $B(2, 2)$  e  $C(-3, -3)$

*Resolução:* Devemos calcular o valor do determinante D. Se  $D = 0$ , concluímos que os pontos estão alinhados; caso contrário, são vértices de um triângulo.

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -3 + 6 - 9 - 6 \\ &D = -12 \neq 0 \end{aligned}$$

Como  $D \neq 0$ , logo os pontos A, B e C não estão alinhados.

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 10 - 15 - 6 - 10 + 15 + 6 = 0$$

$D = 0$ , portanto, os pontos A, B e C são colineares.

2. Determine o valor de  $a$  para que os pontos  $A(2, -3)$ ,  $B(a, 7)$  e  $C(a, 1)$  sejam colineares.

*Resolução:* Para que os pontos A, B e C sejam colineares, devemos impor a condição  $D = 0$ . Assim:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ a & 7 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$14 - 3a + a + 3a - 2 - 7a = 0 \Rightarrow -6a + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

3. Determine o valor de  $b$  para que os pontos  $A(b, 1)$ ,  $B(1, 3)$  e  $C(3, 5)$  sejam os vértices de um triângulo.

*Resolução:* Para que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam vértices de um triângulo, devemos impor a condição:  $D \neq 0$ . Assim:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ então } \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ logo:}$$

$$3b + 3 + 5 - 1 - 5b - 9 \neq 0 \Rightarrow -2b - 2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{-2b \neq 2 \Rightarrow b \neq -1}$$

4. Calcular a área do triângulo  $ABC$ , cujas coordenadas são:  $A(3, 1)$ ,  $B(2, -4)$  e  $C(4, 2)$ .

*Resolução:* A área do triângulo, conhecendo-se as coordenadas dos seus vértices, é dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |D| \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Então: } D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

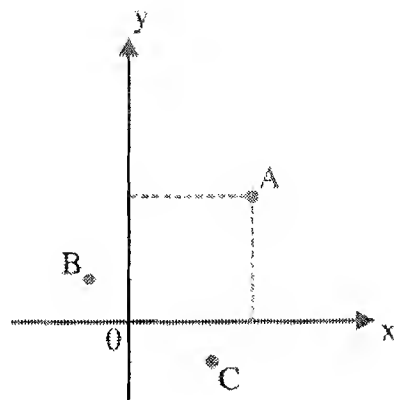
$$D = -12 + 4 + 4 - 2 - 6 + 16 \Rightarrow D = -4$$

$$\text{Logo: } A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |-4| \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \Rightarrow A_{\Delta} = 2$$

5. Calcular a área do triângulo  $ABC$  na figura:

*Resolução:* Pela figura, podemos observar que as coordenadas dos vértices são:  $A(3, 3)$ ,  $B(-1, 1)$  e  $C(2, -1)$ . Logo, a área do triângulo  $ABC$  é dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 1 + 3 + 3 - 2 \Rightarrow D = 14$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |14| \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 14$$

$$\boxed{D = 7}$$

6. Dados os pontos  $A(-3a, 2)$ ,  $B(0, -2)$  e  $C(a, 4)$ , determine o valor de  $a$  para que  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam vértices de um triângulo de área igual a 22.

Resolução: Temos:  $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |D|$

$$22 = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3a & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ a & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6a + 2a + 12a + 2a \Rightarrow D = 22a$$

$$\text{E a área: } 22 = \frac{1}{2} \cdot |22a| \Rightarrow 22 = \frac{1}{2} \cdot 22a \Rightarrow 22 = 11a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

### = Exercícios propostos:

**27.** Verifique se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão alinhados nos seguintes casos: a)  $A(1, 7)$ ,  $B(-2, 6)$  e  $C(4, 8)$ , b)  $A(2, -3)$ ,  $B(-1, 4)$  e  $C(1, 1)$  e c)  $A(2, 5)$ ,  $B(4, 9)$  e  $C(1, 3)$

**28.** O valor de  $a$  para que os pontos  $A(1, 4)$ ,  $B(a, -5)$  e  $C(-1, 2)$  estejam alinhados é: a)  $-8$  b)  $-2$  c)  $0$  d)  $8$  e)  $2$

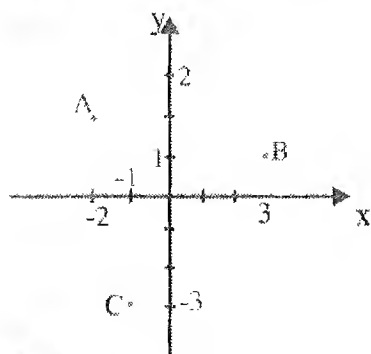
**29.** (UFGO) O valor de  $m$  para que os pontos  $A = (2m + 1; 2)$ ,  $B(-6, -5)$  e  $C(0, 1)$  sejam colineares, é: a)  $-1$  b)  $-\frac{1}{2}$  c)  $0$  d)  $\frac{1}{2}$  e)  $1$

**30.** (UFMS) A área do triângulo cujos vértices são os pontos  $A(2, 3)$ ,  $B(4, -5)$  e  $C(-3, -6)$  em unidades de área é:



31. (UFSC) Num sistema de coordenadas cartesianas, com suas unidades em centímetros, são localizados 3 pontos: A(-2, 3), B(3, -3) e C(6, 3). Calcule, em  $\text{cm}^2$ , a área da figura determinada por esses 3 pontos.

32. (Fatec-SP) Calcule a área do triângulo ABC da figura ao lado



33. (Cesgranrio-RJ) Num sistema de coordenadas retangulares, com unidade de comprimento igual a um centímetro, considere o triângulo de vértices  $A = (1, 0)$ ,  $B = (3, 2)$  e  $C = (1, 4)$ .

Indique as afirmações verdadeiras e as falsas.

0-0) O triângulo ABC é retângulo

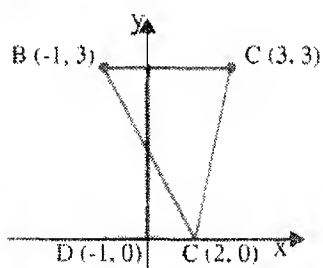
1-1) O triângulo ABC é equilátero

2-2) O triângulo ABC é isósceles

3-3) A área do triângulo ABC é  $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$

4-4) A maior altura do triângulo ABC mede 2 cm

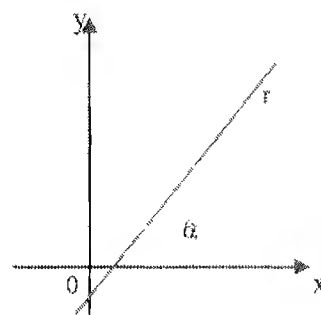
34. Determinar a área do quadrilátero ABCD, cujos vértices estão indicados na figura abaixo.



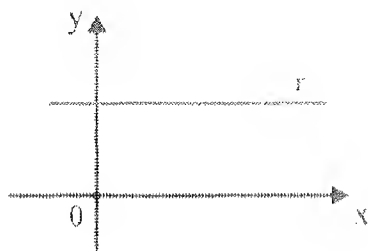
(Sugestão: calcule as áreas dos triângulos ABC e BAD e some-as para obter a área do quadrilátero ABCD)

**2. Inclinação de uma reta** À medida do ângulo  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é o menor ângulo que uma reta forma com o eixo  $x$ , tomado no sentido anti-horário, chamamos de *inclinação da reta  $r$*  do plano cartesiano.

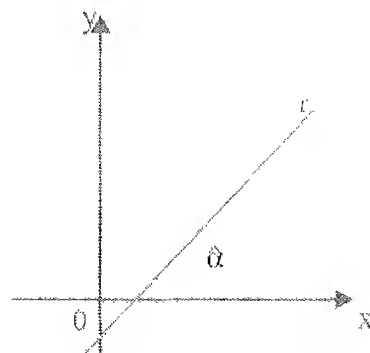
A partir desta definição, temos quatro casos a considerar, onde  $\hat{\alpha}$  é único e  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .



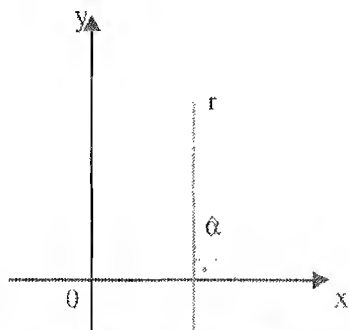
a) Se  $r$  é paralela ao eixo  $x$ , por convenção, a inclinação da reta  $r$  é  $\alpha = 0^\circ$



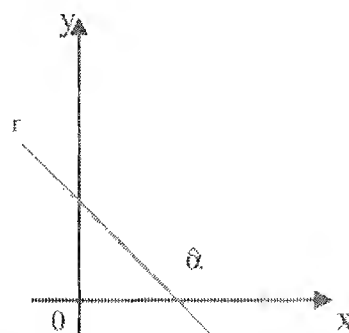
b) Se  $\hat{\alpha}$  é um ângulo agudo, então  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .



c) Se  $\hat{\alpha}$  é um ângulo reto, então  $\alpha = 90^\circ$



d) Se  $\hat{\alpha}$  é um ângulo obtuso, então  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

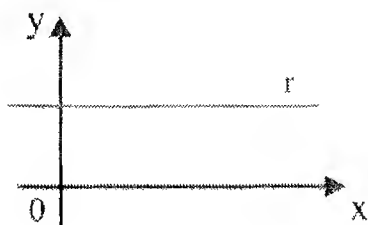


**3. Coeficiente angular de uma reta** Chamamos de *coeficiente angular* ou *declividade* de uma reta  $r$  o número real definido por:

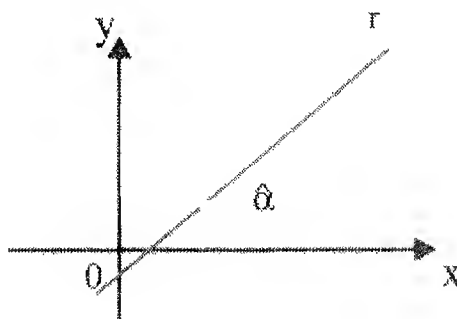
$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Como o coeficiente angular é definido pela tangente de sua inclinação  $\alpha$ , teremos quatro casos a considerar, lembrando que: *inclinação* é a medida do ângulo e *declive* (coeficiente angular) é o valor da tangente desse ângulo:

a)  $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0^\circ$ , logo  $m = 0$

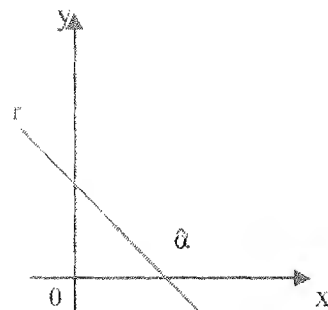
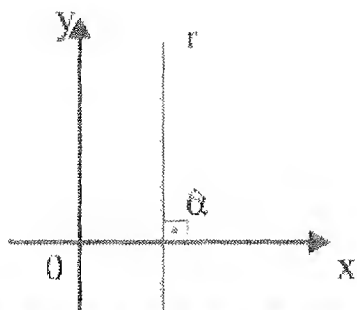


b)  $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$ , logo  $m > 0$



c)  $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha$  não é definida, logo:  $\nexists m$

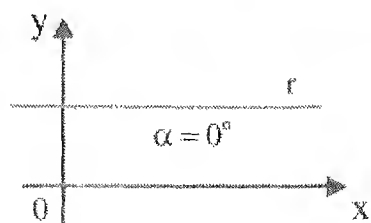
d)  $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha < 0$ , logo  $m < 0$



### Exercícios resolvidos:

1. Dado  $\alpha = 0^\circ$ , calcular o coeficiente angular da reta  $r$ .

Resolução:  $m = \text{tg } \alpha$

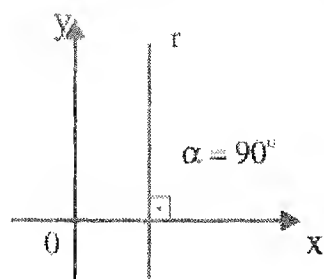


$$m = \text{tg } 0^\circ \Rightarrow m = \frac{\text{sen } 0^\circ}{\text{cos } 0^\circ} \Rightarrow m = \frac{0}{1}$$

$$\boxed{m = 0}$$

2. Sendo  $\alpha = 90^\circ$ , calcular o coeficiente angular da reta  $r$ .

Resolução:  $m = \text{tg } \alpha$

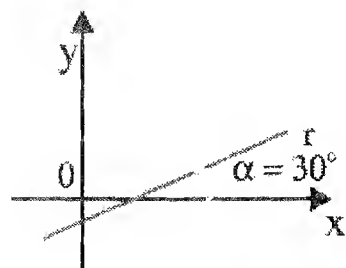


$$m = \text{tg } 90^\circ \Rightarrow m = \frac{\text{sen } 90^\circ}{\text{cos } 90^\circ} \Rightarrow m = \frac{1}{0}$$

$$\boxed{\text{Logo: } \nexists m}$$

3. Sendo  $\alpha = 30^\circ$ , determinar o coeficiente angular da reta  $r$ .

Resolução:  $m = \text{tg } \alpha$

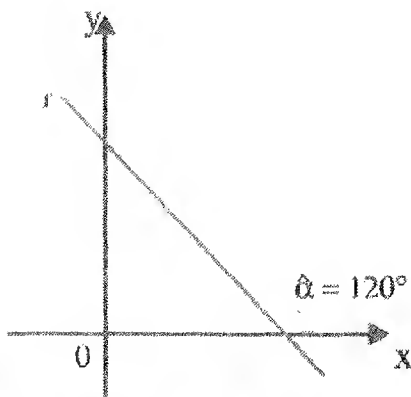


$$m = \text{tg } 30^\circ \Rightarrow m = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{cos } 30^\circ} \Rightarrow m = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{m = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

4. Dado  $\alpha = 120^\circ$ , obter o coeficiente angular da reta  $r$ .

Resolução:



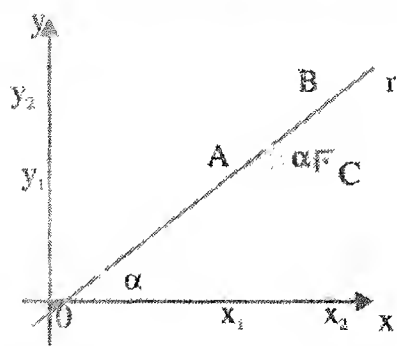
$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

$$m = \operatorname{tg} 120^\circ \Rightarrow m = -\operatorname{tg} 60^\circ$$

$$m = -\left[ \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} \right] \Rightarrow m = -\left[ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right]$$

$$m = -\sqrt{3}$$

**4. Cálculo do coeficiente angular** Se a inclinação  $\alpha$  nos for desconhecida, podemos calcular o coeficiente angular  $m$  através das coordenadas de dois pontos da reta. Observe o exemplo:



Como o triângulo ABC é retângulo, podemos concluir que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d(CB)}{d(CA)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Logo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ com } x_1 \neq x_2$$

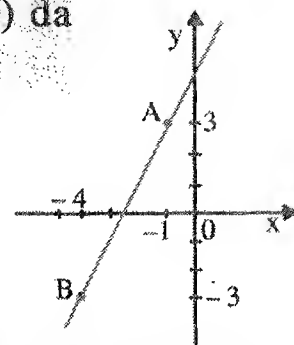
Esta relação é válida para ângulos agudos ou obtusos.

#### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a declividade (ou coeficiente angular) da reta que passa pelos pontos A(-1, 3) e B(-4, -3).

Resolução:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-4 - (-1)} = \frac{-6}{-4 + 1}$

$$m = \frac{-6}{-3} = 2$$



2. Determinar o valor de  $a$  para que a declividade da reta que passa pelos pontos A(a, 5) e B(3, 8) seja 3.

Resolução:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 3 = \frac{8 - 5}{3 - a} \Rightarrow 3 = \frac{3}{3 - a} \Rightarrow 3 \cdot (3 - a) = 3$

$$3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$$

3. Sabendo-se que uma reta  $r$  tem inclinação de  $45^\circ$  e que passa pelo ponto  $A(1, 4)$ , determinar o ponto dessa reta que tem ordenada 5.

Resolução:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = m \Rightarrow m = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} \Rightarrow m = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow m = 1$$

Sendo  $A(1, 4)$  e  $B(x, 5)$ , temos:  $1 = \frac{5 - 4}{x - 1} \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

### Exercícios propostos:

35. Uma reta forma um ângulo de  $60^\circ$  com o sentido positivo do eixo  $x$ . Determinar o coeficiente angular dessa reta.

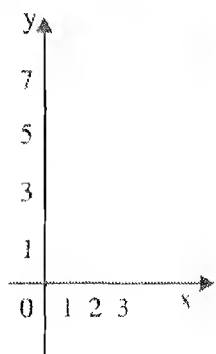
36. Determinar o coeficiente angular da reta que passa pelos seguintes pontos: a)  $A(-5, -3)$  e  $B(-4, 3)$ , b)  $C(2, -5)$  e  $D(2, 5)$ , c)  $E(9, -4)$  e  $F(1, -4)$

37. Obter o coeficiente angular, a tangente da inclinação e a inclinação da reta que passa pelos seguintes pontos:

a)  $A(-2, 7)$  e  $B(-4, 5)$ , b)  $C(3, 1)$  e  $D(3, 5)$ , c)  $E(2, 4)$  e  $F(6, 4)$

38. O valor de  $a$  para que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos  $A(a, 1)$  e  $B(5, a)$  seja  $-2$  é: a) 5 b) 1 c) 9 d)  $-5$  e)  $-1$

**5. Equação da reta** A equação da reta é determinada pela relação entre as abscissas e as ordenadas. Observe o exemplo:

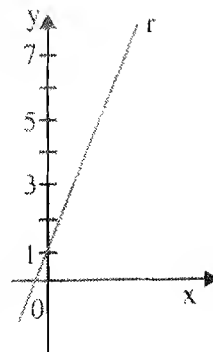


x	y
0	1
1	3
2	5
3	7

Traçando a reta  $r$ , notamos que todos os pontos dessa reta obedecem à mesma lei:  $y = 2x + 1$

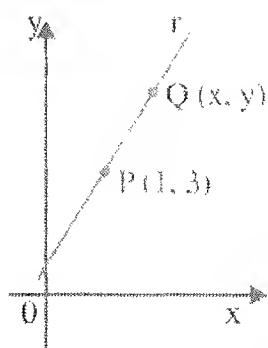
Essa função é definida por uma equação do  $1^\circ$  grau:  $2x - y + 1 = 0$ , cujo gráfico é uma *reta*.

Assim, podemos afirmar que uma linha reta representa uma equação do  $1^\circ$  grau com duas variáveis ( $x$  e  $y$ ) e que, dada uma reta  $r$ , podemos escrever a equação dessa reta.



## 6. Determinando a equação da reta

a) **Conhecendo um ponto e o coeficiente angular:** Consideremos um ponto  $P(1, 3)$  e o coeficiente angular  $m = 2$



Para determinarmos a equação da reta  $r$ , escolhemos um ponto  $Q(x, y)$  qualquer, pertencente a essa reta ( $Q \neq P$ )

Como o coeficiente angular do segmento  $\overline{PQ}$  tem de ser o mesmo da reta, então:

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{y-3}{x-1} = m_r = 2, \text{ onde } m_{\overline{PQ}} \text{ é o coeficiente angular do segmento } \overline{PQ}.$$

$m_r$  é o coeficiente angular da reta  $r$ . Logo,  $\frac{y-3}{x-1} = 2$ . Então:

$$2 \cdot (x-1) = y-3 \Rightarrow 2x-2 = y-3 \Rightarrow 2x-2-y+3 = 0$$

$$2x-y+1 = 0 \text{ (equação da reta } r)$$

A partir desse exemplo, podemos generalizar:

Dados  $P(x_1, y_1)$  e  $Q(x, y)$ , com  $P \in r$ ,  $Q \in r$  e  $m$  a declividade da

reta  $r$ , a equação da reta  $r$  será:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1 = m(x-x_1)$$

### Exercícios resolvidos:

1. Obter a equação da reta que passa pelo ponto  $P(4, 10)$  e tem coeficiente angular 3:

**Resolução:** Temos:  $m = 3$ ,  $x_1 = 4$ ,  $y_1 = 10$ , e  $Q(x, y)$

$$y-y_1 = m \cdot (x-x_1) \Rightarrow y-10 = 3 \cdot (x-4)$$

$$y-10 = 3x-12 \Rightarrow y-10-3x+12 = 0 \Rightarrow -3x+y+2 = 0$$

$$3x-y-2 = 0$$

2. Sabendo-se que uma reta tem uma inclinação de  $45^\circ$ , determine a equação da reta que passa pelo ponto  $P(5, -3)$ .

**Resolução:** Temos:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = -3$  e  $Q(x, y)$

Como  $\alpha = 45^\circ$ , então  $\text{tg } \alpha = \text{tg } 45^\circ = m$  e  $\text{tg } 45^\circ = 1 \Rightarrow m = 1$

Com isso, podemos calcular a equação da reta:

$$y-y_1 = m \cdot (x-x_1) \Rightarrow y-(-3) = 1 \cdot (x-5) \Rightarrow y+3 = x-5$$

$$x-5-y-3 = 0 \Rightarrow x-y-8 = 0$$

b) **Conhecendo dois pontos:**  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ : Consideremos os pontos  $A(1, 4)$  e  $B(2, 1)$ .

Com estes dados, podemos determinar o coeficiente angular da reta, dado por:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 4}{2 - 1} = -\frac{3}{1} = -3$

A partir deste dado, podemos utilizar qualquer dos dois pontos para escrevermos a equação da reta:

$$A(1, 4), m = -3 \text{ e } Q(x, y)$$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 4 = -3x + 3$$

$$3x + y - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0 \text{ (equação da reta)}$$

**7. Equação de uma reta vertical** Seja uma reta  $r$  vertical passando pelo ponto  $P(x_1, y_1)$ .

Qualquer ponto pertencente a essa reta apresenta a característica de que apenas a ordenada varia e a abscissa tem sempre o mesmo valor.

Se  $Q(x, y)$  pertence a essa reta, então a equação da reta vertical  $r$  é dada por  $x = x_1$ .

Note que  $\alpha = 90^\circ$  e, portanto,  $\text{tg } \alpha$  não é definida. Assim:  $m$  (coeficiente angular), também não é definida; pois:

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha \text{ não é definida, portanto } \nexists m.$$

### = Exercícios propostos:

**39.** A equação de uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $P(4, -2)$  e tem coeficiente angular igual a  $-3$ , é:

a)  $4x - y + 2 = 0$       c)  $x - 4y + 2 = 0$       e)  $3x + y - 10 = 0$

b)  $x + 3y - 10 = 0$       d)  $-2x + 4y - 3 = 0$

**40.** A equação de uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $P(-1, 5)$  e tem uma inclinação de  $60^\circ$  é:

a)  $x - \sqrt{3}y - (5 + \sqrt{3}) = 0$       d)  $\sqrt{3}x - y + (5 + \sqrt{3}) = 0$

b)  $5x - y + (5 - \sqrt{3}) = 0$       e)  $x - 5y + \sqrt{3} = 0$

c)  $\sqrt{3}x + 5y - (5 + \sqrt{3}) = 0$

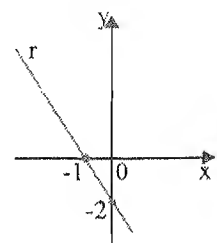
**41.** (Fuvest-SP) Dados os pontos  $A(2, 3)$  e  $B(8, 5)$ , determine a equação da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

**42.** (UFPB) A reta que passa pelos pontos  $(0, 3)$  e  $(5, 0)$  também passa pelo ponto a)  $(5, 3)$  b)  $(3, 5)$  c)  $(10, -3)$  d)  $(0, 0)$  e)  $(-13, 5)$

**43.** (Mack-SP) Determine a equação da reta  $r$  da figura ao lado.

**44.** (PUC-SP) A equação da reta com coeficiente angular  $m = -\frac{4}{5}$ , e que passa pelo ponto  $P(2, -5)$ , é:

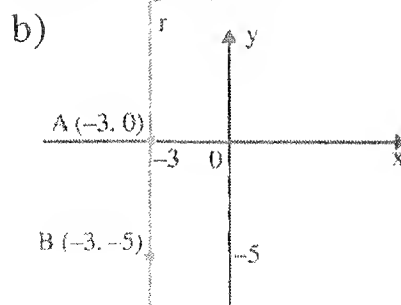
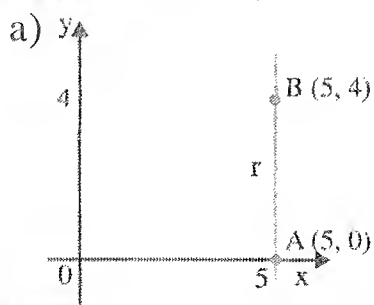
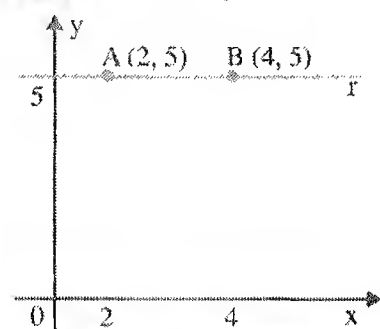
a)  $4x + 5y + 12 = 0$       b)  $4x + 5y + 14 = 0$



c)  $4x + 5y + 15 = 0$

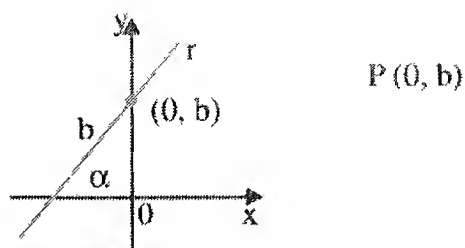
d)  $4x + 5y + 17 = 0$

e) n. d. a.

**45.** Dados os gráficos abaixo, determine a equação da reta vertical:**46.** Dado o gráfico abaixo, determinar a equação da reta horizontal

**8. Equação reduzida da reta** A equação reduzida de uma reta  $r$  é determinada quando isolamos o  $y$  na equação da reta  $y - b = mx$ , onde é dado o ponto  $P(0, b)$  e coeficiente angular  $m$ .

Assim:  $y = mx + b$  é a equação reduzida da reta  $r$ , onde:  $m$  é o coeficiente angular e  $b$  é o coeficiente linear, ou seja,  $b$  é o ponto de intersecção da reta  $r$  com o eixo das ordenadas.

**Exercícios resolvidos:**

1. Determine a forma reduzida da equação da reta que passa pelo ponto  $P(-3, 7)$  e tem declividade igual a 2.

Resolução: Temos:  $x_1 = -3$ ,  $y_1 = 7$ ,  $m = 2$  e  $Q(x, y)$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 7 = 2 \cdot [x - (-3)] \Rightarrow y = 2x + 6 + 7$$

$$\boxed{y = 2x + 13}$$

2. Obter a forma reduzida da equação da reta que passa pelos pontos  $A(2, 1)$  e  $B(4, 6)$  e destacar o coeficiente angular e o coeficiente linear desta reta.



**Resolução:** a) Cálculo do coeficiente angular:

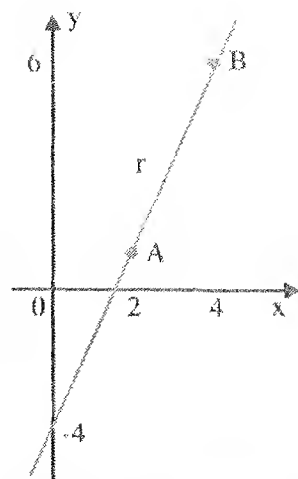
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{4 - 2} = \frac{5}{2}$$

b) Cálculo da equação reduzida:

Temos:  $m = \frac{5}{2}$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 1$  e  $A(2, 1)$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{5}{2} \cdot (x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{5}{2}x - 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 5 + 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}x - 4}$$



c) Coeficiente angular da reta:  $m = \frac{5}{2}$

Coeficiente linear da reta:  $b = -4$

3. Dada a equação da reta:  $2x - 3y + 5 = 0$ , escreva-a na forma reduzida.

**Resolução:** Para passarmos a equação dada para a forma reduzida, basta isolarmos o  $y$ :

$$2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow -3y = -2x - 5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-2x - 5}{-3} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}}$$

4. Uma reta tem como equação:  $2x + 3y - 6 = 0$ . Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear dessa reta.

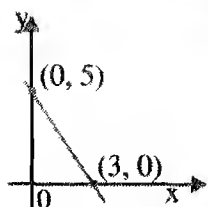
**Resolução:** Escrevemos a equação reduzida dessa reta, para que os coeficientes angular e linear fiquem evidentes:

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 6 \Rightarrow y = \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3} \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 2$$

Assim: o coeficiente angular é  $m = -\frac{2}{3}$  e o coeficiente linear é  $b = 2$ .

5. Escrever a equação reduzida da reta representada no gráfico abaixo e destacar os coeficientes angular e linear dessa reta.

**Resolução:** Sejam:  $A(0, 5)$  e  $B(3, 0)$



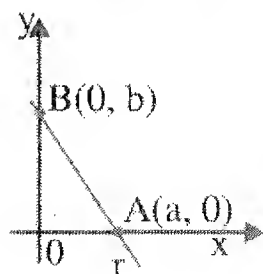
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 5}{3 - 0} \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

Considerando o ponto  $B(3, 0)$ , temos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{3} \cdot (x - 3) \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 5$$

Assim, o coeficiente angular da reta é  $m = -\frac{5}{3}$  e o coeficiente linear é  $b = 5$ .

**9. Equação segmentária da reta** É a equação da reta determinada pelos pontos da reta que interceptam os eixos  $x$  e  $y$  nos pontos  $A(a, 0)$  e  $B(0, b)$ .



Calculando o coeficiente angular, temos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{b}{a}}$$

Portanto, a equação da reta  $r$  será:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -\frac{b}{a} \cdot (x - a) \\ y &= -\frac{b}{a}x + \frac{b \cdot a}{a} \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + b \\ ay &= -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos da equação por  $ab$  ( $a, b \neq 0$ ), temos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}, \text{ então: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ equação segmentária da reta } r.$$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Escrever a equação segmentária de uma reta  $r$  que passa pelos pontos  $A(7, 0)$  e  $B(0, 4)$ .

Resolução: Temos:  $a = 7$ ,  $b = 4$  e  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1}$

2. Considere a equação  $3x + 4y - 12 = 0$  de uma reta  $r$ . Escreva a equação segmentária dessa reta.

Resolução: a) Cálculo dos pontos de intersecção:

• Se  $A(a, 0)$  é a intersecção da reta  $r$  com o eixo  $x$ , substituímos na equação dada:  $x = a$  e  $y = 0$ . Temos:

$$3x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3 \cdot a + 4 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow 3a - 12 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\boxed{\text{Portanto: } A(4, 0).}$$

• Se  $B(0, b)$  é a intersecção da reta  $r$  com o eixo  $y$ , substituímos na equação dada:  $x = 0$  e  $y = b$ . Temos:

$$3x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot b - 12 = 0 \Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{Portanto: } B(0, 3)$$

b) Cálculo da equação segmentária:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1}$

3. Determine a equação segmentária da reta que passa pelos pontos A(3, 2) e B(-1, -6) e faça o seu gráfico.

Resolução: a) Cálculo do coeficiente angular  $m$ :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{-6 - 2}{-1 - 3} \Rightarrow m = \frac{-8}{-4} \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

b) Cálculo da equação da reta:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 2 \cdot (x - 3)$$

$$y - 2 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 + 2 - y = 0 \Rightarrow \boxed{2x - y - 4 = 0}$$

b) Cálculo dos pontos de intersecção:

A' (a, 0): substituímos  $x = a$  e  $y = 0$  na equação da reta

$$2 \cdot a - 0 - 4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

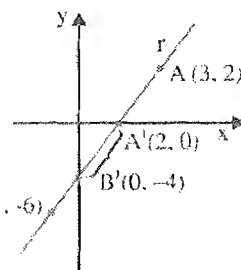
$$\boxed{\text{Logo: } A' (2, 0)}$$

B'(0, b): substituímos  $x = 0$  e  $y = b$  na equação da reta

$$2 \cdot 0 - b - 4 = 0 \Rightarrow -b = 4 \Rightarrow b = -4$$

$$\boxed{\text{Logo: } B' (0, -4)}$$

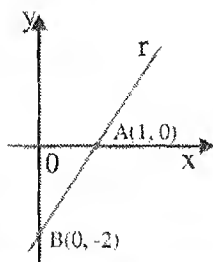
c) Equação segmentária da reta:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$



d) Gráfico: B(-1, -6)

4. Dado o gráfico abaixo, determine a equação segmentária da reta  $r$ .

Resolução: Temos: A(1, 0) e B(0, -2), então:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ onde } a = 1 \text{ e } b = -2$$

Logo, a equação segmentária é:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow \boxed{x + \frac{y}{-2} = 1}$$

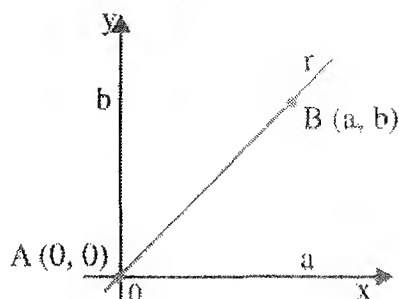
**10. Equação geral da reta** Toda equação de uma reta pode ser escrita na forma:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais constantes com  $a$  e  $b$  não simultaneamente nulos. Casos especiais:

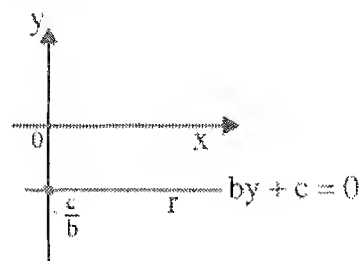
a)  $c = 0$

A equação  $ax + by = 0$ , é a equação geral de uma reta que passa pela origem.



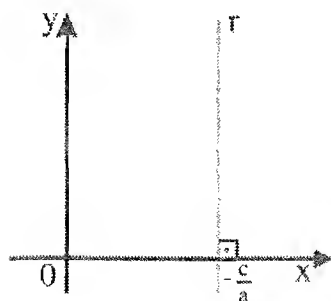
b)  $a = 0$

A equação  $by + c = 0$ , é a equação geral de uma reta paralela ao eixo das abscissas (reta horizontal).



c)  $b = 0$

A equação  $ax + c = 0$ , é a equação geral de uma reta paralela ao eixo das ordenadas (reta vertical).



Neste caso, a reta não tem forma reduzida, pois é independente de  $y$ .

Para visualizarmos melhor os coeficientes angular e linear da equação geral da reta  $ax + by + c = 0$ , com  $a$  e  $b$  não simultaneamente nulos, basta dividirmos todos os termos dessa equação por  $b$ .

$$\text{Assim: } \frac{ax}{b} + \frac{by}{b} + \frac{c}{b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

onde  $-\frac{a}{b}$  é o coeficiente angular  $m$  e  $-\frac{c}{b}$  é o coeficiente linear

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a equação geral de uma reta  $r$  que passa pelos pontos  $A(2, 3)$  e  $B(-1, 6)$ .

**Resolução:** Vamos determinar a equação geral dessa reta  $r$  de duas maneiras:

1ª) É a maneira como vínhamos trabalhando, ou seja:

$$\text{Cálculo do coeficiente angular: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{6 - 3}{-1 - 2} \Rightarrow m = \frac{3}{-3}$$

$$m = -1$$

$$\text{Cálculo da equação geral da reta: } y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

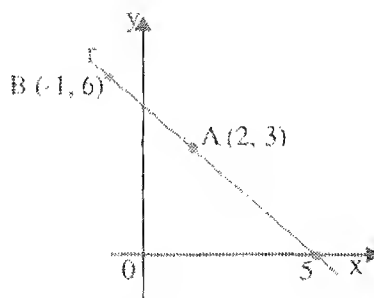
$$y - 3 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 3 = -x + 2 \Rightarrow y + x - 3 - 2 = 0$$

$$x + y - 5 = 0 \Rightarrow \text{equação geral da reta, onde:}$$

$$a = 1, b = 1 \text{ e } c = -5$$

Cálculo do coeficiente linear:

$$\text{coeficiente linear: } -\frac{c}{b} \Rightarrow \frac{-(-5)}{1} = 5$$



Assim, graficamente temos:

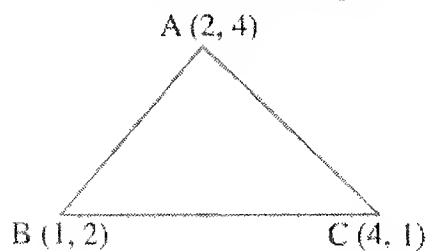
2ª) Observando o gráfico da reta  $r$  acima, vamos considerar todos os pontos  $P(x, y)$  dessa reta ( $P \in r$ ).

De acordo com a condição de alinhamento de três pontos (no caso  $P$ ,  $A$  e  $B$ ), temos o determinante que, calculado, nos dará a equação da reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y + 12 - 2y - 6x + 3 = 0$$

$$-3x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 5 = 0 \Rightarrow \text{equação geral da reta}}$$

2. Calcular as equações das retas suportes dos lados de um triângulo, sabendo-se que os pontos  $A(2, 4)$ ,  $B(1, 2)$  e  $C(4, 1)$  são os vértices desse triângulo.



*Resolução:* Vamos calcular as equações das retas suportes dos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  do triângulo  $ABC$  através do determinante (condição de alinhamento de três pontos).

a) Cálculo da equação da reta suporte do lado  $AB$ :

Temos:  $P(x, y)$ ,  $A(2, 4)$  e  $B(1, 2)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + y + 4 - 2y - 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$$

b) Cálculo da equação da reta suporte do lado  $AC$ :

Temos:  $P(x, y)$ ,  $A(2, 4)$  e  $C(4, 1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 4y + 2 - 2y - x - 16 = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 14 = 0$$

c) Cálculo da equação da reta suporte do lado BC:

Temos:  $P(x, y)$ ,  $B(1, 2)$  e  $C(4, 1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 4y + 1 - y - x - 8 = 0 \Rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

3. Sabendo-se que o ponto  $P(k, k + 5)$  pertence à reta da equação  $3x + 5y - 1 = 0$ , determine as coordenadas do ponto P.

*Resolução:* O ponto P pertence à reta de equação  $3x + 5y - 1 = 0$ , portanto suas coordenadas satisfazem tal equação.

Substituindo-se as coordenadas de P ( $x = k$  e  $y = k + 5$ )

na equação geral, temos:  $3k + 5 \cdot (k + 5) - 1 = 0$

$$3k + 5k + 25 - 1 = 0 \Rightarrow 8k = -24 \Rightarrow k = -3$$

$$\text{Logo: } P(k, k + 5) \Rightarrow P(-3, -3 + 5) \Rightarrow \boxed{P(-3, 2)}$$

### **Exercícios propostos:**

47. Determine as formas reduzidas das equações das retas abaixo, tais que:

a) A reta  $r$  passe pelo ponto  $P(-5, -3)$  e tenha uma declividade igual a 3.

b) A reta  $s$  passe pelo ponto  $Q(2, -7)$  e tenha uma declividade igual a  $-\frac{1}{4}$ .

48. Obter as formas reduzidas das retas que passam pelos pontos abaixo, destacando os coeficientes angular e linear dessas retas:

a)  $A(-1, 8)$  e  $B(5, -4)$ , b)  $C(2, 3)$  e  $D(1, -1)$  e c)  $E(0, 4)$  e  $F(14, 4)$

49. Escrever as equações das retas abaixo, nas formas reduzidas:

a)  $x + 2y - 3 = 0$ , b)  $3x - 7y + 5 = 0$  e c)  $5x - 10y - 1 = 0$

50. Dadas as equações das retas abaixo, determinar os coeficientes angular e linear de cada uma delas:

a)  $5x - 2y + 3 = 0$ , b)  $x - 4y + 9 = 0$  e c)  $7x + y - 5 = 0$

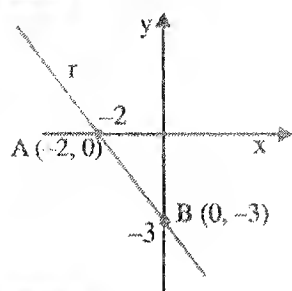
51. Escrever as equações segmentárias das retas que passam pelos pontos: a)  $A(5, 0)$  e  $B(0, 3)$ , b)  $C(-3, 0)$  e  $D(0, 2)$ , c)  $E(-4, 0)$  e  $F(0, -6)$ , d)  $G(2, 0)$  e  $H(0, -7)$

**52.** A equação de uma reta é  $2x - 5y + 10 = 0$ , então a equação segmentária dessa reta é:

a)  $-\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$  b)  $-\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$  c)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$  d)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$  e)  $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

**53.** Determinar a equação segmentária da reta que passa pelos pontos  $A(-1, -3)$  e  $B(2, 9)$  e fazer o seu gráfico.

**54.** A equação segmentária da reta  $r$ , representada no gráfico abaixo, é:



a)  $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$  d)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

b)  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$  e) n. d. a.

c)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

**55.** (UFAL) Os pontos  $(p; 0)$  e  $(0; q)$  pertencem a uma reta  $r$  cuja equação segmentária é  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ . Se  $r$  é dada por  $3x - y = -3$ , sua equação segmentária é:

a)  $\frac{x+y}{3} = 1$  b)  $\frac{x}{3} - \frac{y}{1} = 1$  c)  $\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1$  d)  $\frac{x}{1} - \frac{y}{3} = 3$  e)  $-3x + y = 1$

**56.** Determinar os coeficientes angular e linear de uma reta  $r$  que passa pelos pontos  $A(-1, 2)$  e  $B(5, -1)$ .

**57.** Determinar as equações das retas suportes dos lados de um triângulo cujos vértices são os pontos  $A(1, 1)$ ,  $B(7, 3)$  e  $C(3, 5)$ .

**58.** (UFSC) As retas  $r$ , dada pela equação  $3x - y + 7 = 0$ , e  $s$ , dada pela equação  $4x - y - 5 = 0$ , passam pelo ponto  $P(a, b)$ . O valor de  $a + b$  é:

**59.** (UFRS) A equação reduzida da reta que contém os pontos  $A(2, -5)$  e  $B(-1, 1)$  é:

a)  $y = -2x - 1$  d)  $y = -x + 2$

b)  $y = -2x + 1$  e)  $y = x + 2$

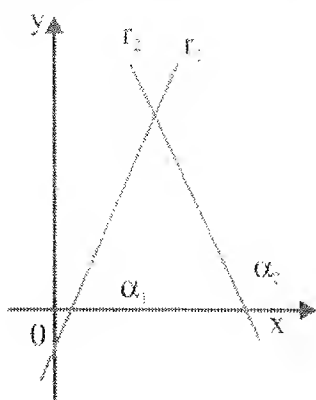
c)  $y = 2x$

**60.** (UFGO) O valor de  $m$  para que o ponto  $(2 + t, 2 + mt)$  pertença à reta,  $2x + y = 6$ , qualquer que seja o valor de  $t$ , é:

a)  $-2$  b)  $-1$  c)  $0$  d)  $1$  e)  $2$

**11. Posições relativas de duas retas** Consideremos duas retas  $r_1$  e  $r_2$  do plano cartesiano. Em relação às suas posições, podemos considerá-las em:

**a) retas concorrentes:  $r_1 \times r_2$**



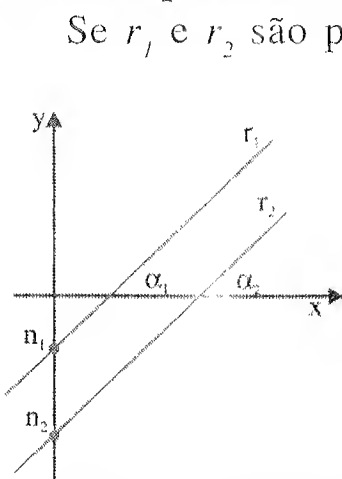
Se  $r_1$  e  $r_2$  são concorrentes, então os seus ângulos formados com o eixo  $x$  são diferentes e, como consequência, seus coeficientes angulares são diferentes  $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_2 \Rightarrow \text{tg } \hat{\alpha}_1 \neq \text{tg } \hat{\alpha}_2$

$$\boxed{m_1 \neq m_2}$$

Ou ainda, sendo  $(r_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $(r_2): a_2x$

$+ b_2y + c_2 = 0$ , temos que  $r \times s$ , então:  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}$

**b) retas paralelas:  $r_1 // r_2$**



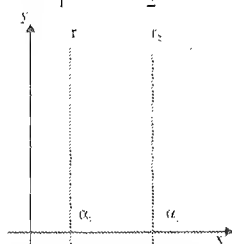
Se  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas, seus ângulos com o eixo  $x$  são iguais e, em consequência, seus coeficientes angulares são iguais ( $m_1 = m_2$ )  $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_2 \Rightarrow \text{tg } \hat{\alpha}_1 \neq \text{tg } \hat{\alpha}_2$ . Entretanto, para que sejam paralelas, é necessário que seus coeficientes lineares  $n_1$  e  $n_2$  sejam diferentes, então:

$$\boxed{m_1 = m_2 \text{ e } n_1 \neq n_2}$$

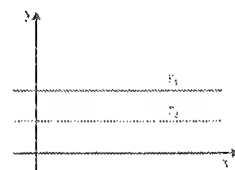
Ou ainda:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

**Casos particulares:**

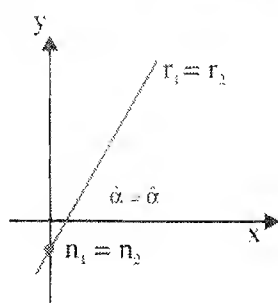
$r_1$  e  $r_2$  são retas paralelas verticais e  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 90^\circ$



$r_1$  e  $r_2$  são retas paralelas horizontais  $r_1 // r_2$ , pois  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 0^\circ$   
 $\text{tg } \hat{\alpha}_1 = \text{tg } \hat{\alpha}_2 \Rightarrow m_1 = m_2$



**c) retas coincidentes:  $r_1 = r_2$**



Se  $r_1$  e  $r_2$  são coincidentes, as retas cortam o eixo  $y$  no mesmo ponto, portanto, além de terem seus coeficientes angulares iguais, seus coeficientes lineares também serão iguais.

$$\boxed{m_1 = m_2 \text{ e } n_1 = n_2}, \text{ ou ainda } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Em suma:  $r_1 // r_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$  ou  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ e } n_1 \neq n_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ e } n_1 = n_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

#### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a posição da reta  $r_1$ , cuja equação é:  $6x + 7y + 3 = 0$ , em relação à reta  $r_2$ , de equação:  $12x + 14y - 21 = 0$ .

*Resolução:* Devemos comparar os coeficientes angulares  $m_1$  e  $m_2$  das retas  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente:

a) Cálculo do  $m_1$  da reta  $r_1$ :

$$6x + 7y + 3 = 0 \Rightarrow 7y = -6x - 3 \Rightarrow y = -\frac{6x}{7} - \frac{3}{7}$$

$$\text{Logo: } m_1 = -\frac{6}{7} \text{ e } n_1 = -\frac{3}{7}$$

b) Cálculo do  $m_2$  da reta  $r_2$ :

$$12x + 14y - 21 = 0 \Rightarrow 14y = -12x + 21$$

$$y = -\frac{12x}{14} + \frac{21}{14} \Rightarrow y = -\frac{6x}{7} + \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\frac{6}{7} \\ n_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Como } m_1 = m_2 = -\frac{6}{7} \text{ e } n_1 = -\frac{3}{7} \neq \frac{3}{2} = n_2,$$

então, as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas.

2. Qual a posição da reta  $r_1$ , da equação  $2x - y + 5 = 0$  em relação à reta  $r_2$ , de equação  $5x + 2y - 10 = 0$ ?

*Resolução:* a) Cálculo do  $m_1$  da reta  $r_1$ :  $2x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x + 5$

$$\text{Logo: } m_1 = 2 \text{ e } n_1 = 5$$

b) Cálculo do  $m_2$  da reta  $r_2$ :

$$5x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2y = -5x + 10 \Rightarrow y = -\frac{5x}{2} + \frac{10}{2}$$

$$y = -\frac{5x}{2} + 5. \text{ Logo: } m_2 = -\frac{5}{2} \text{ e } n_2 = 5$$

Como  $m_1 = 2 \neq -\frac{5}{2} = m_2$ , logo, as retas  $r_1$  e  $r_2$  são concorrentes.

3. Classifique a posição da reta  $r_1$  de equação  $3x + 3y - 6 = 0$  em relação à reta  $r_2$  de equação  $x + y - 2 = 0$ .

Resolução: a) Cálculo do  $m_1$  da reta  $r_1$ :

$$3x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y = -3x + 6 \Rightarrow y = -\frac{3x}{3} + \frac{6}{3} \Rightarrow y = -x + 2$$

$$\text{Logo: } m_1 = -1 \text{ e } n_1 = 2$$

b) Cálculo do  $m_2$  da reta  $r_2$ :  $x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -x + 2$

$$\text{Logo: } m_2 = -1 \text{ e } n_2 = 2$$

Como  $m_1 = m_2$  e  $n_1 = n_2$ , então as retas  $r_1$  e  $r_2$  são coincidentes.

4. Consideremos as retas  $r_1$  e  $r_2$  de equações:  $x + 5y - 35 = 0$  e  $3x + ky - 27 = 0$ , respectivamente. Determine o valor de  $k$  para que  $r_1$  e  $r_2$  sejam retas concorrentes.

Resolução: Temos:  $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 3$  e  $b_1 = 5 \Rightarrow b_2 = k$

$$r_1 \times r_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{5}{k} \Rightarrow k \neq 15$$

Logo,  $r_1$  e  $r_2$  são retas concorrentes se  $k \neq 15$ .

5. Dadas as retas ( $r_1$ )  $-x + 2y + 3 = 0$  e ( $r_2$ )  $ax - 2by - 6 = 0$ . Determine os valores de  $a$  e  $b$  para que as retas sejam coincidentes.

Resolução: Temos:  $a_1 = -1$  e  $a_2 = a$ ,  $b_1 = 2$  e  $b_2 = -2b$ ,  $c_1 = 3$  e  $c_2 = -6$

Para que as retas  $r_1$  e  $r_2$  sejam coincidentes, devemos ter:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{2}{-2b} = \frac{3}{-6} \Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{3}{-6} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{2}{-2b} = \frac{3}{-6} \Rightarrow -6b = -12 \Rightarrow b = 2$$

Portanto, devemos ter  $a = 2$  e  $b = 2$ .

6. Obter a equação da reta que passa pelo ponto  $P(11, 2)$  e é paralela à reta de equação  $2x - 3y + 7 = 0$ .

Resolução: Para podermos escrever a equação dessa reta, devemos calcular seu coeficiente angular. Como a equação pedida é paralela à reta de equação  $2x - 3y + 7 = 0$ , então seus coeficientes angulares são iguais:

$$2x - 3y + 7 = 0 \Rightarrow 3y = 2x + 7 \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{7}{3}. \text{ Logo: } m = \frac{2}{3}$$

Assim, a equação da reta pedida tem  $m = \frac{2}{3}$   
e passa pelo ponto  $P(11, 2)$ .

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{3} \cdot (x - 11)$$

$$y - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{22}{3} \Rightarrow 3y - 6 = 2x - 22 \Rightarrow 3y = 2x - 16$$

Portanto, a equação pedida é:  $2x - 3y - 16 = 0$

### Exercícios propostos:

61. Determine as posições relativas das retas abaixo:

- a)  $r_1$  em relação a  $r_2$ , sendo  $(r_1)$   $3x + 5y - 8 = 0$  e  $(r_2)$   $9x + 15y + 7 = 0$
- b)  $r_3$  em relação a  $r_4$ , sendo  $(r_3)$   $-2x + y - 1 = 0$  e  $(r_4)$   $4x + 7y = 0$
- c)  $r_5$  em relação a  $r_6$ , sendo  $(r_5)$   $9x + 6y - 4 = 0$  e  $(r_6)$   $6x + 4y + 3 = 0$

62. Dadas as retas  $(r_1)$   $3x + uy = 7$  e  $(r_2)$   $6x + 8y = v$ , para que valores de  $u$  e  $v$  as retas são: a) concorrentes, b) paralelas e c) coincidentes

63. A equação da reta que passa pelo ponto  $P(3, -1)$  e é paralela à reta de equação  $x - 4y + 2 = 0$  é:

- a)  $3x - y - 2 = 0$
- b)  $x - 7y - 4 = 0$
- c)  $x - 3y - 2 = 0$
- d)  $x - 4y - 7 = 0$
- e)  $3x - y = 0$

64. (UFPI) As equações  $x + qy - 1 = 0$  e  $px + 6y + 5 = 0$  são de duas retas paralelas. Logo:

- a)  $\frac{p}{q} = 6$
- b)  $(-p) \cdot q = 6$
- c)  $p \cdot q = 6$
- d)  $p = q$
- e)  $p \cdot q = 3$

65. (Cescom) Qual deve ser a relação de igualdade entre  $a$  e  $b$  para que a reta  $l_1$ , de equação  $x - 3y + 15 = 0$ , seja paralela à reta  $l_2$  determinada pelos pontos  $A(a, b)$  e  $B(1, 2)$ ?

66. (PUC-RS) A equação da reta que passa pelo ponto  $P(2, 5)$  e é paralela à reta de equação  $x - y + 2 = 0$  é:

- a)  $3x - 2y + 4 = 0$
- b)  $x - y + 7 = 0$
- c)  $2x - 3y + 11 = 0$
- d)  $x - y + 3 = 0$
- e)  $x - y - 3 = 0$

67. (FAAP-SP) Determine os valores de  $m$  para que as retas  $l_1$  e  $l_2$ , de equações  $(1 - m)x - 10y + 3 = 0$  e  $(m + 2)x + 4y - 11m - 18 = 0$ , sejam concorrentes.

**12. Intersecção de retas** Duas retas, sendo concorrentes, apresentam um ponto de intersecção  $P(a, b)$ , em que as coordenadas  $(a, b)$  devem satisfazer as equações de ambas as retas.

Para determinarmos as coordenadas de P através das equações das retas, basta resolvermos o sistema constituído pelas equações dessas retas. Observe o exemplo:

Consideremos duas retas  $r_1$  e  $r_2$  representadas pelas seguintes equações:

$$2x - 3y - 1 = 0 \text{ e } 4x - 3y - 11 = 0.$$

O ponto de intersecção P(a, b) será definido pelo sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} (-1) \cdot \begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases} \\ \hline & & 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \end{array}$$

Substituindo esse valor em qualquer das equações, temos:

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= -1 \Rightarrow -2 \cdot 5 + 3y = -1 \Rightarrow -10 + 3y = -1 \\ 3y &= -1 + 10 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

Portanto, o ponto de intersecção das retas  $r_1$  e  $r_2$  é P(5, 3).

#### **Exercício resolvido:**

1. Dados dois pontos A(1, 3) e B(-3, 7), calcular a equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , e pela intersecção das retas ( $r_1$ )  $2x + y - 10 = 0$  e ( $r_2$ )  $x - y - 2 = 0$ .

Resolução: a) Cálculo do ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ :

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_m = -\frac{2}{2} \Rightarrow x_m = -1 \\ y_m &= \frac{3+7}{2} \Rightarrow y_m = \frac{10}{2} \Rightarrow y_m = 5 \\ \text{Logo: } M(-1, 5) \end{aligned}$$

O ponto M(-1, 5) pertence à intersecção das retas  $r_1$  e  $r_2$ .

Portanto devemos calcular o ponto P(a, b) da intersecção de  $r_1$  e  $r_2$ , através da resolução do sistema de suas equações:

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo o valor de x em uma das equações acima, temos:

$$x - y = 2 \Rightarrow 4 - y = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 \Rightarrow y = 2$$

Logo: P(4, 2)

b) Equação da reta pedida: Temos:  $M(-1, 5)$  e  $P(4, 2)$ , então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{2 - 5}{4 + 1} \Rightarrow m = -\frac{3}{5}$$

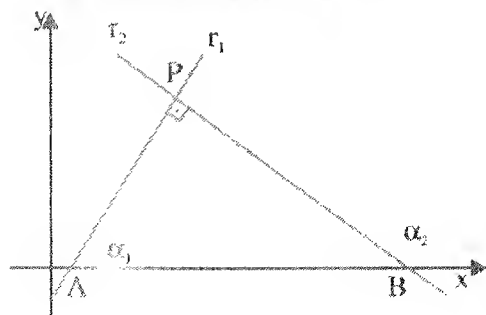
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -\frac{3}{5} \cdot (x + 1)$$

$$5y - 25 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + 5y - 22 = 0$$

**13. Condição de perpendicularismo** Duas retas  $r_1$  e  $r_2$  serão per-

pendiculares se, e somente se,  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

*Demonstração:* Consideremos as retas  $r_1$  e  $r_2$ :



a)  $r_1 \times r_2$ , ou seja:  $r_1 \cap r_2 = \{P\}$  e b)  $r_1 \perp r_2$

Da Geometria Plana, temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ . Assim, no triângulo APB, temos:

$$\hat{\alpha}_1 + 90^\circ + [180^\circ - \hat{\alpha}_2] = 180^\circ$$

$$\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 + 270^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}_1 = 90^\circ + \hat{\alpha}_2$$

Portanto, os coeficientes angulares serão dados por:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} (90^\circ + \hat{\alpha}_2) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{sen} (90^\circ + \hat{\alpha}_2)}{\cos (90^\circ + \hat{\alpha}_2)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos \alpha_2 + \cos 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos 90^\circ \cdot \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_2 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1 \cos \alpha_2 + 0 \operatorname{sen} \alpha_2}{0 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_2 \cdot 1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{\cos \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} = -\operatorname{cotg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

Mas:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = m_1 \text{ (coeficiente angular de } r_1 \text{)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = m_2 \text{ (coeficiente angular de } r_2 \text{)}$$

Portanto:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$\text{Logo: } r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Verifique se as retas  $(r_1)$   $7x - 4y + 5 = 0$  e  $(r_2)$   $4x + 7y - 9 = 0$ , são perpendiculares.

Resolução: a) Cálculo do coeficiente angular de  $r_1$ :

$$7x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow 4y = 7x + 5 \Rightarrow y = \frac{7}{4}x + \frac{5}{4} \Rightarrow m_1 = \frac{7}{4}$$

b) Cálculo do coeficiente angular de  $r_2$ :

$$4x + 7y - 9 = 0 \Rightarrow 7y = -4x + 9 \Rightarrow y = -\frac{4x}{7} + \frac{9}{7} \Rightarrow m_2 = -\frac{4}{7}$$

c) Verificação da condição de perpendicularismo:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{-1}{-\frac{4}{7}} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

Como  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ , logo:  $r_1 \perp r_2$

2. Calcular o valor de  $k$  para que as retas  $(r_1)$   $3x - 2y + 7 = 0$  e  $(r_2)$   $kx + 12y - 15 = 0$  sejam retas perpendiculares.

Resolução: Pela condição de perpendicularidade, temos que:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

a) Cálculo de  $m_1$ :

$$3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow 2y = 3x + 7 \Rightarrow y = \frac{3x}{2} + \frac{7}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$$

b) Cálculo de  $m_2$ :

$$kx + 12y - 15 = 0 \Rightarrow 12y = -kx + 15 \Rightarrow y = -\frac{k}{12}x + \frac{15}{12} \Rightarrow m_2 = -\frac{k}{12}$$

c) Cálculo de  $k$ :  $\frac{3}{2} = \frac{1}{-\frac{k}{12}} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{12}{-k} \Rightarrow k = \frac{24}{-3} \Rightarrow k = -8$

Assim:  $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow k = -8$

3. Determinar a equação de uma reta  $r_2$  que passa pelo ponto  $P(-1, -6)$  e é perpendicular à reta  $(r_1)$   $x - 3y - 8 = 0$ .

Resolução: a) Cálculo do coeficiente angular  $m_1$ :

$$x - 3y - 8 = 0 \Rightarrow 3y = x - 8 \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{3}$$

b) Cálculo do coeficiente angular  $m_2$ :

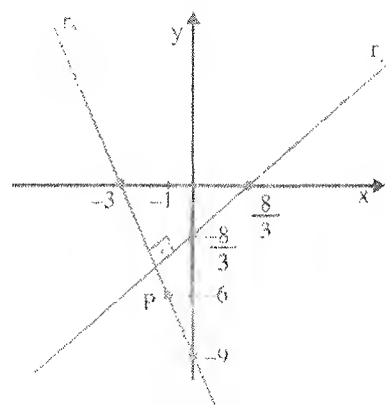
Temos que:  $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ . Portanto:  $\frac{1}{3} = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_2 = -3$

c) Cálculo da equação da reta  $r_2 \perp r_1$ ,  
passando pelo ponto  $P(-1, -6)$ :  $y - y_1 = m_2 \cdot (x - x_1)$   
 $y + 6 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y + 6 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + y + 9 = 0$

d) Gráfico

$$(r_1): x - 3y - 8 = 0 \quad (r_2): 3x + y - 9 = 0$$

x	y	x	y
0	$-\frac{8}{3}$	0	-9
$\frac{8}{3}$	0	-3	0



4. Determinar a equação da mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ , onde  $A(1, 4)$  e  $B(3, 8)$ .

*Resolução:* Da Geometria Plana, sabemos que mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento, passando pelo seu ponto médio. Temos, portanto, que calcular o ponto médio (M) dos pontos A e B.

a) Cálculo do ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ :

$$x_m = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_m = \frac{4}{2} \Rightarrow x_m = 2$$

$$y_m = \frac{4+8}{2} \Rightarrow y_m = \frac{12}{2} \Rightarrow y_m = 6$$

Logo:  $M(2, 6)$

b) Cálculo do coeficiente angular da reta suporte do segmento  $\overline{AB}$ :

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_1 = \frac{8 - 4}{3 - 1} \Rightarrow m_1 = \frac{4}{2} \Rightarrow m_1 = 2$$

c) Cálculo do coeficiente angular da mediatriz:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow 2 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow 2m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

d) Cálculo da equação da mediatriz:

Temos:  $m_2 = -\frac{1}{2}$  e  $M(2, 6)$

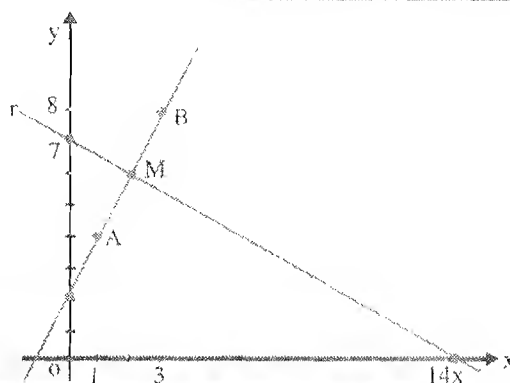
Logo, a equação da mediatriz é:

$$y - y_1 = m_2 \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$$

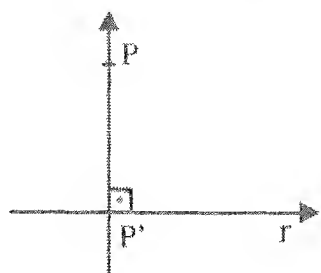
$$y - 6 = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 2y - 12 = -x + 2 \Rightarrow \boxed{x + 2y - 14 = 0}$$

$$(r_M): x - 3y - 8$$

x	y
0	7
14	0



**14. Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta** A projeção ortogonal  $P'$  de um ponto  $P$  sobre uma reta  $r$  é o ponto de intersecção da perpendicular à reta  $r$ , passando por  $P$  com a reta  $r$ .



Exemplo:

$(r): x + y - 3 = 0$  e  $P(1, 4)$

Para determinarmos  $P'(x, y)$ , sendo  $P'$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre a reta  $r$ , calculemos, primeiro, o coeficiente angular de  $r: x + y - 3 = 0$

$$y = -x + 3 \text{ (equação reduzida de } r)$$

Portanto,  $m_r = -1$

Como, para retas perpendiculares a relação entre seus coeficientes

angulares é  $m_r = -\frac{1}{m_s}$ , sendo  $(r \perp s)$ , então:  $-1 = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_s = 1$

A partir deste dado, podemos escrever a equação de  $s$ :

$$y - y_1 = m_s \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 4 = x - 1$$

$$x - y + 3 = 0 \text{ (equação da reta } s)$$

Finalmente, para determinarmos  $P'$ , resolvemos o sistema:

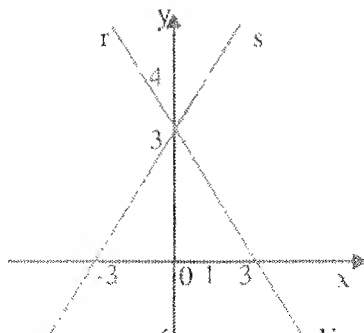
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$



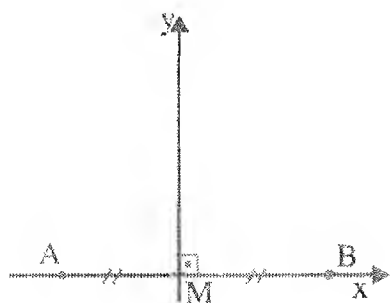
Substituindo  $x$  em qualquer das equações, temos:

$$x + y - 3 = 0 \Rightarrow 0 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Assim, as coordenadas de  $P'$  são  $(0, 3)$ . Sua representação gráfica é:



**15. Simetria** Quando uma reta é perpendicular a um segmento  $AB$ , passando pelo ponto médio  $M$  desse segmento, ela é chamada mediatriz, e como  $d(A, M) = d(M, B)$ , dizemos que o ponto  $B$  é simétrico ao ponto  $A$ .



Exemplo:

Sabendo que o ponto  $B$  é simétrico do ponto  $A(-3, 2)$ , em relação à reta  $r_1$  de equação  $x - y - 3 = 0$ , vamos determinar as coordenadas de  $B$ .

Calculemos o coeficiente angular da reta

$$r_1: x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\text{Logo: } m_1 = 1$$

Como a relação entre os coeficientes angulares de duas retas concorrentes perpendiculares entre si é:  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ , podemos determinar o coeficiente angular de  $r_2$ , que é a reta que contém os pontos

$$A \text{ e } B. \text{ Assim: } 1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_2 = -1$$

Agora, podemos escrever a equação de  $r_2$ :

$$y - y_1 = m_2 \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x + 3)$$

$$y - 2 = -x - 3 \Rightarrow x + y + 1 = 0$$

Cálculo do ponto médio  $M$   $r_1 \cap r_2$ :

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo o valor de  $x$  e  $m$  uma das equações, temos:

$$x + y + 1 = 0 \Rightarrow 1 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$M(1, -2)$

Pela definição de ponto médio, sabemos que:

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$$

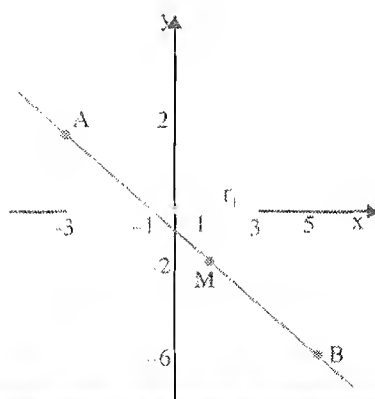
$$\text{Substituindo os valores, temos: } 1 = \frac{-3 + x_B}{2} \Rightarrow 2 = -3 + x_B \Rightarrow x_B = 5$$

$$-2 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow -4 = 2 + y_B \Rightarrow y_B = -6$$

Portanto, as coordenadas de B são  $(5, -6)$ , simétrico de A  $(-3, 2)$  em relação a reta  $r$ .

Graficamente:

x	y
0	-3
3	0



### Exercícios propostos:

69. (UFMG) Sejam  $r$  e  $s$  duas retas perpendiculares que se interceptam em  $P = (1, 2)$ . Se  $Q = (-1, 6)$  pertence a uma dessas retas, então a equação da outra reta é:

- a)  $x + 2y - 5 = 0$                       c)  $2x - y = 0$                       e)  $2x + 2y + 7 = 0$   
b)  $x - 2y + 3 = 0$                       d)  $2x + y - 4 = 0$

70. (UFGO) As equações das retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são  $2x + 3y - 1 = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$  e  $x - 2y + 1 = 0$ , respectivamente. A reta perpendicular a  $t$ , que passa pelo ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$ , tem por equação:

- a)  $2x + y - 2 = 0$                       c)  $2x + y + 5 = 0$                       e)  $x - 2y - 11 = 0$   
b)  $2x + y + 11 = 0$                       d)  $x - 2y + 10 = 0$

71. (UECE) Seja  $P_1(x_1, y_1)$  o ponto de intersecção das retas  $x - y = 2$  e  $x + y = 12$ . A reta que passa por  $P_1(x_1, y_1)$  e tem inclinação  $\frac{8}{7}$  intercepta a reta de equação  $x = 0$  no ponto:

- a)  $(0, -3)$    b)  $(0, -2)$    c)  $(0, 2)$    d)  $(0, 3)$

72. (Fuvest-SP) São dados os pontos A(2, 3) e B(8, 5). Determine a equação da mediatriz do segmento AB.

73. (UFPI) A projeção ortogonal do ponto  $P(6, 4)$  sobre a reta  $x + y - 2 = 0$  é o ponto:

- a)  $(1, 1)$  b)  $(2, 0)$  c)  $(3, 2)$  d)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$  e)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

74. (FEI-SP) Determine o ponto  $P'$ , simétrico do ponto  $P(2, 1)$  em relação à reta  $s$  de equação  $y = 2x$ .

75. (PUC-SP) As retas  $2x + 3y = 1$  e  $6x - ky = 1$  são perpendiculares. Então,  $k$  vale: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

76. (UFSC) Sejam as retas  $r$ , que passa pelos pontos  $P_1(1, 0)$  e  $P_2(2, -2)$ , e  $s$ , dada pela equação  $2y - x + 1 = 0$ . Determine a soma dos números associados às afirmativas verdadeiras:

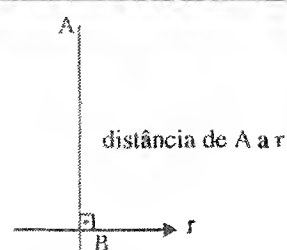
01.  $r$  e  $s$  são coincidentes  
 02. o coeficiente angular de  $r$  é  $-2$   
 04. o coeficiente linear de  $s$  é  $-1$   
 08.  $r \cap s = \{(1, 0)\}$   
 16. o ponto  $P(3, -4)$  pertence à reta  $r$   
 32.  $r$  e  $s$  são perpendiculares

77. (UFSC) Calcule o valor de  $p$  para que as retas  $r$ , dada pela equação  $(2p + 1)x + 3y - 12 = 0$ , e  $s$ , dada pela equação  $3x - 37y + 3 = 0$ , sejam perpendiculares entre si.

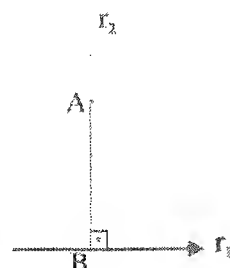
78. (UFPB) No estudo analítico da reta, é verdadeiro afirmar-se que:

- a)  $(-2, 1)$  é a intersecção das retas  $x + 2y = 0$  e  $x + 2y - 12 = 0$ .  
 b) Os pontos  $A(7, 0)$ ,  $B(-2, 1)$  e  $C(0, 8)$  são colineares.  
 c) O ponto  $P(-1, 0)$  pertence à reta  $x - 2y + 7 = 0$ .  
 d) A equação da reta que passa pelos pontos  $A(-1, 5)$ ,  $B(5, 5)$  é  $y - 5 = 0$ .  
 e)  $y = -2$  é uma reta paralela ao eixo dos  $y$ .

**16. Distância entre um ponto e uma reta** A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento perpendicular que liga o ponto à reta.



Consideremos, como exemplo, um ponto  $A(1, 2)$  e uma reta  $r_1$  de equação  $3x + 4y + 4 = 0$ . A distância entre  $A$  e a reta  $r_1$  será dada pela medida do segmento  $\overline{AB}$ , onde  $B$  é o ponto de intersecção da reta  $r_2$ , perpendicular a  $r_1$ , e que contém os pontos  $A$  e  $B$ .



Inicialmente, determinemos a equação de  $r_2$ :

$$3x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow 4y = -3x - 4$$

$$y = -\frac{3x}{4} - 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$-\frac{3}{4} = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow -3m_2 = -4 \Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$$

$$y - y_1 = m_2 \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{4}{3} \cdot (x - 1)$$

$$3 \cdot (y - 2) = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0 \text{ (} r_2 \text{)}$$

$B(x, y)$  é o ponto de intersecção das retas  $r_1$  e  $r_2$ , portanto, suas coordenadas serão:

$$r_1 \cap r_2: \begin{cases} 3x + 4y + 4 = 0 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -4 & (4) \\ 4x - 3y = -2 & (-3) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 12x + 16y = -16 \\ -12x + 9y = 6 \end{cases} \Rightarrow 25y = -10 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$$

Substituindo o valor de  $y$  em uma das equações, temos:

$$3x + 4 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -4 \Rightarrow 3x - \frac{8}{5} = -4 \Rightarrow 3x = -4 + \frac{8}{5}$$

$$x = -\frac{4}{5} \text{ Logo: } B\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

De posse das coordenadas de A e B, podemos calcular a distância entre os pontos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{144 + 81}{25}} = \frac{15}{5} \Rightarrow d(A, B) = 3$$

Podemos também aplicar a seguinte expressão matemática para chegarmos ao mesmo resultado:

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Onde  $d(P, r)$  é a distância entre o ponto  $P(x_p, y_p)$  e a reta  $r$ .

Em nosso exemplo, temos:

$$d(A, r) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d(A, r) = \frac{|3 + 8 + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} \Rightarrow d(A, r_1) = 3$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determine a distância do ponto  $P(2, 3)$  à reta  $r$  de equação  $3x - y - 17 = 0$ .

Resolução: Temos:  $a = 3$ ,  $b = -1$  e  $c = -17$

$$P(x_p, y_p) = P(2, 3)$$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot (3) + (-17)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$d(P, r) = \frac{|6 - 3 - 17|}{\sqrt{10}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|-14|}{\sqrt{10}} = \frac{14 \cdot \sqrt{10}}{10} = \frac{7 \cdot \sqrt{10}}{5}$$

2. (UFMS) Qual o valor positivo de  $k$  para que a distância do ponto  $P(0, 1)$  à reta de equação  $12x + 16y + k = 0$  seja 4,5?

Resolução: Temos:  $a = 12$ ,  $b = 16$ ,  $c = k$  e  $d(P, \text{reta}) = 4,5$

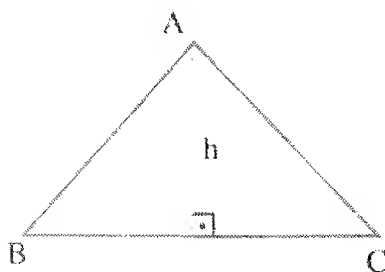
$$P(x_p, y_p) = P(0, 1)$$

$$d(P, \text{reta}) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 4,5 = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$4,5 = \frac{|12 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 16^2}} = \frac{|16 + k|}{\sqrt{144 + 256}} \Rightarrow 4,5 = \frac{|16 + k|}{\sqrt{400}} \Rightarrow 4,5 = \frac{16 + k}{20}$$

$$16 + k = 90 \Rightarrow k = 74$$

3. Determine a altura relativa ao vértice  $A$  de um triângulo cujos vértices são os pontos  $A(-2, 5)$ ,  $B(2, 8)$  e  $C(0, 4)$ .



Resolução: O problema consiste em determinar a distância do ponto  $A$  à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ . Como  $B$  e  $C$  são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 8 - 2y - 4x = 0$$

$$4x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0 \Rightarrow \text{equação da reta } \overleftrightarrow{BC}$$

Com esses dados, podemos calcular a altura ( $h$ ), onde  $A(-2, 5)$ :

$$d(A, \overleftrightarrow{BC}) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (5) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4 - 5 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$d(A, \overleftrightarrow{BC}) = \sqrt{5}$$

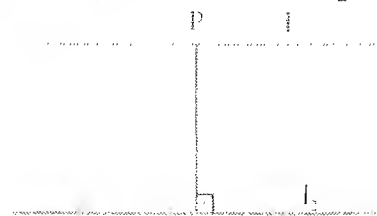
### ⇒ Exercícios propostos:

79. (PUC-SP) Determine a distância do ponto  $Q(1, 1)$  à reta  $t$  cuja equação é  $x + y - 3 = 0$ .

80. (PUC-SP) A altura do triângulo ABC, relativa ao vértice A, onde  $A(3, 2)$ ,  $B(1, -3)$  e  $C(-4, -1)$  é:

a)  $\sqrt{29}$    b)  $3\sqrt{29}$    c)  $\frac{\sqrt{29}}{2}$    d)  $2\sqrt{29}$    e)  $\frac{\sqrt{29}}{3}$

81. (Cesgem) Calcule a distância entre as retas  $l_1$ , de equação  $3y = 4x - 2$ , e  $l_2$ , de equação  $3y = 4x + 8$ , sabendo que  $l_1 \parallel l_2$ .



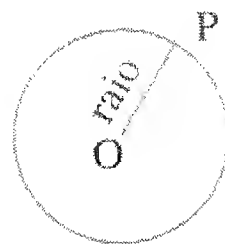
*Sugestão:* fazendo  $x = 0$  na equação da reta  $l_1$ , obtemos um certo valor para  $y$ ; em seguida, basta calcular a distância de  $P(0, y)$  à reta  $l_2$ .

82. (Cesgranrio-RJ) O ponto  $A(-1, -2)$  é um vértice de um triângulo equilátero ABC cujo lado BC está sobre a reta de equação  $x + 2y - 5 = 0$ . Determine a medida  $h$  da altura desse triângulo.

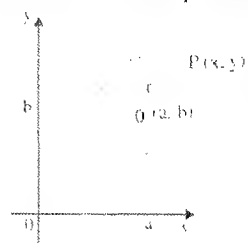
## Estudo da circunferência

**1. Definição** Circunferência é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo O, denominado *centro da circunferência*.

A medida da distância de qualquer ponto da circunferência ao centro O é sempre constante e é denominada *raio*.



**2. Equação reduzida da circunferência** Dados um ponto  $P(x, y)$  qualquer, pertencente a uma circunferência de centro  $O(a, b)$  e raio  $r$ , sabemos que:  $d(O, P) = r$ .



A equação reduzida da circunferência expressa a distância entre os pontos O e P, através de suas coordenadas.

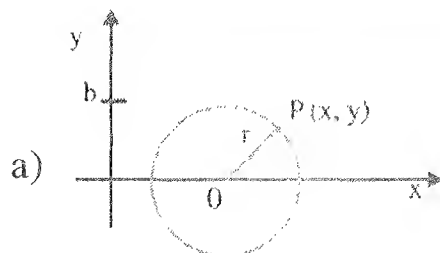
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Assim, temos que um ponto  $P(x, y)$  qualquer da circunferência, só pertencerá à circunferência se, e somente se a distância  $d(P, O)$ , sendo  $O$  o centro da circunferência de coordenadas  $O(a, b)$ , for igual ao raio  $r$ .

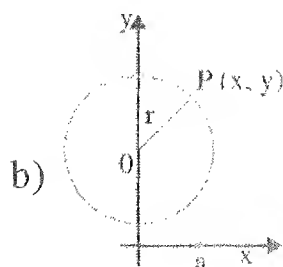
Elevando ambos os membros dessa equação do quadrado:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

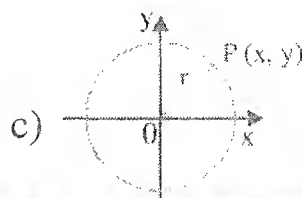
**3. Posição da circunferência no plano cartesiano** Conforme a posição de uma circunferência no plano cartesiano, temos equações particulares:



$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$



$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

#### Exercícios resolvidos:

1. Escrever as equações reduzidas das circunferências de centro  $O$  e raio  $r$ , nos seguintes casos: a)  $O(2, 5)$  e  $r = 7$ , b)  $O(0, 4)$  e  $r = 5$ , c)  $O(0, 0)$  e  $r = 3$ , d)  $O(-2, -3)$  e  $r = \sqrt{7}$

**Resolução:** a) Pela equação reduzida da circunferência, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \text{ onde } a = 2 \text{ e } b = 5:$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 7^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$$

$$\text{b) } (x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 25$$

c) O centro da circunferência está na origem, então:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

$$\text{d) } [x - (-2)]^2 + [y - (-3)]^2 = (\sqrt{7})^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 7$$

2. Escrever o centro O e o raio das circunferências abaixo, dadas as equações das circunferências.

a)  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

c)  $x^2 + (y + 2)^2 = 5$

b)  $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 81$

d)  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

Resolução: a) Se  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$  representa a equação de uma circunferência, temos que:  $O(1, 3) \rightarrow$  centro da circunferência  $\sqrt{16} = 4 \rightarrow$  raio da circunferência

b)  $O(-7, 4)$  e  $r = 9$ , c)  $O(0, -2)$  e  $r = \sqrt{5}$ , d)  $O(2, 0)$  e  $r = 1$

3. Seja  $(\alpha)$  uma circunferência cuja equação é  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$ .

Verificar se: a)  $P(8, -5)$  pertence a  $(\alpha)$ , b)  $Q(3, 2)$  pertence a  $(\alpha)$  e c)  $(\alpha)$  passa pela origem

Resolução: a) Fazendo  $x = 8$  e  $y = -5$  e substituindo esses valores na equação de  $(\alpha)$ , temos:

$$(8 - 2)^2 + (-5 - 3)^2 = 100 \Rightarrow 6^2 + (-8)^2 = 100 \Rightarrow 36 + 64 = 100$$

$$100 = 100$$

Portanto,  $P(8, -5) \in (\alpha)$

b) Fazendo  $x = 3$  e  $y = 2$  e substituindo esses valores na equação de  $(\alpha)$ , temos:

$$(3 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \neq 100$$

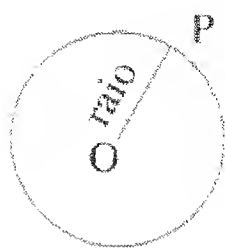
Logo,  $Q(3, 2) \notin (\alpha)$

c) Se  $(\alpha)$  passa pela origem, então  $P(0, 0)$  pertence a  $(\alpha)$ , então, fazendo  $x = 0$  e  $y = 0$  e substituindo esses valores na equação de  $(\alpha)$ , temos:

$$(0 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13 \neq 100$$

Logo,  $(\alpha)$  não passa pela origem.

4. Obter a equação da circunferência com centro no ponto  $O(7, 10)$  e que passa pelo ponto  $P(10, 14)$ .



Resolução: Temos que o raio dessa circunferência é  $r = d(O, P)$ . Logo, pela fórmula da distância, temos:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(10 - 7)^2 + (14 - 10)^2}$$

$$r = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$$

E a equação da circunferência de centro  $O(7, 10)$  e  $r = 5$ , é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 25$$



### ⇒ Exercícios propostos:

83. Escrever as equações reduzidas das circunferências de centro  $O$  e raio  $r$ , nos seguintes casos: a)  $O(1, 5)$  e  $r = 2$ , b)  $O(-3, 2)$  e  $r = 6$ , c)  $O(4, -5)$  e  $r = 3$ , d)  $O(-1, -2)$  e  $r = \sqrt{5}$ , e)  $O(0, 0)$  e  $r = 8$ , f)  $O(0, -5)$  e  $r = 2\sqrt{2}$  e g)  $O(3, 0)$  e  $r = 1$

84. Escrever o centro  $O$  e o raio das circunferências abaixo, dadas as equações das circunferências.

a)  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$

d)  $x^2 + (y - 1)^2 = 100$

b)  $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 4$

e)  $x^2 + y^2 = 6$

c)  $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

f)  $(x + 4)^2 + y^2 = 81$

85. Verifique se o ponto  $P(-4, 1)$  pertence a uma circunferência  $(\alpha)$  cuja equação é:  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$  e se  $(\alpha)$  passa pela origem.

86. (UFPB) A equação da circunferência que passa pelos pontos  $A = (1, 2)$  e  $B = (3, 6)$  e cujo centro é o ponto médio do segmento  $AB$  é:

a)  $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 1$

d)  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$

b)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

e)  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

c)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

87. (PUC-SP) O ponto  $P(-3, b)$  pertence à circunferência de centro no ponto  $C(0, 3)$  e de raio  $r = 5$ . Calcule o valor de  $b$ .

88. (FMU-SP) Uma circunferência tem centro  $C(4, 3)$  e passa pela origem. A equação desta circunferência é:

a)  $x^2 + y^2 = 25$

d)  $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 25$

89. (Mack-SP) Determine a equação de uma circunferência cujo diâmetro é o segmento de extremidade  $A(2, 8)$  e  $B(4, 0)$ .

**4. Equação geral da circunferência** Consideremos uma circunferência com centro  $O(a, b)$  e raio  $r$ . Já vimos que a equação reduzida dessa circunferência é:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Desenvolvendo os quadrados, temos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad (I)$$

$$\text{Fazendo: } \begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

Substituindo esses valores em (I), obtemos:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , que é a forma geral da equação da circunferência de centro  $O(a, b)$  e raio  $r$ .

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a equação geral da circunferência de centro  $O(-2, 3)$  e raio 6.

Resolução:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6^2$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

2. Obter o centro  $O(a, b)$  e o raio  $r$  de uma circunferência cuja equação geral é:  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

Resolução:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

$$\text{Como: } A = -2a, B = -2b \text{ e } C = a^2 + b^2 - r^2$$

$$\text{Então: } -2a = -4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow -2b = 6$$

$$b = -3 \Rightarrow 4 = (2)^2 + (-3)^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = 4 + 9 - 4 \Rightarrow r = \sqrt{9} \Rightarrow r = 3$$

$$\text{Logo: } O(a, b) = (2, -3) \text{ e } r = 3.$$

**5. Reconhecimento da equação de circunferência** Sabemos que a equação geral da circunferência apresenta a seguinte forma:  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Na forma reduzida, temos:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  (I)

Se agruparmos os termos em  $x$  e  $y$  e isolarmos  $C$ , teremos:

$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$$

Para completarmos os quadrados perfeitos, adicionamos  $\frac{A^2}{4}$  e  $\frac{B^2}{4}$  a ambos os membros da equação

$$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

$$\text{Fatorando-se os parênteses: } \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \quad (\text{II})$$

Se compararmos as equações (I) e (II):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{e}$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \quad \text{podemos escrever: } r^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

Em relação ao valor da expressão  $\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$ , temos três casos distintos:

a)  $\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} > 0$ . Neste caso, o gráfico da equação representa uma *circunferência* cujo centro é  $O\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  e raio  $r$ .

b)  $\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} = 0$ . O gráfico da equação é um ponto único.

c)  $\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} < 0$ . Não existem valores que satisfaçam à equação, logo, o seu gráfico não contém ponto algum.

### **Exercícios resolvidos:**

1. Verificar se a equação  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$  tem como gráfico uma circunferência. Caso contrário, classificar o seu gráfico.

**Resolução:** Comparando a equação genérica com a equação dada, temos:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

$$\text{Assim: } A = -6, B = -8 \text{ e } C = 25$$

$$\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} = \frac{(-6)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 25}{4} = \frac{100 - 100}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

A equação dada tem como gráfico um único ponto.

Não representa, portanto, uma circunferência.

2. Verificar se a equação  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 49 = 0$  tem por gráfico uma circunferência.

**Resolução:**  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 49 = 0$

$$\text{Temos: } A = -6, B = -8 \text{ e } C = 49$$

$$\begin{aligned} \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} &= \frac{(-6)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 49}{4} = \\ &= \frac{36 + 64 - 196}{4} = \frac{100 - 196}{4} = -\frac{96}{4} = -24 < 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos que a equação nunca será satisfeita e o seu gráfico não conterá nenhum ponto.

3. Determine  $m$  real para que a equação  $x^2 + y^2 - mx - 10y + 25 = 0$  tenha como gráfico uma circunferência.

**Resolução:** Para que a equação dada represente uma circunferência, devemos ter:

$\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} > 0$ . Onde  $A = -m$ ,  $B = -10$  e  $C = 25$

$$\text{Então: } \frac{(m)^2 + (-10)^2 - 4 \cdot 25}{4} > 0 \Rightarrow \frac{m^2 + 100 - 100}{4} > 0$$

$$m^2 > 0 \Rightarrow m > 0$$

### Exercícios propostos:

90. (UFPE) Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença: A circunferência de equação  $x^2 + y^2 + 4y + 1 = 0$  tem, respectivamente, por centro e por raio:

- a)  $(-1, 0)$  e 3   b)  $(-1, 1)$  e 3   c)  $(0, -2)$  e 3   d)  $(0, 2)$  e  $\sqrt{3}$    e)  $(0, -2)$  e  $\sqrt{3}$

91. Determine a equação geral da circunferência, dados o centro  $O$  e o raio  $r$ , nos seguintes casos:

- a)  $O(2, -3)$  e  $r = \sqrt{5}$    d)  $O(0, 6)$  e  $r = \sqrt{3}$   
b)  $O(5, 0)$  e  $r = 7$    e)  $O(4, 7)$  e  $r = 1$   
c)  $O(-8, 0)$  e  $r = 2$    f)  $O(0, 0)$  e  $r = 5$

92. Determine o centro  $O$  e o raio  $r$  das circunferências de equações:

- a)  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$    d)  $x^2 + y^2 - 2y = 0$   
b)  $x^2 + y^2 + 2x - 8y = 0$    e)  $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$   
c)  $x^2 + y^2 - 8x = 0$

93. Verificar se as equações abaixo representam uma circunferência. Caso contrário, classificar o seu gráfico.

- a)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$    c)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$   
b)  $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$    d)  $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 20 = 0$

94. (Mack-SP) O maior valor inteiro de  $k$ , para que a equação  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$  represente uma circunferência é:

- a) 10   b) 12   c) 13   d) 15   e) 16

95. (UFRS) O valor de  $k$  que transforma a equação  $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$  na equação de uma circunferência de raio 7 é:

- a) -4   b) -8   c) 5   d) 7   e) -5

**6. Posições relativas entre ponto e circunferência** Estudar a posição relativa de um ponto  $P(x, y)$  a uma circunferência de centro  $O(a, b)$  e raio  $r$  é comparar a distância do ponto ao centro da circunferência com a medida do raio dessa circunferência.

Temos três posições relativas:

a)  $d(O, P) = r$ . Se a distância entre o ponto  $P$  e o centro da circunferência é igual a  $r$ , então podemos concluir que o ponto  $P$  pertence à circunferência.

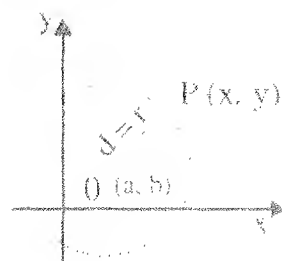


Nesse caso:  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$



b)  $d(O, P) < r$ . O ponto  $P(x, y)$  é *interno* à circunferência.

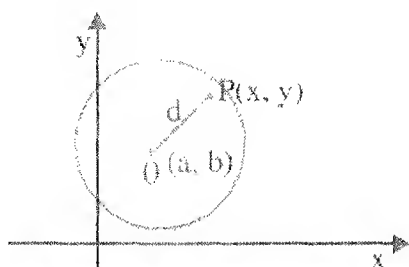


Nesse caso:

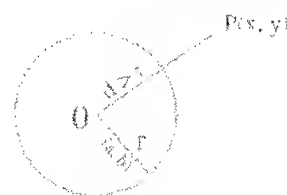
$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 < 0$$



c)  $d(O, P) > r$ . O ponto  $P(x, y)$  é *externo* à circunferência.

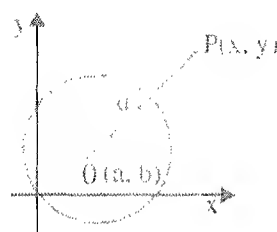


Nesse caso:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} > r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 > 0$$



### Exercícios resolvidos:

1. Quais as posições dos pontos  $P_1(1, 1)$ ,  $P_2(-2, 3)$  e  $P_3(-1, 1)$  em relação à circunferência cuja equação é:  $x^2 + y^2 + 5x + 7y - 14 = 0$ ?

**Resolução:** Devemos substituir as coordenadas dos pontos em questão na equação da circunferência dada e verificar quais das três condições estudadas ocorre.

$$x^2 + y^2 + 5x + 7y - 14 = 0$$

a)  $P_1(1, 1)$

$$1^2 + 1^2 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 14 = 1 + 1 + 5 + 7 - 14 = 4 - 14 = 0$$

Assim,  $x^2 + y^2 + 5x + 7y - 14 = 0$  e, portanto,  $P_1(1, 1)$  pertence à circunferência.

b)  $P_2(-2, 3)$

$$(-2)^2 + 3^2 + 5 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 - 14 = 4 + 9 - 10 + 21 - 14 = 10 > 0$$

Então,  $x^2 + y^2 + 5x + 7y - 14 > 0$  e, portanto,

$P_2(-2, 3)$  é *externo* à circunferência.

$$c) P_3(-1, 1)$$

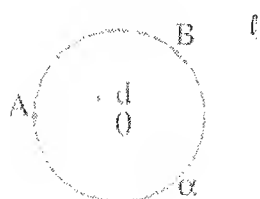
$$(-1)^2 + 1^2 + 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 - 14 = 1 + 1 - 5 + 7 - 14 = -10 < 0$$

Então,  $x^2 + y^2 + 5x + 7y - 14 < 0$  e, portanto,

$P_3(-1, 1)$  é *interno* à circunferência.

**7. Posição relativa entre uma reta e uma circunferência** Uma reta  $\ell$  tem sua posição definida, em relação à circunferência  $\alpha$  de centro  $O$  e raio  $r$ , quando:

a)  $\ell$  intercepta  $\alpha$  em dois pontos  $A$  e  $B$ , portanto a reta e a circunferência são *secantes*



Assim:  $\ell \cap \alpha = \{A, B\}$

Nesse caso, temos:  $d(O, \ell) < r$

b)  $\ell$  intercepta  $\alpha$  em um só ponto  $A$ , portanto a reta é *tangente* à circunferência



Assim,  $\ell \cap \alpha = \{A\}$

Nesse caso:  $d(O, \ell) = r$

c)  $\ell$  não intercepta  $\alpha$  em ponto algum, portanto a reta e a circunferência são *exteriores* ou *não-secantes*



Assim,  $\ell \cap \alpha = \emptyset$

Nesse caso:  $d(O, \ell) > r$

### **Exercícios resolvidos:**

1. Determinar a posição da reta ( $\ell$ )  $y = x + 5$  em relação à circunferência  $\alpha$  de equação  $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ .

**Resolução:** Devemos comparar a distância  $d(O, \ell)$  e o raio  $r$  para decidirmos sobre a posição da reta  $\ell$  e da circunferência  $\alpha$ .

a) Cálculo das coordenadas do centro  $O$  e do raio  $r$ :

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \text{ e } -2a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ e } -2b = -6 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{Logo: } \boxed{O(0, 3)}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = c \Rightarrow 0^2 + 3^2 - r^2 = 5 \Rightarrow 9 - 5 = r^2$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

b) Cálculo da distância do centro  $O$  à reta  $\ell$ :

$$(\ell) y = x + 5 \Rightarrow (\ell) x - y + 5 = 0$$

$$d(O, \ell) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 - 3 + 5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

c) Comparação de  $d(O, \ell)$  e  $r$ :  $\sqrt{2} < 2$ , portanto,  $d(O, \ell) < r$

Assim, podemos concluir que a reta  $\ell$  e a circunferência  $\alpha$  são secantes.

2. Sabendo-se que a reta  $\ell$  de equação  $y = x + 5$  e a circunferência  $\alpha$ , de equação  $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ , são secantes, calcular as coordenadas dos pontos de intersecção.

**Resolução:** Devemos encontrar as coordenadas dos pontos de intersecção da reta  $\ell$  e da circunferência  $\alpha$ , bastando, para isso, solucionar o sistema formado pelas suas equações.

$$\begin{cases} y = x + 5 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de  $y$  na equação II, temos:

$$x^2 + (x + 5)^2 - 6 \cdot (x + 5) + 5 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 10x + 25 - 6x - 30 + 5 = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow x' = 0 \text{ ou } x'' = -2$$

Substituindo os valores de  $x'$  e  $x''$  na equação I, temos:

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

$$x'' = -2 \Rightarrow y = -2 + 5 \Rightarrow y = 3$$

Assim,  $A(0, 5)$  e  $B(-2, 3)$

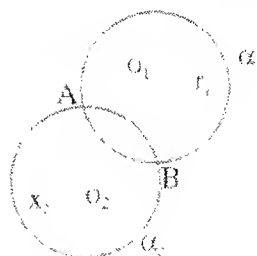
Logo, os dois pontos que a reta  $\ell$  e a circunferência  $\alpha$  têm em comum são  $A = (0, 5)$  e  $B = (-2, 3)$ .

**8. Posições relativas de duas circunferências** Dadas duas circunferências  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  num mesmo plano, podemos ter as seguintes posições relativas:

a)  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são *secantes*

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{A, B\}$$

$$d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$$

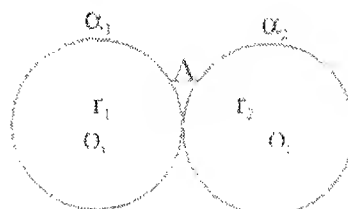


b)  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são *tangentes*

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{A\}$$

b.1) *externamente*

$$d(O_1, O_2) = r_1 + r_2$$



b.2) *internamente*

$$d(O_1, O_2) = |r_2 - r_1|$$



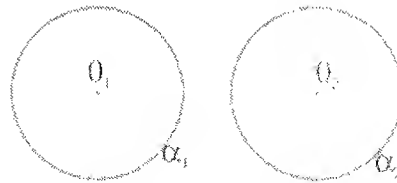
c)  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são *não-secantes*

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$$

c.1) *externamente*

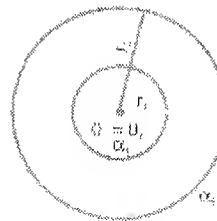
$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$$

$$d(O_1, O_2) > r_1 + r_2$$



c.2) *internamente*

$$d(O_1, O_2) < |r_2 - r_1|$$



### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a posição relativa da circunferência  $(\alpha_1)$   $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$  em relação à circunferência  $(\alpha_2)$   $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$ .

**Resolução:** Para examinarmos a posição relativa de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , devemos calcular os seus centros e os seus raios.

a) Cálculo do centro  $O_1$  e do raio  $r_1$ :

$$(\alpha_1) \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$-2a = -4 \Rightarrow a = 2$$

$$-2b = -6 \Rightarrow b = 3$$

$$\boxed{O_1(2, 3)}$$

$$a^2 + b^2 - r_1^2 = c \Rightarrow 2^2 + 3^2 - r_1^2 = -3 \Rightarrow (-r_1)^2 = -16 \Rightarrow r_1 = \sqrt{16}$$

$$\boxed{r_1 = 4}$$

b) Cálculo do centro  $O_2$  e do raio  $r_2$ :

$$(\alpha_2) \quad x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$$

$$-2a = 6 \Rightarrow a = -3 \text{ e } -2b = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$\boxed{O_2(-3, -1)}$$

$$a^2 + b^2 - r_2^2 = c \Rightarrow (-3)^2 + (-1)^2 - r_2^2 = 1 \Rightarrow r_2^2 = 9 + 1 - 1 \Rightarrow r_2^2 = 9$$

$$\boxed{r_2 = 3}$$

c) Cálculo da distância dos centros e da soma dos raios:

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} \Rightarrow d(O_1, O_2) = \sqrt{25 + 16}$$

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{41} \cong 6,4$$



$$r_1 + r_2 = 4 + 3 \Rightarrow r_1 + r_2 = 7$$

d) Comparação de  $d(O_1, O_2)$  e  $r_1 + r_2$ :

$$\text{Como } \sqrt{41} \cong 6,4, \text{ então } \sqrt{41} < 7$$

$$\text{Logo: } d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$$

Portanto, as circunferências são secantes.

2. Determinar a posição relativa da circunferência  $(\alpha_1)$   $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$  em relação à circunferência  $(\alpha_2)$   $x^2 + y^2 - 4x = 0$ . No caso de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  serem tangentes ou secantes, obter o(s) ponto(s) em comum.

Resolução: a) Cálculo de  $O_1$  e  $r_1$ :

$$(\alpha_1) \ x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0 \text{ e } -2a = -16 \Rightarrow a = 8$$

$$-2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\boxed{O_1(8, 0)}$$

$$a^2 + b^2 - r_1^2 = c \Rightarrow 8^2 + 0^2 - r_1^2 = 48$$

$$r_1^2 = 64 - 48 \Rightarrow r_1^2 = 16 \Rightarrow \boxed{r_1 = 4}$$

b) Cálculo de  $O_2$  e  $r_2$ :

$$(\alpha_2) \ x^2 + y^2 - 4x = 0 \text{ e } -2a = -4 \Rightarrow a = 2$$

$$-2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\boxed{O_2(2, 0)}$$

$$a^2 + b^2 - r_2^2 = c \Rightarrow 2^2 + 0^2 - r_2^2 = 0 \Rightarrow r_2^2 = 4 \Rightarrow \boxed{r_2 = 2}$$

c) Cálculo da distância dos centros e da soma dos raios:

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{(2-8)^2 + (0-0)^2} \Rightarrow d(O_1, O_2) = \sqrt{36}$$

$$d(O_1, O_2) = 6$$

$$r_1 + r_2 = 4 + 2 \Rightarrow r_1 + r_2 = 6$$

Comparando  $d(O_1, O_2)$  com  $r_1 + r_2$ , temos que:

$$d(O_1, O_2) = r_1 + r_2 = 6$$

Portanto, concluímos que as circunferências  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são tangentes.

d) Cálculo do ponto comum de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ :

As circunferências  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são tangentes, tendo um só ponto em comum, que poderá ser calculado através do sistema formado por suas equações.

$$\begin{cases} (\alpha_1) \ x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0 & \text{(I)} \\ (\alpha_2) \ x^2 + y^2 - 4x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando por  $(-4)$  a equação (II), temos:

$$\begin{cases} (\alpha_1) x^2 + y^2 - 16x = -48 \\ (\alpha_2) -4x^2 - 4y^2 + 16x = 0 \end{cases}$$

$$-3x^2 - 3y^2 = -48 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \text{ (III)}$$

Note que não temos termos em  $y$  nas duas equações, por isso, fazemos  $y = 0$  na equação (III).

$$x^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

Desprezamos o valor de  $x = -4$ , já que ele não satisfaz as duas equações.

$$\text{Logo, } \alpha_1 \cap \alpha_2 = (4, 0)$$

#### Exercícios complementares:

96. Dada a equação da circunferência  $(\alpha) x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ , determinar as posições dos pontos abaixo, em relação a  $\alpha$ .

- a)  $P(1, 1)$                       d)  $P(-2, 3)$   
b)  $P(3, -2)$                     e)  $P(-1, 1)$   
c)  $P(1, -1)$

97. Dada uma circunferência  $\alpha$  de equação:  $x^2 + y^2 - 10x - 2y + m = 0$ , determinar as condições que devemos impor ao número  $m$ , para que o ponto  $A(-1, 2)$  seja:

- a) interno à circunferência  
b) externo à circunferência  
c) pertencente à circunferência

98. Determinar a posição da reta  $l$ , de equação  $x + y = 0$ , em relação à circunferência  $a$ , de equação  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , e, no caso de haver ponto(s) comum(ns), determiná-los.

99. (UFSC) Dados uma circunferência de equação  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 17$  e a reta  $t$  de equação  $4x - y + k = 0$ , determine o maior valor de  $k$ , sabendo-se que a reta  $t$  é tangente à circunferência.

100. (PUC-SP) A circunferência com centro na origem e tangente à reta  $3x + 4y = 10$  tem equação:

- a)  $x^2 + y^2 = 1$                       d)  $x^2 + y^2 = 4$   
b)  $x^2 + y^2 = 2$                       c)  $x^2 + y^2 = 5$   
c)  $x^2 + y^2 = 3$

101. (Fac. Oswaldo Cruz-SP) As circunferências

$$x^2 - 4x + y^2 - 14y + 49 = 0 \text{ e } x^2 + 2x + y^2 - 6y + 1 = 0$$

- a) são tangentes  
b) cortam-se em 2 pontos  
c) não se encontram  
d) são iguais

102. (UFSC) O valor de  $k$  que transforma a equação

$$x^2 + y^2 + 14x - 18y + k = 0, \text{ na equação de uma circunferência, de raio } 6, \text{ é:}$$

103. (Cessem-SP) Qual deve ser o valor de  $m$ , para que a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + 4x - my - 6 = 0 \text{ passe pelo ponto } P(0, 1)?$$

- a)  $m = 5$                                   d)  $m = -2$   
b)  $m = -5$                                 e)  $m = 0$   
c)  $m = 2$

# Capítulo XIX

## AMPLIANDO SEU CONHECIMENTO

**1. Logaritmo decimal — característica e mantissa** A tabela logarítmica foi amplamente utilizada até a invenção da calculadora eletrônica. Mostraremos como proceder para consultar a tabela.

Inicialmente, utilizamos o fato de que qualquer número inteiro está compreendido entre duas potências de base 10 (base decimal). Por exemplo:

$$10^{-2} < 0,02 < 10^{-1}$$

$$10^{-1} < 0,7 < 10^0$$

$$10^0 < 8 < 10^1$$

$$10^1 < 31 < 10^2$$

De forma geral, para um número  $x$  inteiro, temos:

$$10^c < x < 10^{c+1}$$

Colocando as potências em forma de logaritmos, temos:  $\log_{10} 10^c < \log_{10} x < \log_{10} 10^{c+1}$

$$c < \log_{10} x < c + 1$$

Desta forma, as expressões  $10^0 < 8 < 10^1$  e  $10^1 < 31 < 10^2$  podem ser escritas sob a forma de logaritmo:  $0 < \log 8 < 1$  e  $1 < \log 31 < 2$

Assim, podemos observar que o logaritmo decimal de um número está entre dois números inteiros consecutivos que representamos, de forma genérica, por:  $c$  e  $c + 1$ .

O logaritmo será dado, portanto, por um número  $m$

( $0 < m < 1$ ) somado a  $c$ .

$\log x = c + m$ , onde  $c$  é chamado de característica do  $\log x$ , e representa a parte inteira, e  $m$  é chamada mantissa do  $\log x$  ( $0 < m < 1$ ).

A palavra mantissa significa excesso. Na tabela de logaritmos, encontram-se as mantissas dos números inteiros entre 1 e 1000.

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar  $\log 341$ .

*Resolução:* Sabemos que 341 está entre 100 e 1000:  $10^2 < 341 < 10^3$

Como a característica é o expoente de menor potência de 10, temos que  $c = 2$ .

Consultando a tabela para 341, encontramos  $m = 0,53275$ .

$$\text{Logo: } \log 341 = 2 + 0,53275 \Rightarrow \boxed{\log 341 = 2,53275}$$

2. Calcular  $\log 73$ .

*Resolução:* Note que 73 está entre 10 e 100, então:  $10^1 < 73 < 10^2$

Neste caso,  $c = 1$ .

Consultando a tabela para 73, temos  $m = 0,86332$ ,

$$\text{portanto: } \log 73 = 1 + 0,86332 \Rightarrow \boxed{\log 73 = 1,86332}$$

3. Calcular  $\log 0,7$ .

*Resolução:* Sabendo que 0,7 está entre 0,1 e 1, temos que:

$$10^{-1} < 0,7 < 10^0. \text{ Então, } c = -1.$$

Procuramos na tabela a mantissa para  $n = 7$  e encontramos

$$m = 0,84510, \text{ portanto: } \log 0,7 = -1 + 0,84510$$

$$\boxed{\log 0,7 = -0,15490}$$

### Exercício proposto:

1. Determine o valor dos logaritmos utilizando a tabela no final do livro: a)  $\log 237$ ; b)  $\log 0,5$ ; c)  $\log 93$ ; d)  $\log 915$ ; e)  $\log 53$ ; f)  $\log 0,9$ ; g)  $\log 419$

**2. Funções trigonométricas inversas** As funções trigonométricas admitem inversas quando restringimos os valores de  $x$ , ou seja, o domínio da função.

a) **Função arco-seno:** A função seno admite inversa se considerarmos

os valores de  $x$  entre  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , ou seja:  $y = \sin x$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

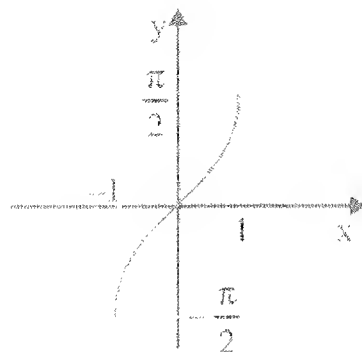
Neste caso, a função inversa terá domínio  $[-1, 1]$  e imagem

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e será chamada de } \textit{função arco-seno}.$$

$y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x$ , onde  $y \in$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dizemos que  $y$  é o arco cujo seno é  $x$ , e sua representação gráfica é:



### Exercícios resolvidos:

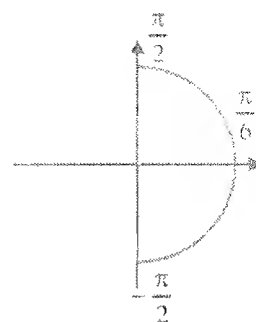
1. Determinar  $p = \arcsen \frac{1}{2}$ .

*Resolução:* Aplicamos a definição:  $p = \arcsen \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sen p = \frac{1}{2}$

Lembrando que  $p$  pertence ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

conforme mostra a figura, temos:

$$p = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$



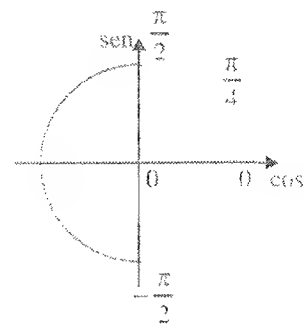
2. Calcular  $\text{tg} \left( \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

*Resolução:* Seja  $y = \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2}$ , aplicando a definição, temos que:

$$\sen y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , temos:  $y = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

$$\text{Logo, } \text{tg} \left( \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \text{tg } y = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$$

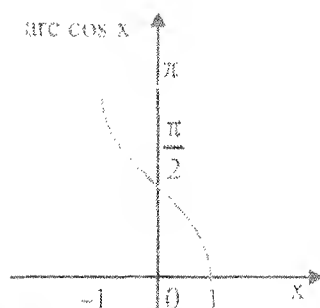


**b) Função arco-cosseno:** Para definir esta função, consideremos a função cosseno com domínio  $[0, \pi]$  e imagem  $[-1, 1]$ .

Como no caso anterior, aqui também existe uma *inversão* dos conjuntos imagem e domínio. Assim, a função arco-cosseno apresenta domínio  $[-1, 1]$  e imagem  $[0, \pi]$ .

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x, \text{ onde } y \in [0, \pi]$$

Dizemos que  $y$  é o arco cujo cosseno é  $x$ , e sua representação gráfica é:

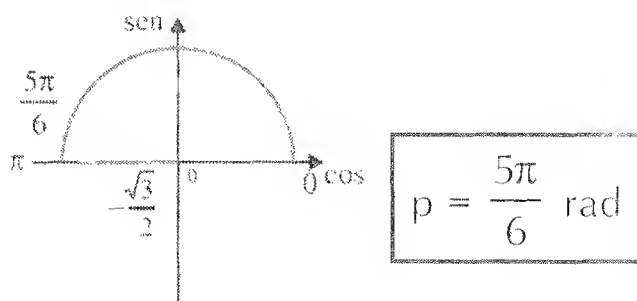


### Exercícios resolvidos:

1. Determinar  $p = \arccos -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

*Resolução:* Aplicamos a definição:  $p = \arccos -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Lembrando que  $p$  pertence ao intervalo  $[0, \pi]$ , podemos determinar o valor de  $p$  no ciclo trigonométrico:



2. Calcular  $\sin \left( \arccos -\frac{3}{5} \right)$ .

*Resolução:* Seja  $y = \arccos -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos y = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin \left( \arccos -\frac{3}{5} \right) = \sin y$

Conhecendo o valor de  $\cos y$ , utilizamos a relação fundamental da trigonometria para calcular o  $\sin y$ :  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$$\sin^2 y + \left( -\frac{3}{5} \right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 y + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 y = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 y = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin y = \pm \frac{4}{5}$$

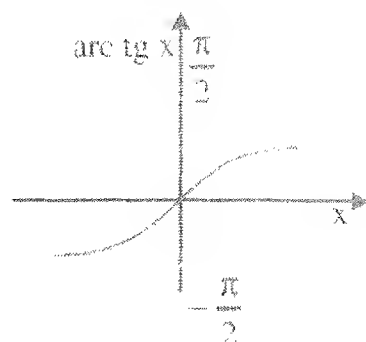
Note que, segundo a definição,  $y$  deve estar entre 0 e  $\pi$ , ou seja, no primeiro ou no segundo quadrante. Em qualquer caso, o valor do seno é positivo, então:

$$\boxed{\sin \left( \arccos -\frac{3}{5} \right) = \sin y = \frac{4}{5}}$$

c) **Função arco-tangente:** Consideramos a função tangente de domínio  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ . Neste intervalo podemos definir a função inversa: função arco-tangente.

$$y = \arctg x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x, \text{ onde } y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Dizemos que  $y$  é o arco cuja tangente é  $x$ , e sua representação gráfica é:



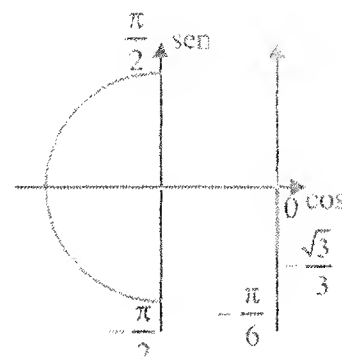
### Exercícios resolvidos:

1. Resolver  $\arctg x = -\frac{\pi}{6}$ .

**Resolução:** Aplicamos a definição:  $\arctg x = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} -\frac{\pi}{6} = x$ .

Localizamos o arco de  $-\frac{\pi}{6}$  rad, lembrando que o sinal negativo indica que partimos de zero e "caminhamos" no sentido negativo, descrevendo o arco de  $\frac{\pi}{6}$  rad ( $30^\circ$ ), conforme mostra a figura:

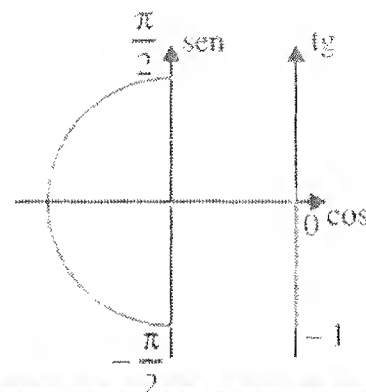
$$x = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$



2. Determinar  $p = \arctg -1$ .

**Resolução:** Aplicamos a definição:  $p = \arctg(-1) \Rightarrow \operatorname{tg} p = -1$ , lembrando que  $p \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , podemos determinar o valor de  $p$  no ciclo trigonométrico, conforme mostra a figura:

$$\boxed{p = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}}$$



### Exercícios propostos:

2. Determinar  $p$  em cada caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } p = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{c) } p = \arctg \sqrt{3} & \text{e) } p = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{b) } p = \arccos -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{d) } p = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{f) } p = \arctg 1 \end{array}$$

3. Determinar o que se pede:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \cos \left( \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \text{c) } \operatorname{tg} \left( \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{e) } \cos \left( 2 \cdot \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ \text{b) } \sin (\arctg -\sqrt{3}) & \text{d) } \sin \left( 2 \cdot \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{f) } \operatorname{tg} \left( 2 \cdot \arcsin -\frac{1}{2} \right) \end{array}$$

4. Calcule  $\sin \left( \arccos \frac{3}{4} \right)$ .

**3. Relações trigonométricas** No capítulo de Trigonometria, estudamos as relações trigonométricas em triângulos retângulos. Ampliaremos, agora, estas relações a outros tipos de triângulos:

Recordando:

*triângulo retângulo*: possui um ângulo reto (igual a  $90^\circ$ )

*triângulo acutângulo*: possui somente ângulos agudos (menores que  $90^\circ$ )

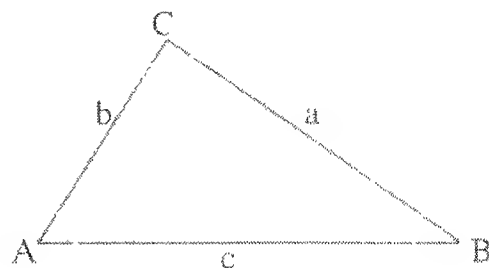
*triângulo obtusângulo*: possui um ângulo obtuso (maior que  $90^\circ$ )

#### a) Teorema dos senos

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Assim, segundo o teorema dos senos, temos que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



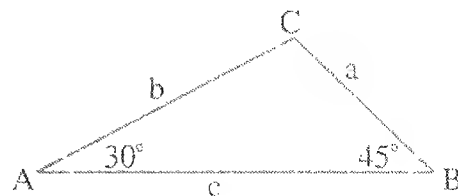
#### Exercício resolvido:

1. Num triângulo ABC, temos  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$  e  $a = \sqrt{2}$ .

Determine os lados  $b$  e  $c$ .

**Resolução:** Através de uma figura, podemos visualizar os dados do problema.

De acordo com o teorema dos senos, temos que:





$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Tomando a primeira igualdade:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot 2 = b \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Para determinar seno de  $\hat{C}$ , lembramos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ :

$$30^\circ + 45^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 105^\circ$$

$$\sin \hat{C} = \sin 105^\circ = \sin (45^\circ + 60^\circ)$$

$$\sin \hat{C} = \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ$$

$$\sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

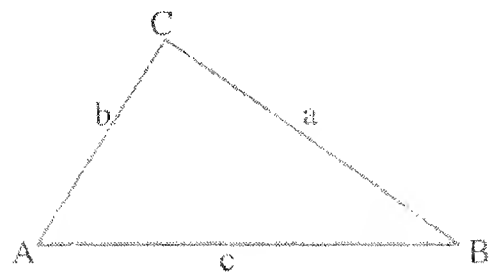
Portanto, utilizando a segunda igualdade do teorema:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot c}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \Rightarrow c = \frac{4(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4\sqrt{2}}$$

$$c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{c = 1 + \sqrt{3}}$$

## b) Teorema dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



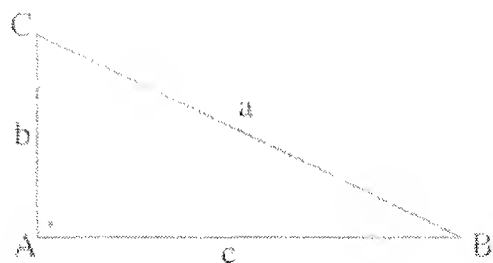
Segundo o enunciado do teorema, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Consideremos a relação  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ . Para demonstrá-la, devemos considerar três casos:

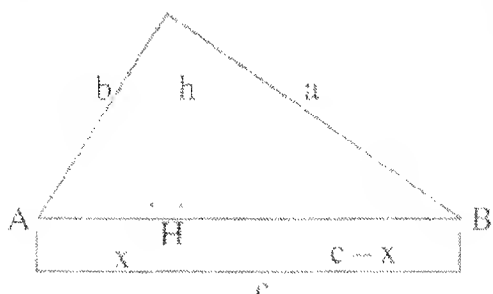


**b.1)  $\hat{A}$  é ângulo reto:**

Aplicando o teorema dos cossenos ao lado  $a$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0, \text{ pois } \cos 90^\circ = 0$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad (\text{teorema de Pitágoras})$$



**b.2)  $\hat{A}$  é ângulo agudo:**

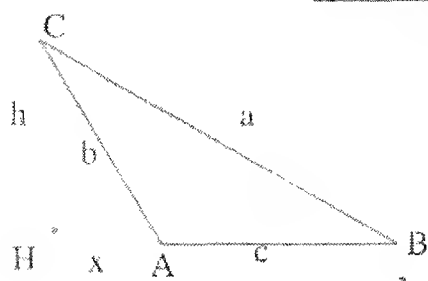
A altura  $h$ , relativa ao lado AB, divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos AHC e BHC, temos:  $b^2 = h^2 + x^2$  (I)

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2 \therefore a^2 - c^2 + 2cx = h^2 + x^2 \text{ (II)}$$

$$\text{como (I) = (II)} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 + 2cx \text{ (III)}$$

Observando a figura, temos  $\cos \hat{A} = \frac{x}{b}$ , portanto,  $x = b \cdot \cos \hat{A}$ . Substituindo em (III), temos:  $b^2 = a^2 - c^2 + 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos \hat{A}$  de onde:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}$$



**b.3)  $\hat{A}$  é ângulo obtuso:**

Novamente, ao traçarmos a altura  $h$ , relativa ao lado AB, temos dois triângulos retângulos. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos AHC e BHC, temos:

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ (I)}$$

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2 \therefore a^2 - c^2 - 2cx = h^2 + x^2 \text{ (II)}$$

$$\text{como (I) = (II)} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 - 2cx \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \text{ (III)}$$

Da figura, determinamos  $\cos (180^\circ - \hat{A}) = \frac{x}{b}$

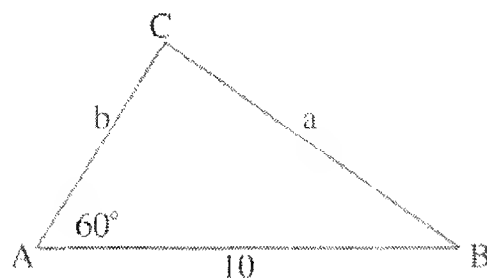
Como  $\cos (180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$ , temos que:  $x = -b \cdot \cos \hat{A}$

Substituindo em (III), temos:  $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}$

### **Exercício resolvido:**

1. Se um triângulo tem dois lados que medem 8 cm e 10 cm, formando um ângulo de  $60^\circ$  entre si, qual será a medida do terceiro lado?

**Resolução:** De acordo com os dados, podemos fazer a seguinte figura:



Aplicando o teorema dos cossenos, temos:

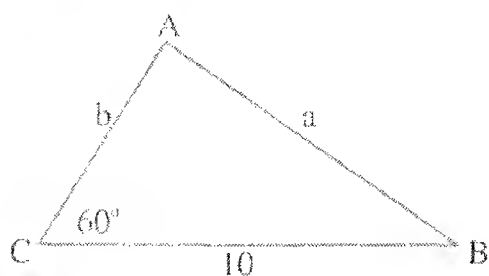
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 164 - 80 = 84 \Rightarrow a = \sqrt{84} \Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{21} \text{ cm}}$$

### ⇒ Exercícios propostos:

5. (Mack-SP) Os ângulos internos,  $\hat{A}$  e  $2\hat{A}$ , de um triângulo, têm como medida dos lados opostos, respectivamente, os valores 1 e  $\sqrt{2}$ . O ângulo  $\hat{A}$  mede: a)  $90^\circ$  b)  $60^\circ$  c)  $45^\circ$  d)  $30^\circ$  e)  $\arcsen \sqrt{2}$

6. (PUC-SP) No triângulo da figura:  $a = 20$ ,  $b = 25$  e  $\gamma = 60^\circ$ . Então,  $\sen \alpha$  é igual a



a)  $\frac{1}{\sqrt{7}}$

d)  $\frac{2}{\sqrt{10}}$

b)  $\frac{2}{\sqrt{7}}$

e)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

c)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

7. Num triângulo ABC tal que  $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$  e  $\hat{B} = 75^\circ$ , a medida  $\overline{AB}$  é: a) 1 b)  $\sqrt{2}$  c) 2 d)  $2\sqrt{2}$  e) 3

8. (Cesgranrio-RJ) Em um triângulo ABC,  $\overline{AB} = 3$ ,  $\overline{BC} = 4$  e  $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = 60^\circ$ . O lado  $\overline{AC}$  mede: a) 5 b)  $\sqrt{13}$  c)  $\sqrt{37}$  d)  $2\sqrt{3}$  e)  $3\sqrt{3}$

(consulte tabela trigonométrica no final deste livro)

### 4. Números complexos operações na forma trigonométrica

a) **Multiplicação:** Consideremos dois números complexos representados na forma trigonométrica: ( $z_1, z_2 \neq 0$ )

$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sen \theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sen \theta_2)$$

O produto  $z_1 \cdot z_2$  é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sen \theta_1) \cdot \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sen \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sen \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sen \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \cos \theta_1 \cdot \sen \theta_2 + i \cdot \sen \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \cdot \sen \theta_1 \cdot \sen \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \cos \theta_1 \cdot \sen \theta_2 + i \cdot \sen \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sen \theta_1 \cdot \sen \theta_2)$$

Colocando  $i$  em evidência, temos:  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sen \theta_1 \cdot \sen \theta_2) + i \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sen \theta_2 + \sen \theta_1 \cdot \cos \theta_2)]$

Logo:  $\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sen(\theta_1 + \theta_2)]}$

Para uma multiplicação de  $n$  elementos, temos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \dots \cdot \rho_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n)]$$

### Exercícios resolvidos:

1. Obter  $z_1 \cdot z_2$ , sabendo-se que:  $z_1 = 6 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$  e  $z_2 = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$

*Resolução:*  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 2 \cdot [\cos(45^\circ + 30^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ + 30^\circ)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot [\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ]$$

2. Dados:  $z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right)$  e

$z_3 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)$ . Calcular  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ . *Resolução:*

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 12 \cdot \left[ \cos\left(\frac{3\pi + \pi + 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi + \pi + 2\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 12 \cdot \left[ \cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{6\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 12 \cdot [\cos \pi + i \cdot \sin \pi] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 12 \cdot [-1 + i \cdot 0]$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -12}$$

- b) **Divisão:** Consideremos os números complexos na forma trigonométrica:  $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2)$  com  $z_2 \neq 0$ . A divisão destes números é dada por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{\rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)}$$

Multiplicando ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{\rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)}{(\rho_2)^2 [\cos^2 \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2]}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)}{\rho_2^2 [\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2]}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, sabemos que:  
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ . Substituindo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2)]}{\rho_2^2 \cdot (1)}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]}$$

### Exercícios resolvidos:

1. Determinar  $\frac{z_1}{z_2}$ , sabendo que:  $z_1 = 9 \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)$  e  $z_2 = 3 \cdot (\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ)$

Resolução: Temos:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{3} \cdot [\cos(60^\circ - 15^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ - 15^\circ)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3 \cdot [\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ] \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

2. Sendo  $z_1 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right)$  e  $z_2 = 4 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)$ , obter  $\frac{z_1}{z_2}$ .

Resolução: Temos:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cos \left( \frac{3\pi - 2\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{3\pi - 2\pi}{6} \right) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right] \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right]$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}}$$

c) **Potenciação - Fórmula de Moivre:** Consideremos o número complexo  $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$  e  $n > 1$ , então temos que:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \dots \cdot \rho}_{n \text{ fatores}} \cdot [\underbrace{\cos(\theta + \theta + \dots + \theta)}_{n \text{ parcelas}} + i \cdot \underbrace{\sin(\theta + \theta + \dots + \theta)}_{n \text{ parcelas}}]$$

$$\text{Logo: } \boxed{z^n = \rho^n \cdot (\cos \cdot n \cdot \theta + i \cdot \sin \cdot n \cdot \theta)}$$

#### Exercícios resolvidos:

1. Dado  $z = 1 + \sqrt{3}i$ , calcular  $z^{10}$ .

Resolução: a) Cálculo de  $\rho$ :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow \sqrt{4} \Rightarrow \rho = 2$$

b) Cálculo de  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{\rho} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

c) Cálculo de  $z^{10}$ :  $z^n = \rho^n \cdot (\cos \cdot n \cdot \theta + i \cdot \sin \cdot n \cdot \theta)$

$$z^{10} = 2^{10} \cdot \left( \cos 10 \cdot \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin 10 \cdot \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z^{10} = 1024 \cdot \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \Rightarrow \boxed{z^{10} = -512 - 512\sqrt{3}i}$$

2. Calcular  $z^6$ , onde  $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ .

Resolução:  $z^n = \rho^n \cdot (\cos \cdot n \cdot \theta + i \cdot \sin \cdot n \cdot \theta)$

$$z^6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin 6 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow z^6 = \cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi$$

$$z^6 = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow \boxed{z^6 = 1}$$

d) **Radiciação - Fórmula de Moivre:** Sendo  $z$  um número complexo, chamamos de raízes  $n$ -ésimas de  $z$  aos complexos  $w$ , tais que:

$$w^n = z \Rightarrow w = \sqrt[n]{z}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}^*$$

Então, dado  $z$  não nulo,  $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$  e sendo  $w = \gamma \cdot (\cos \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \varphi)$ , considerando que  $w = \sqrt[n]{z}$ , então podemos escrever:

$$\gamma \cdot (\cos \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \varphi) = \sqrt[n]{\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}$$

Elevamos ambos os membros da equação à  $n$ -ésima potência:

$$[\gamma \cdot (\cos \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \varphi)]^n = \left( \sqrt[n]{\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} \right)^n$$

Pela fórmula da potenciação, temos:

$$\gamma^n \cdot (\cos \cdot n \cdot \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \cdot n \cdot \varphi) = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

A igualdade acima nos permite escrever:  $\gamma^n = \rho$

$$n \cdot \varphi = \theta + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo: } w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left( \cos \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} \right)$$

Observações:

- a) Para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , os valores de  $w$  são distintos, pois os arcos  $\frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}$  são *não-congruentes*, ou seja, terminam em pontos distintos.
- b) A partir de  $k = n, n+1, n+2, \dots$ , os arcos  $\frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}$  aparecem pela 2ª vez, portanto os valores de  $w$  se repetem.

### Exercícios resolvidos:

1. Calcular as raízes cúbicas de  $z = 8$ .

Resolução: a) Cálculo de  $\rho$ :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{8^2 + 0^2} \Rightarrow \boxed{\rho = 8}$$

b) Cálculo de  $\theta$ :

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow \cos \theta = \frac{8}{8} \Rightarrow \cos \theta = 1 \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{0}{8} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 0 \end{array} \right\} \boxed{\theta = 0}$$

c) Cálculo do complexo  $w_k$ :  $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$   
 $z = 8 \cdot (\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0)$

$$\text{Mas, } w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[3]{z}, \text{ então: } w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$w_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left( \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{0+2k\pi}{3} \right) \Rightarrow w_k = 2 \cdot \left( \cos \frac{2k\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$$

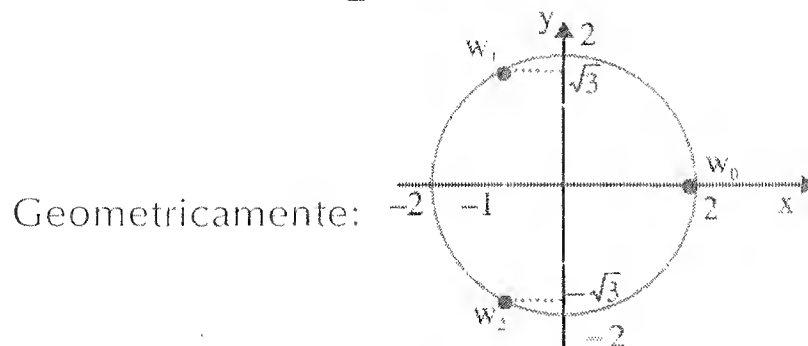
d) Valores de  $k$ :  $k$  varia entre 0 e 2, isto é:  $n = 3$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2 \cdot (1 + i \cdot 0) \Rightarrow \therefore w_0 = 2$$

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow w_1 &= 2 \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ \therefore w_1 &= -1 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \Rightarrow w_2 &= 2 \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \cdot (\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = \\ &= 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \therefore w_2 = -1 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$



2. Determinar o conjunto solução da equação  $2x^6 + 128 = 0$ , onde  $x$  é uma variável complexa.

Resolução: Temos:  $2x^6 + 128 = 0 \Rightarrow 2x^6 = -128 \Rightarrow x^6 = -\frac{128}{2}$   
 $x^6 = -64$

a) Cálculo de  $\rho$ :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-64)^2 + 0^2} \Rightarrow \rho = 64$$

b) Cálculo de  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{\rho} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-64}{64} \Rightarrow \cos \theta = -1 \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho} \Rightarrow \sin \theta = \frac{0}{64} \Rightarrow \sin \theta = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \pi$$



$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta) \Rightarrow z = 64 \cdot (\cos \pi + i \cdot \operatorname{sen} \pi)$$

c) Cálculo do complexo  $w_k$ :

$$w_k = \sqrt[n]{z} \Rightarrow w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left( \cos \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} \right)$$

$$w_k = \sqrt[6]{64} \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot k \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot k \cdot \pi}{6} \right)$$

$$w_k = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot k \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot k \cdot \pi}{6} \right)$$

d) Valores de  $k$ : O número  $k$  varia de 0 a 5, isto é:  $n = 6$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Portanto:

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = \therefore \boxed{w_0 = \sqrt{3} + i}$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot (0 + 1i) = 2i \quad \therefore \boxed{w_1 = 2i}$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = \therefore \boxed{w_2 = -\sqrt{3} + i}$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{6} \right) =$$

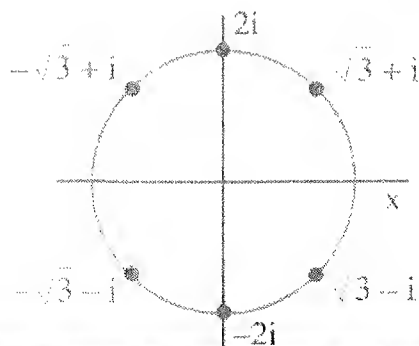
$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right) = \therefore \boxed{w_3 = -\sqrt{3} - i}$$

$$k = 4 \Rightarrow w_4 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{9\pi}{6} \right) = 2 \cdot (0 - 1i) = \therefore \boxed{w_4 = -2i}$$

$$k = 5 \Rightarrow w_5 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 5 \cdot \pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 5 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right) = \therefore \boxed{w_5 = \sqrt{3} - i}$$



Geometricamente:

### ⇒ Exercícios propostos:

9. Dados os números complexos:  $z_1 = 8 \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)$  e  $z_2 = 2 \cdot (\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$ , calcular: a)  $z_1 \cdot z_2$  e b)  $\frac{z_1}{z_2}$

10. Sendo  $z_1 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right)$ ,  $z_2 = 3 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$  e

$z_3 = 4 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$ , números complexos, obter:

a)  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$       b)  $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1}$

11. Sendo o complexo  $z = \sqrt{3} + i$ , então  $z^3$  é:

a)  $8i$    b)  $-8i$    c)  $8$    d)  $-8$    e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}i$

12. (Mack-SP) O número  $(1 - i)^{10}$  é igual a:

a)  $\sqrt{2} - 10i$    b)  $32 + 10i$    c)  $\sqrt{2} + 10i$    d)  $32i$    e)  $-32i$

13. (Mauá-SP) Indicada por  $z$  a variável complexa, resolva a equação  $z^4 + 1 = 0$ .

14. (Santa Casa-SP) É raiz sexta de 1 (um):

(1)  $-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4)  $-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$

(5)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$

(3)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$

a) 2 e 5   b) 2 e 3   c) 1 e 4   d) 5   e) 1 e 3

## Noções de lógica

**1. Introdução** Devemos a Aristóteles (384-322 a.C.) o desenvolvimento da *Lógica*, da qual se utilizaram os antigos filósofos gregos em suas discussões para simplificar e obter maior clareza em sua ciência.

Contribuíram, também, para o desenvolvimento da lógica, Euler, Augustus De Morgan, George Boole, Lewis Carrol, John Venn e Bertrand Russel.

Atualmente, a aplicação mais popular da Álgebra Lógica está na ciência da computação.

**2. Proposição ou sentença** Consideramos proposições ou sentenças, conceitos primitivos, sendo que podemos decidir se são *falsas* ou *verdadeiras*.

As proposições são denotadas por letras latinas minúsculas:  $p, q, r, \dots$

**3. Valor verdade** Chamamos de *valor verdade* a validade ou a falsidade de uma proposição ou sentença. Exemplos de proposições:

$p$ : O céu é azul;  $q$ : Letícia está feliz;  $r$ :  $x + y = 4$

**4. Modificador e conectivos** Usamos o modificador e os conectivos para formar novas proposições a partir das proposições dadas.

Conectivos		Modificador	
expressão	símbolo	expressão	símbolo
e	$\wedge$	não	$\sim$
ou	$\vee$	é falso que	$\sim$
se, ..., então	$\rightarrow$	não é verdade que	$\sim$
se, e somente se,	$\leftrightarrow$		

Observemos um exemplo em que os conectivos e o modificador são usados e quais as alterações que eles *operam* sobre as proposições.

Consideremos duas proposições:

$p$ : Pérsio é inteligente e  $q$ : 1 é menor que 2.

a) Pérsio é inteligente *e* 1 é menor que 2:  $p \wedge q$

Operação: *conjunção*

b) Pérsio é inteligente *ou* 1 é menor que 2:  $p \vee q$

Operação: *disjunção*

c) *Se* Pérsio é inteligente, *então* 1 é menor que 2:  $p \rightarrow q$

Operação: *condicional*

d) Pérsio é inteligente *se, e somente se* 1 é menor que 2:  $p \leftrightarrow q$

Operação: *bicondicional*

e) Não é verdade que Pêrsio é inteligente:  $\sim p$

Operação: negação

f) É falso que 1 é menor que 2:  $\sim q$

Operação: negação

$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
$p$ implica $q$	$p$ é condição necessária e suficiente para $q$
$p$ somente se $q$	
$p$ é condição suficiente para $q$	$p$ é condição necessária e suficiente para $p$
$p$ é condição necessária para $p$	

**5. Operando com a negação** Para entendermos melhor as operações que envolvem negação, observemos os exemplos:

**a) Negação de proposições compostas com e ( $\wedge$ ):** Consideremos as seguintes proposições:

$p$ : Elizabete gosta de viajar e  $q$ : Eunice gosta de fazer compras.

E a proposição composta:

Elizabete gosta de viajar e Eunice gosta de fazer compras.

Em linguagem da Lógica, podemos escrever:

$p \wedge q$  e a negação:  $\sim (p \wedge q)$

Eliminando-se os parênteses, o sinal  $\wedge$  é trocado por  $\vee$  (trocamos “e” por “ou”), assim:  $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

Desta forma, a nova proposição seria:

Elizabete não gosta de viajar ou Eunice não gosta de fazer compras.

**b) Negação de proposições com ou ( $\vee$ ):** Consideremos as seguintes proposições:

$p$ : Santina é uma fada-madrinha e  $q$ : José é um padrinho mágico.

E a proposição composta:

Santina é uma fada-madrinha ou José é um padrinho mágico.

temos a proposição:  $p \vee q$  e a negação:  $\sim (p \vee q)$

Trocando-se os sinais ao eliminarmos os parênteses, devemos trocar o sinal  $\vee$  por  $\wedge$  (trocamos “ou” por “e”)

$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

A nova proposição: Santina *não* é uma fada-madrinha e José *não* é um padrinho mágico.

**c) Negação de uma proposição negativa:** Consideremos a proposição:

$p$ : Deborah é inteligente

A negativa:  $\sim p$ : Deborah não é inteligente.

A negação da proposição negativa:  $\sim(\sim p)$ : Não é verdade que Deborah não é inteligente.

Ou seja, Deborah é inteligente.

Neste caso, temos:  $\sim(\sim p) = p$

b) é falso que  $x$  não seja igual a 4.

Chamemos de  $q$ :  $x$  é igual a 4,  $\sim q$ :  $x$  não é igual a 4 e  $\sim(\sim q)$ : é falso que  $x$  não é igual a 4

Logo:  $\sim(\sim q) = q$ , ou seja " $x$  é igual a 4".

### ⇒ Exercício proposto:

15. Sejam as proposições:  $p$ : Álgebra é interessante,  $q$ : Não tenho uma caneta azul e  $r$ :  $x + y = 5$

Enuncie as proposições: a)  $p \wedge q$ , b)  $p \vee q$ , c)  $q \vee r$ , d)  $\sim p$ , e)  $\sim(p \vee q)$ , f)  $\sim(p \wedge q)$ , g)  $p \rightarrow q$ , h)  $q \leftrightarrow r$ , i)  $\sim(\sim q)$ , j)  $(p \wedge \sim r)$  e l)  $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r)$

**6. Tabelas-verdade** Para cada proposição ou sentença, é associado apenas um dos valores Falso ou Verdadeiro, que se excluem, de acordo com o princípio do terceiro excluído. Assim,  $p \vee \sim p$  é sempre verdadeiro.

Desta forma, numa tabela, quando  $p$  for verdadeiro,  $\sim p$  é falso e vice-versa.

$p$	$\sim p$
V	F
F	V

**7. Construindo uma tabela** Para facilitar o estudo das tabelas, vamos trabalhar apenas com duas proposições  $p$  e  $q$ . Assim, ao construirmos uma tabela, indicaremos colunas para as proposições  $p$  e  $q$ , e depois para cada uma das etapas de valores-verdade. Acompanhemos a construção da tabela abaixo para ilustrar melhor o procedimento:

$p$	$q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

etapa 1: repetem-se os valores de  $p$  e  $q$  ( $E_1$ )

$p$	$q$	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$	
V	V		V	V
V	F		V	F
F	V		F	V
F	F		F	F
			( $E_1$ )	( $E_1$ )

etapa 2:  $\sim q$ , ou seja, se  $q$  é verdadeiro, então  $\sim q$  é falso ( $E_2$ )

p	q	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$		
V	V		V	F	V
V	F		V	V	F
F	V		F	F	V
F	F		F	V	F
			( $E_1$ )	( $E_2$ )	( $E_3$ )

etapa 3:  $\wedge (\sim q)$ , ou seja, a proposição  $p \wedge (\sim q)$  só é verdadeira quando as proposições  $p$  e  $\sim q$  são verdadeiras ( $E_3$ ).

p	q	~	(p ∧ ~ q)			
V	V		V	F	F	V
V	F		V	V	V	F
F	V		F	F	F	V
F	F		F	F	V	F
			(E.)	(E.)	(E.)	(E.)

etapa 4:  $\sim (p \wedge \sim q)$ , como o modificador troca os valores, na coluna  $E_4$ , colocamos:

V se em  $E_3$  for F e, F se em  $E_3$  for V

p	q	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$			
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
		$(E_2)$	$(E_1)$	$(E_2)$	$(E_3)$	$(E_4)$

Portanto, a resposta da proposição  $\sim (p \wedge \sim q)$  será a obtida na última etapa: ( $E_4$ )

p	q	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Vale lembrar que:

- Uma proposição composta pelo conectivo *e* ( $\wedge$ ) é verdadeira se, e somente se, as proposições simples componentes são verdadeiras.
- Uma proposição composta pelo conectivo *ou* ( $\vee$ ) é falsa se, e somente se, as proposições simples componentes são falsas.
- Uma proposição composta pelo conectivo *se, ..., então* ( $\rightarrow$ ) é falsa se, e somente se, a proposição *antecedente* é verdadeira e a *consequente* é falsa.
- Uma proposição com o modificador *não* ( $\sim$ ) é tal que:
  - Se  $p$  é verdadeira, então  $\sim p$  é falsa.
  - Se  $p$  é falsa, então  $\sim p$  é verdadeira.
- Uma proposição condicional ( $p \rightarrow q$ ) e seu contrapositivo  $\sim q \rightarrow \sim p$  são equivalentes.

f) É necessário esclarecer que as proposições que constituem uma condição necessária e suficiente são recíprocas uma da outra.

Em suma, temos:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

### Exercício proposto:

16. Construir a tabela verdade para as proposições:

- a)  $\sim p \wedge \sim q$                       b)  $\sim (\sim p \leftrightarrow q)$                       c)  $p \rightarrow (\sim p \vee q)$   
d)  $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$                       e)  $p \vee q \rightarrow p$

**8. Argumento** Um argumento é uma afirmação em que um dado conjunto de proposições  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , chamadas premissas, produz outra proposição  $q$ , denominada conclusão.

Em notação da Lógica Matemática, temos:  $p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$

Se um argumento é verdadeiro, trata-se de um *argumento válido*, caso contrário, trata-se de um *sofisma* ou de uma *falácia*.

O argumento só será válido quando sua tabela-verdade resultar em uma coluna composta apenas por respostas V, caso contrário, trata-se de um sofisma.

### Exercício resolvido:

1. Testar a validade do argumento abaixo:

Se estudo, sou aprovada. Não fui aprovada.

..... Não estudei.

**Resolução:** Fazendo:  $p$ : "estudo" e  $q$ : "sou aprovada"

Temos:  $(p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$  (I)

Onde:  $\sim q$ : "Não fui aprovada." e  $\sim p$ : "Não estudei."

Podemos também representar (I) por:  $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

**premissas conclusão**

Vamos testar a validade desse argumento, através da tabela verdade:

p	q	$(p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sub-  
resposta

resposta

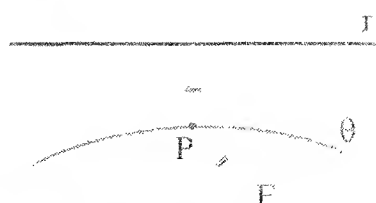
Sub-  
resposta

Como a coluna da resposta é constituída por V,  
apenas, o argumento é considerado válido.

## Breve estudo sobre as cônicas

**1. Introdução** Para complementar nosso estudo sobre geometria analítica, estudaremos as curvas chamadas *cônicas*: a parábola, a elipse e a hipérbole.

**2. Definição** Consideremos num plano  $\alpha$ : um ponto F, uma reta  $r$  e uma curva  $\theta$  contida em  $\alpha$ . Dizemos que  $\theta$  é uma cônica, se para todo ponto P de  $\theta$ , a razão entre as distâncias de P até F e de P até  $r$  for constante



$$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e \Leftrightarrow \theta \text{ é uma cônica}$$

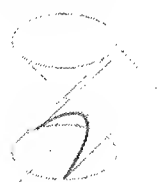
onde F é o foco,  $r$  é a diretriz e  $e$  é a excentricidade da cônica

**3. Caracterização** As cônicas são caracterizadas através de sua excentricidade ( $e$ ).

a)  $e < 1$ , a cônica é uma *elipse*



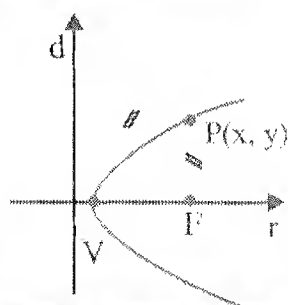
b)  $e = 1$ , a cônica é uma *parábola*



c)  $e > 1$ , a cônica é uma *hipérbole*



**4. Parábola** Parábola é o conjunto dos pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa  $d$  do plano.



onde F é o foco

$d$  é a diretriz

$r$  é o eixo de simetria ( $r \perp d$ )

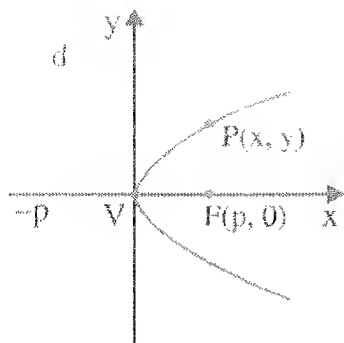
$P(x, y)$  é um ponto qualquer da parábola

V é o vértice da parábola

## 5. Equações da parábola

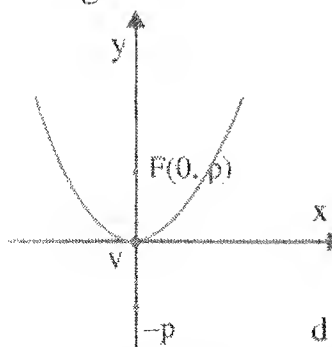
a) Com eixo de simetria coincidente com o eixo dos  $x$  e vértice na origem





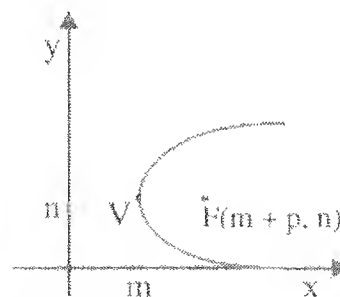
$$y^2 = 4px$$

b) Com eixo de simetria coincidente com o eixo dos y e vértice na origem



$$x^2 = 4py$$

c) Com eixo de simetria horizontal e vértice no ponto (m, n)



$$(y - n)^2 = 4p \cdot (x - m)$$

E, com o eixo de simetria vertical, teremos:

$$(x - m)^2 = 4p \cdot (y - n)$$

### Exercícios resolvidos:

1. Obter a equação da parábola cujo foco é o ponto  $F(1, 0)$  e cuja diretriz é a reta  $d: x = -1$ .

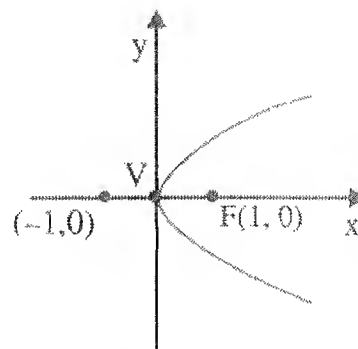
*Resolução:* Temos:  $y^2 = 4px$ , onde  $p = 1$

Logo:

$$y^2 = 4 \cdot 1 \cdot x$$

$$y^2 = 4x$$

$$y^2 - 4x = 0$$



2. Determinar a equação da parábola cujo foco é o ponto  $F(0, -2)$  e cuja diretriz é a reta  $d: y = 2$ .

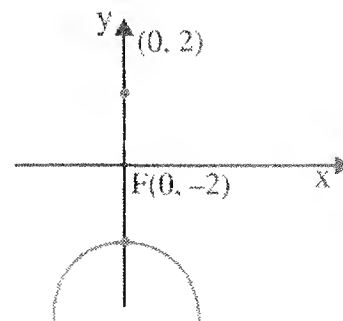
*Resolução:* Temos:  $x^2 = 4py$ , onde  $p = -2$

Logo:

$$x^2 = 4 \cdot (-2) \cdot y$$

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 + 8y = 0$$



3. Obter a equação da diretriz de uma parábola cuja equação é:  $x^2 + 4x + 4y + 12 = 0$ . Determine também as coordenadas do vértice.

Resolução:  $x^2 + 4x + 4y + 12 = 0$

Isolando os termos em x no 1º membro, temos:  $x^2 + 4x = -4y - 12$

Se adicionarmos 4 aos dois membros da equação, estaremos completando o quadrado perfeito do 1º membro desta:

$$x^2 + 4x + 4 = -4y - 12 + 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -4y - 8$$

$$(x + 2)^2 = 4(-1)(y + 2)$$

Como:  $(x - m)^2 = 4p \cdot (y - n)$ , então:  $m = -2$ ,  $p = -1$  e  $n = -2$

Logo, a equação da diretriz é:  $y = n - p$

$$y = -2 - (-1) \Rightarrow y = -2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

E as coordenadas do vértice são:  $V(m, n) \Rightarrow V(-2, -2)$

Se procurássemos as coordenadas do foco F, teríamos:

$$\text{abscissa} = m = -2$$

$$\text{ordenada} = n + p = -2 - 1 = -3$$

$$F(m, n + p) \Rightarrow \boxed{F(-2, -3)}$$

### Exercícios propostos:

17. Determine a equação da parábola cujo foco é o ponto  $F(0, -5)$  e cuja diretriz é a reta de equação  $y - 5 = 0$ .

18. (PUC-SP) A equação do conjunto de pontos equidistantes da reta  $y = -3$  e do ponto  $F(0, 3)$  é:

a)  $x^2 = y$     b)  $x^2 = \frac{y}{2}$     c)  $x^2 = 4y$     d)  $x^2 = 6y$     e)  $x^2 = 12y$

19. As coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz da parábola da equação  $y^2 - 10y - 4x + 17 = 0$  são respectivamente:

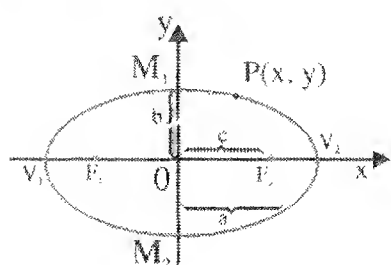
a)  $V(-1, 5)$ ,  $F(-2, 5)$  e  $x = 3$                       d)  $V(-2, 5)$ ,  $F(-1, 5)$  e  $x = -3$

b)  $V(-5, -2)$ ,  $F(-5, -1)$  e  $x = 3$                       e)  $V(2, -5)$ ,  $F(1, -5)$  e  $x = -3$

c)  $V(5, -2)$ ,  $F(5, -1)$  e  $x = -3$

**6. Elipse** Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do plano é constante.

onde  $F_1$  e  $F_2$  são focos



$\overline{F_1 F_2} = 2c$  é a distância focal

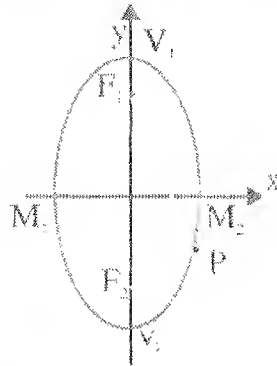
$V_1$  e  $V_2$  são vértices

$\overline{V_1 V_2} = 2a$  é o eixo maior

$\overline{M_1 M_2} = 2b$  é o eixo menor da elipse

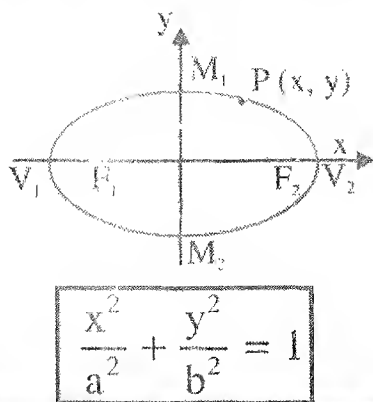
O é o centro da elipse

Observe que, mesmo que mudemos o eixo maior da elipse do eixo  $x$  para o eixo  $y$  a relação de Pitágoras ( $a^2 = b^2 + c^2$ ) continua sendo válida:

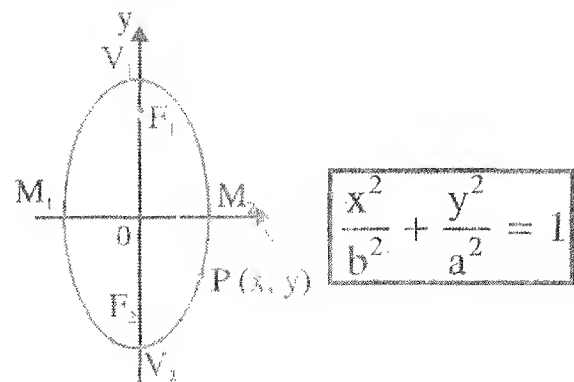


## 7. Equações da elipse

a) Centrada na origem e com o eixo maior na horizontal



b) Centrada na origem e com o eixo maior na vertical



### Exercícios resolvidos:

1. Determinar a equação da elipse de focos  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(3, 0)$  e vértices  $V_1(-7, 0)$  e  $V_2(7, 0)$ .

*Resolução:* Os focos estão no eixo  $x$ , pois as ordenadas são iguais a zero, logo, usaremos a fórmula:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Temos:  $c = 3$  e  $a = 7$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular  $b^2$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 7^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 49 - 9 \Rightarrow \boxed{b^2 = 40}$$

Substituindo  $b^2$  na fórmula, temos;

$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{40} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1 \Rightarrow 40x^2 + 49y^2 = 1960$$

Logo, a equação procurada é:  $\boxed{\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1 \text{ ou } 40x^2 + 49y^2 = 1960}$

2. Obter a equação de uma elipse de vértices  $V_1(0, -5)$  e  $V_2(0, 5)$  e de focos  $F_1(0, -2)$  e  $F_2(0, 2)$ .

Resolução: Temos:  $c = 2$  e  $a = 5$

Com esses dados, calculamos  $b^2$ , pela relação de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 4 \Rightarrow \boxed{b^2 = 21}$$

Como os focos estão no eixo  $y$ , pois as abscissas são iguais a zero, podemos usar a fórmula:  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Portanto, a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ ou } 25x^2 + 21y^2 = 525$$

### ⇒ Exercícios propostos:

20. (FAAP-SP) Escreva a equação da elipse que tem focos  $F_1(3, 0)$  e  $F_2(-3, 0)$  e cujos vértices são  $A_1(5, 0)$  e  $A_2(-5, 0)$ .

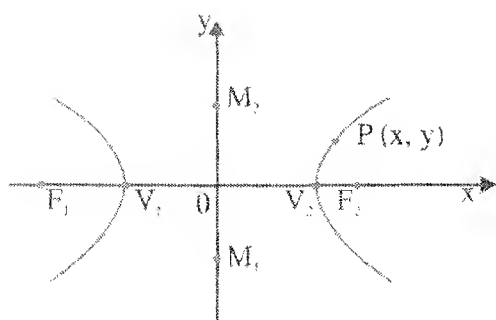
21. A equação da elipse cujos focos são  $F_1(0, -1)$  e  $F_2(0, 1)$  e cujos vértices são  $A_1(0, -4)$  e  $A_2(0, 4)$  é:

- a)  $16x^2 + 15y^2 = 240$       c)  $x^2 + 15y^2 = 15$       e)  $4x^2 + y^2 = 0$   
b)  $15x^2 + 16y^2 = 240$       d)  $15x^2 + y^2 = 15$

**8. Hipérbole** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos fixos do plano. Chamamos de hipérbole ao conjunto dos pontos  $P$  do plano em que a diferença entre as distâncias de  $P$  a  $F_1$  e de  $P$  a  $F_2$  é uma constante positiva e menor que a distância entre esses pontos fixos, ou seja:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$d(F_1, F_2) = 2c, \text{ onde } 2a < 2c$$



$$V_1(-a, 0)$$

$$V_2(a, 0)$$

$$F_1(-c, 0)$$

$$F_2(c, 0)$$

$$M_1(0, -b)$$

$$M_2(0, b)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são focos e  $\overline{F_1F_2} = 2c$  é a distância focal

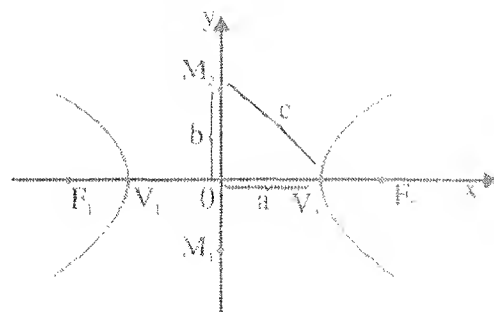
$V_1$  e  $V_2$  são vértices e  $\overline{V_1V_2} = 2a$  é o eixo real ou transverso

$\overline{M_1M_2} = 2b$  é o eixo imaginário ou conjugado da hipérbole

$$\overline{V_1 M_2} = \overline{V_1 M_2} = c$$

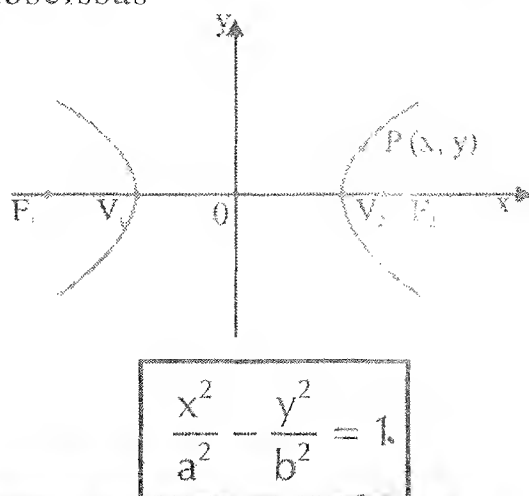
Como na elipse, a relação de Pitágoras também é válida para a hipérbole, mesmo quando os focos pertencem ao eixo das ordenadas:

Para a hipérbole,  
temos:  $c^2 = a^2 + b^2$

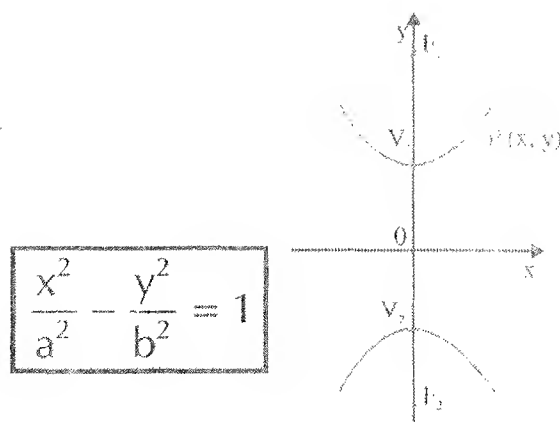


## 9. Equações da hipérbole

a) Com focos no eixo das abscissas



b) Com focos no eixo das ordenadas



## Exercícios resolvidos:

1. Obter a equação da hipérbole cujos focos são  $F_1(-6, 0)$  e  $F_2(6, 0)$  e cujos vértices são  $V_1(-3, 0)$  e  $V_2(3, 0)$ .

Resolução: Temos:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a = 3, c = 6 \text{ e } b = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow 36 - 9 = b^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = 27}$$

Substituindo na fórmula acima, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 27$$

Portanto, a equação procurada é:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1 \text{ ou } 3x^2 - y^2 = 27}$$

2. Dê a equação da hipérbole de focos  $F_1(0, -5)$  e  $F_2(0, 5)$  e de vértices  $V_1(0, -3)$  e  $V_2(0, 3)$ .

Resolução: Os focos estão no eixo  $y$ , temos então:  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$c = 5, a = 3 \text{ e } b = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow 25 - 9 = b^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = 16}$$

Substituindo na fórmula, temos:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow 16y^2 - 25x^2 = 400$$

Logo, a equação procurada é:

$$\boxed{\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1 \text{ ou } 16y^2 - 25x^2 = 400}$$

### Exercícios complementares:

22. A equação da hipérbole de focos  $F_1(-7, 0)$  e  $F_2(7, 0)$  e de vértices  $V_1(-4, 0)$  e  $V_2(4, 0)$  é:

- a)  $16x^2 - 33y^2 = 528$
- b)  $33y^2 - 16x^2 = 528$
- c)  $33x^2 - 16y^2 = 528$

d)  $7x^2 - 4y^2 = 28$

e)  $4x^2 - 7y^2 = 28$

23. Determinar a equação de uma hipérbole cujos focos são  $F_1(0, -3)$  e  $F_2(0, 3)$  e cujos vértices são  $V_1(0, -1)$  e  $V_2(0, 1)$ .



*Gabarito*

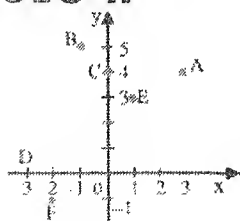


## CAPÍTULO I

- 1) b    2)  $x = 6$  e  $y = 8$     3) 450  
 4a)  $A = \{1, 2, 3, 6\}$   
 b)  $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$   
 c)  $C = \{1, 3, 5, 15\}$   
 5)  $B = \{2, 5\}$   
 6a)  $\{3\}$ ; b)  $\{1, 3, 4, 5\}$ ; c)  $\{1, 3, 5, 7\}$ ;  
 d)  $\{3, 7\}$ ; e)  $\{0, 1, 2, 5, 6\}$   
 7) I e IV  
 8a)  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; b)  $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ ; c)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ; d)  $\{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$ ; e)  $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$   
 9) 6    10) 2 006  
 11a)  $-\frac{38}{15}$ ; b)  $-\frac{11}{36}$ ; c)  $-\frac{1}{8}$ ; d)  $-2$ ;  
 e)  $-\frac{10}{17}$ ; f)  $-\frac{8}{9}$   
 12a)  $\frac{4}{9}$ ; b)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $\frac{133}{99}$ ; d)  $\frac{211}{999}$   
 13a)  $] -5; 2]$  e  $[-1, 0]$   
 b)  $[0; 7]$  e  $]1; 3[$   
 c)  $] -5; 3[$  e  $] -5; -3[$   
 d)  $[-\pi; \pi]$  e  $] -3; 3]$   
 e)  $] -10, 1; 7, 4]$  e  $] -0, 25; 2, 5]$   
 14) c    15) e    16) 65    17) e  
 18) 45%    19) 35%    20) b    21) a  
 22) c    23) a    24) d    25) a  
 26) d    27) d    28) d    29) c  
 30) a    31) b    32) a    33) a  
 34) d    35) 25    36)  $\frac{3}{320}$     37) e

## CAPÍTULO II

1)



- 2a)  $x = 3$ ;  $y = 2$ ; b)  $x = 4$ ;  $y = 5$   
 3) 12 elementos  
 4)  $A \times B = \{(1; 2), (1; 4), (3; 2), (3; 4)\}$   
 5a)  $D = \mathbb{R} - \{3\}$   
 b)  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$   
 c)  $D = \mathbb{R} - \{9\}$ ; d)  $D = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$   
 e)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$   
 6)  $A = 2$     7) b, c, d, e, f  
 8a) par; b) par; c) ímpar; d) ímpar;  
 e) par; f) não é par e não é ímpar;  
 g) par; h) ímpar; i) não é par e não é ímpar  
 9a) crescente para todo  $x \in \mathbb{R}$   
 b) decrescente para todo  $x \in \mathbb{R}$   
 c) crescente para  $x < 0$   
 decrescente para  $x > 0$   
 d) decrescente para  $x < 2$   
 crescente para  $x \geq 2$   
 e) crescente para  $x < 0$  e  $x > 3$   
 decrescente para  $0 \leq x \leq 3$   
 f) decrescente para  $x < 0$   
 crescente para  $x > 0$   
 10a) não é sobrejetora, não é injetora,  
 não é bijetora  
 b) é injetora, não é sobrejetora, não é  
 bijetora  
 c) bijetora; d) bijetora  
 e) não é sobrejetora, não é injetora,  
 não é bijetora  
 f) é sobrejetora, não é injetora, não é  
 bijetora

11a)  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ ,  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

b)  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ ,

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\}$

c)  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$ ,  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$$d) D_f = \mathbb{R}, f^{-1}(x) = x - 3, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$e) D_f = \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$f) D_f = \mathbb{R}^*, f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^*$$

$$g) D_f = \mathbb{R} - \{1\}, f^{-1}(x) = \frac{x}{2+x},$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$h) D_f = \mathbb{R}^*, f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x},$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^*$$

$$12a) fog(x) = \frac{x^2+4}{3} + 5$$

$$b) foh(x) = 5x^2 + 5$$

$$c) goh(x) = \frac{x^2+4}{3}$$

$$d) gof(x) = \frac{5x}{3} + 1$$

$$e) hof(x) = 25x^2 + 1$$

$$f) hog(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{3} + 2$$

$$13) b \quad 14) d \quad 15) b \quad 16) c$$

$$17) c \quad 18) c \quad 19) 35 \quad 20) d$$

$$21) 33 \quad 22) d \quad 23) b \quad 24) e$$

$$25) 2 \quad 26) d$$

$$f(3x+1) = 1-x \quad (I)$$

$$a = 3x+1 \text{ então } x = \left(\frac{a-1}{3}\right)$$

Substituímos em (I)

$$f(3x+1) = 1-x \Rightarrow f(a) = 1 - \left(\frac{a-1}{3}\right)$$

$$f(a) = \frac{3-a+1}{3} \Rightarrow f(a) = \frac{4-a}{3}$$

$$27) f^{-1}(x) = \frac{-3-x}{x-1}$$

$$28) d$$

$$f(3x+1) = x$$

$$\text{Seja } y = 3x+1 \text{ então } x = \frac{y-1}{3},$$

$$\text{substituindo: } f(y) = \frac{y-1}{3}$$

$$\text{Portanto, } f(x) = \frac{x-1}{3}$$

$$f(x+1) = \frac{x+1-1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{3}$$

$$29) e \quad 30) b \quad 31) a \quad 32) c$$

$$33) b \quad 34) 3(2x-1)^2 \quad 35) 59$$

$$36) e \quad 37) D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ e } x \neq \pm\sqrt{3}\} \quad 38) a \quad 39) d$$

$$40) e \quad 41) d$$

$$f(x+2) = \frac{2x-1}{x+3} \quad (I)$$

$$\text{Seja } y = x+2 \Rightarrow x = y-2, \text{ substituir}$$

$$\text{em (I): } f(y) = \frac{2(y-2)-1}{(y-2)+3}$$

$$f(y) = \frac{2y-4-1}{y+1} \Rightarrow f(y) = \frac{2y-5}{y+1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$$

$$42) a$$

## CAPÍTULO III

$$1) \frac{a(x+y)}{x-y} \quad 2) \frac{a^2}{b^2}$$

$$3) (a-b+c) \quad (a-b-c)$$

$$4a) \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{fator comum: } x^2$$

$$\text{fator comum: } x$$

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$$

$$\text{fator comum: } x$$

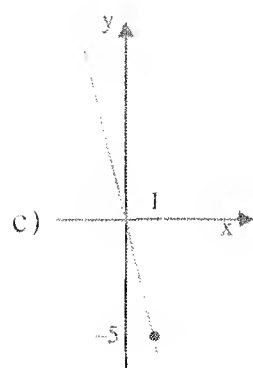
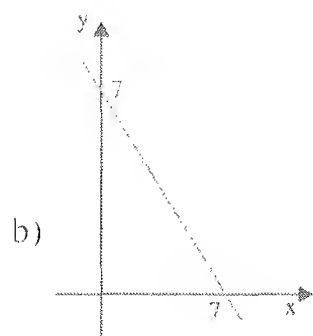
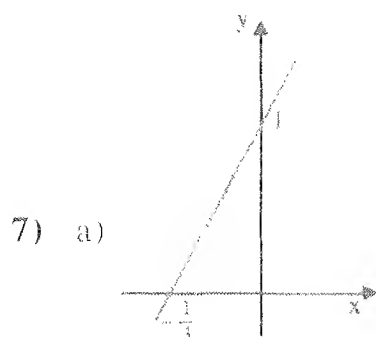
$$\text{fator comum: } x^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^4 + x^2 - x^3 - x}{x^4 + x^2 + x^3 + x} = \\
 &= \frac{x^2(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)} = \\
 &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 - x)}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} = \\
 &= \frac{x(x - 1)}{x(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}
 \end{aligned}$$

4b)  $\frac{x - 8}{x + 8}$

5a)  $y = 1$ ; b)  $y = x$

6a)  $k \neq -2$ ; b)  $k \neq 4$ ; c)  $k \neq \pm 5$ ;  
d)  $k \neq \pm 3$ ; e)  $k \neq 0$ ; f)  $k \neq 6$



8)  $y = 2x - 2$

9a)  $y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow y = -\frac{3x + 6}{2}$

b)  $y = \frac{1}{3}x - 2 \Rightarrow y = \frac{x - 6}{3}$

10a)  $y = 2$ ; b)  $y = -x$ ; c)  $y = x - 4$

11a)  $S = \{7\}$ ; b)  $S = \{-3\}$ ; c)  $S = \{14\}$ ;  
d)  $S = \{-3\}$ ; e)  $S = \{-15\}$

568

12)  $K = 36$  13)  $p = \frac{1}{10}$

14a)  $m > -3$ ; b)  $m > -\frac{5}{2}$

15a)  $p < 27$ ; b)  $p < -7$

16)  $S = \{3\}$

17a) ; b)

c) ; d)

e) ; f)

18a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 15\}$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

e)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{85}{4}\right\}$

f)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{2}{5}\right\}$

19a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\}$

b)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{9}{4} < x \leq \frac{10}{3}\right\}$

20a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 7\}$

b)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq \frac{1}{3}\right\}$

c)  $S = \{-2\}$

d)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

21a)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x \geq \frac{7}{2}\right\}$

b)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} \leq x < 0\right\}$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -9 \text{ ou } x \geq 0\}$

22a)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } \frac{4}{3} \leq x \leq 9\right\}$

$$b) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } \frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \right\}$$

$$c) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x \geq 0 \}$$

$$d) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -12 \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 2 \text{ ou } x > 5 \right\}$$

$$23a) D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > -\frac{1}{3} \right\}$$

$$b) D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -\frac{7}{2} \right\}$$

$$c) D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3 \right\}$$

$$d) D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6 \}$$

$$24) c \quad 25) e \quad 26) 4 \text{ e } 2 \text{ ou } 4 \text{ e } -2$$

$$27) 13 \quad 28) 29 \quad 29) e \quad 30) d$$

$$31) b \quad 32) b \quad 33) c \quad 34) 25$$

$$35) b \quad 36) 82 \quad 37) e \quad 38) d$$

$$39) d \quad 40) b \quad 41) 39 \quad 42) c$$

$$43) e \quad 44) c$$

## CAPÍTULO IV

$$1a) K \neq 1; b) K \neq -35; c) K \neq 5; d) K \neq 0$$

$$2a) S = \{-1\}; b) S = \emptyset; c) S = \{0, 2\};$$

$$d) S = \emptyset; e) S = \left\{ -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right\};$$

$$f) S = \{-1, 9\}; g) S = \{-6, 1\};$$

$$3a) S = \left\{ 0, \frac{4}{5} \right\}; b) S = \{3 + 2\sqrt{3}, 3$$

$$-2\sqrt{3}\}; c) S = \{-2, 5\}; d) S = \{2\};$$

$$e) S = \{2, 4\}$$

$$4) K < \frac{1}{8} \quad 5) m = \pm 1 \quad 6) p > 4$$

$$7a) p > 2 \text{ e } p < 2; b) p > -18 \text{ e } p < -18$$

$$c) p > -23 \text{ e } p < -23; d) p < 6 \text{ e } p > 6$$

$$8a) 1. \Delta > 0, 2. -1 \text{ e } 1, 3. -2$$

$$b) 1. \Delta < 0, 2. \frac{1}{4} x \in \mathbb{R}, 3. 3$$

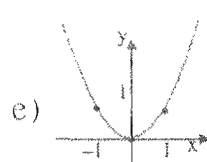
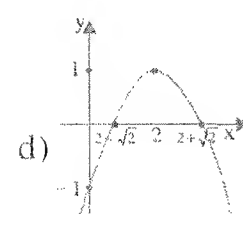
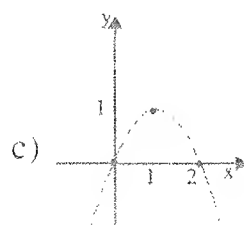
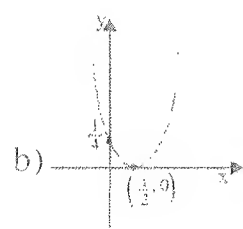
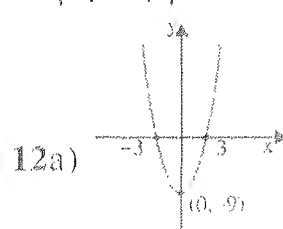
$$c) 1. \Delta > 0, 2. 1 \text{ e } 5, 3. c = -9$$

$$9) a = -\frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{1}{2} \quad 10) m = \frac{3}{10} \text{ e } n = \frac{1}{10}$$

$$11a) (1, 0); b) \left( -\frac{1}{12}, \frac{191}{48} \right);$$

$$c) \left( \frac{1}{10}, \frac{19}{20} \right); d) \left( -\frac{3}{2}, -\frac{17}{4} \right);$$

$$e) \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$



$$13a) y = -\frac{4x^2}{3} + \frac{5x}{3} + 3;$$

$$b) y = x^2 - 3x + 2$$

$$14) p = -3 \quad 15) m = -\frac{3}{4} \quad 16) m < -27$$

$$17) f(x) = -\frac{x^2 + 4x + 5}{3} \quad 18) d$$

$$19) 51 \quad 20) b \quad 21a) x < \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \text{ ou}$$

$$x > \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \Rightarrow y > 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{1-\sqrt{10}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{10}}{3} \Rightarrow y < 0$$

$$b) x < -4 \text{ ou } x > 4 \Rightarrow y < 0$$

$$x = \pm 4 \Rightarrow y = 0$$

$$-4 < x < 4 \Rightarrow y > 0$$

$$c) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$$

$$d) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$$

$$e) x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1 \Rightarrow y < 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 1 \Rightarrow y = 0$$

$$-\frac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow y > 0$$

$$f) x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \Rightarrow y < 0$$

$$g) x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \Rightarrow y > 0$$

$$22a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 8\};$$

$$b) S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}; c) S = \emptyset;$$

$$d) S = \emptyset; e) S = \mathbb{R}; f) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1\}; g) S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}\right\}$$

$$23) b \quad 24a) S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 - \sqrt{5} \text{ ou } 0 < x < 4 \text{ ou } x > 2 + \sqrt{5}\right\}$$

$$b) S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ ou } x > \frac{10}{3}\right\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } -2 < x \leq 3 \text{ ou } x > 4\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$

$$e) S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

$$25a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x < -1 \text{ ou } 3 < x \leq 8\}; b) S = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -10 \text{ ou } 1 \leq x \leq 9 \text{ ou } x \geq 10\}$$

570

$$26) d \quad 27) a \quad 28) b \quad 29) b$$

$$30) b \quad 31) 48 \quad 32) 16 \quad 33) c$$

$$34) 15 \quad 35) b \quad 36) a \quad 37) b$$

$$38) 19 \quad 39) c \quad 40) 29 \quad 41) a$$

$$42) b \quad 43) \{-1, 0, 1\}, \{1, 2, 3\} \text{ e}$$

$$\{-3, -2, -1\} \quad 44) c$$

$$45) D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$$

$$46) c \quad 47) a \quad 48) b \quad 49) e$$

## CAPÍTULO V

$$1a) 15; b) 204; c) 7,3; d) 16,1; e) 81;$$

$$f) 12,5$$

$$2a) |5x| = D \begin{cases} 5x, & \text{se } x \geq 0 \\ -5x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$b) |-3x| = \begin{cases} -3x, & \text{se } x \leq 0 \\ 3x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

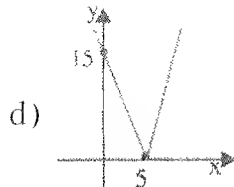
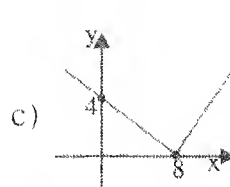
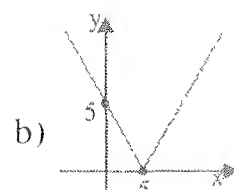
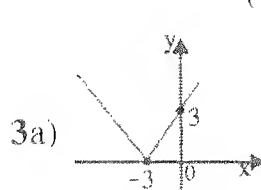
$$c) |2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4, & \text{se } x \geq -2 \\ -2x - 4, & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$d) |-x + 7| = \begin{cases} -x + 7, & \text{se } x \leq 7 \\ x - 7, & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

$$e) |4x - 16| = \begin{cases} 4x - 16, & \text{se } x \geq 4 \\ -x^2 + 16, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

$$f) |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 4, & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$g) |-7x - 35| = \begin{cases} -7x - 35, & \text{se } x \leq -5 \\ 7x^2 + 35, & \text{se } x > -5 \end{cases}$$



$$4) a \quad 5a) S = \{-4, 4\}; b) S = \{-4, 4\}$$

$$c) S = \{7, 15\}; d) S = \{1, 6\}; e) S = \emptyset$$

$$f) S = \left\{ \frac{3}{2}, 3 \right\}; g) S = \emptyset; h) S = \left\{ -\frac{7}{3}, 3 \right\}$$

$$6) c \quad 7a) S = \{-7, -2, 2, 7\};$$

$$b) S = \{-9, 9\}; c) S = \{-6, -5, 5, 6\}$$

$$d) S = \{-1, 1\}; e) S = \emptyset$$

$$8a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -12 \text{ ou } x \geq 12\};$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\};$$

$$c) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \right\};$$

$$d) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{25}{9} \text{ ou } x > 3 \right\};$$

$$e) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -10 \text{ ou } x \geq 6\};$$

$$f) S = \mathbb{R}; g) S = \emptyset;$$

$$h) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$$

$$i) S = \mathbb{R}; j) S = \emptyset$$

$$9) b \quad 10) 10 \quad 11) d \quad 12) c$$

$$13) c \quad 14) b \quad 15) d \quad 16) d$$

$$17) c \quad 18) d \quad 19) e \quad 20) c$$

$$21) a \quad 22) a \quad 23) e$$

$$-2 + 2x = |3x - 2| \quad (I)$$

$$3x - 2 = -2 + 2x \therefore x = 0 \text{ ou}$$

$$3x - 2 = 2 - 2x \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Substituindo  $x = 0$  na igualdade (I):

$$-2 + 2 \cdot 0 = |3 \cdot 0 - 2|$$

$$-2 = |-2| \text{ FALSO, } x = 0 \text{ não convém}$$

Substituindo  $x = \frac{4}{5}$  na igualdade (I):

$$-2 + \frac{8}{5} = \left| \frac{12}{5} - 2 \right| \Rightarrow -\frac{2}{5} = \left| -\frac{2}{5} \right|$$

$$\text{FALSO, } x = \frac{4}{5} \text{ não convém} \Rightarrow S = \emptyset$$

## CAPÍTULO VI

$$1a) 128; b) 243; c) -64; d) 1024;$$

$$e) \frac{1}{5}; f) 36; g) -\frac{27}{8}; h) \frac{9}{16}; i) \frac{1}{49}; j) 64$$

$$2a) \frac{1}{343}; b) 3^{12}; c) \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{13}{4}}$$

$$3) a \quad 4) e \quad 5) c$$

$$6a) S = \{2\}; b) S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}; c) S = \{3\};$$

$$d) S = \{\pm 3\}; e) S = \{4\}; f) S = \{-4\}$$

$$7) c \quad 8a) S = \{3\}; b) S = \{1\};$$

$$c) S = \{2\}$$

$$9) c \quad 10a) S = \{0, 1\}; b) S = \{1, 3\};$$

$$c) S = \{2\}; d) S = \emptyset$$

$$11) S = \{0, 2\} \quad 12a) \text{ crescente};$$

$$b) \text{ decrescente}; c) \text{ crescente}; d) \text{ cres-}$$

$$\text{cente}; e) \text{ crescente}; f) \text{ decrescente}$$

$$13a) a > -\frac{11}{2}; b) a < 1; c) a > 40$$

$$14a) -27 < k < -24; b) -4 < k < 5;$$

$$c) 9 < k < \frac{64}{7}$$

$$15a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$e) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{5} \right\}$$

$$f) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

$$g) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -14\}$$

$$h) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2} \right\}$$

$$16) b \quad 17) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$$

$$18a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

$$19) c \quad 20) d \quad 21) d \quad 22) d$$

$$23) b \quad 24) 45 \quad 25a) a = 27; b = -8;$$

$$c = \frac{1}{9}; d = -\frac{1}{8} \quad b) b < d < c < a$$

$$26) a \quad 27) d \quad 28) d \quad 29) 42$$

$$30) 40 \quad 31) 17 \quad 32) e \quad 33) d$$

$$34) e \quad 35) c \quad 36) d \quad 37) 4$$

$$38) e \quad 39) b \left( \text{como a função é de-} \right. \\ \left. \text{crescente, então } b = \frac{1}{3} \right)$$

40) 13 41) a 42) b 43) b 44) c

## CAPÍTULO VII

1a) 7; b) 3; c) 3; d) -4; e) -2; f)  $\frac{1}{4}$ ;  
g)  $\frac{3}{4}$ ; h) 4

2) a 3a)  $x > -3$ ; b)  $x > 2$ ; c)  $x > 5$ ;

d)  $x > \frac{1}{3}$  e  $x \neq 1$

4a) 6; b) 3; c) 0; d) 3; e) 3; f) 5; g) 2;  
h) 2; i) 0; j) 20; l) 9

5a)  $x = 64$ ; b)  $x = 32$ ; c)  $x = 100$ ;

d)  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; e)  $x = 242$

6)  $k = \frac{31}{4}$  7) b 8) 13

9a)  $5 \log m + 2 \log n - \frac{2}{3} \cdot \log p$ ;

b)  $\frac{1}{2} \cdot \log r - 4 \log s - \log t$

10)  $k = \frac{a^2}{b^3 \sqrt{c}}$  11) 81 12) c

13a) 1,477; b) 1,255; c) 1,38; d) 1,653

14) d 15) c 16) e 17) a

18) c 19a)  $k > -3$ ; b)  $8 < k < 9$ ;

c)  $k > -\frac{11}{3}$ ; d)  $\frac{1}{5} < k < \frac{2}{5}$

20a)  $S = \{8\}$ ; b)  $S = \{-2\}$ ; c)  $S = \emptyset$ ;  
d)  $S = \{4\}$ ; e)  $S = \emptyset$

21a)  $S = \{8\}$ ; b)  $S = \{16\}$ ; c)  $S = \{83\}$ ;

d)  $S = \left\{0, \log_3 \frac{3}{2}\right\}$

22)  $S = \{99\}$  23)  $S = \{4\}$  24) c

25)  $S = \{64\}$

26a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

b)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{5}\right\}$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$

d)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$

e)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 19\}$

27) d 28) a 29) e 30) 17

31) d 32) c 33) b 34) e

35) e 36) c 37) a 38) e 39) e

40)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5 \text{ e } x \neq 2\}$

41) c 42) b 43)  $S = \{10\}$  44) a

45) e 46) c 47) e 48) 4

49) a 50) a

## CAPÍTULO VIII

1a)  $\sin \hat{B} = \frac{4}{5}$   $\sin \hat{C} = \frac{3}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$   $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{4}{3}$   $\text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4}$

b)  $\sin \hat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$   $\sin \hat{C} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{5}$   $\cos \hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = 2$   $\text{tg } \hat{C} = \frac{1}{2}$

2)  $\sin 15^\circ = 0,26$ ,  $\cos 15^\circ = 0,97$  e  
 $\text{tg } 15^\circ = 0,27$

3)  $\sin 27^\circ = 0,45$  e  $\sin 63^\circ = 0,89$

4a) 13; b)  $4\sqrt{21}$ ; c) 3; d)  $\sqrt{17}$ ;

e)  $\sqrt{7}$ ; f) 15

5) 15 cm e 20 cm 6) 5 cm

7a)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; b)  $8\sqrt{3}$ ; c) 6

8) e 9) d 10) e 11) a

12a) 43,96 cm; b) 75,36 cm; c) 10,68 cm

13)  $r = 2$  cm 14) 9 m 15) 20

16) 1004,8 km  $t \cong 4$ h

17a)  $\frac{2\pi}{3}$  rad; b)  $\frac{31\pi}{18}$  rad;

- c)  $\frac{31\pi}{18}$  rad; d)  $\frac{3\pi}{4}$  rad  
 18a)  $210^\circ$ ; b)  $225^\circ$ ; c)  $240^\circ$ ; d)  $330^\circ$   
 19) 1,2 cm 20)  $\frac{49\pi}{4}$  rad 21) c  
 22) c 23a)  $320^\circ$ ; b)  $132^\circ$ ; c)  $\frac{5\pi}{4}$  rad;  
 d) zero  
 24a)  $\frac{7\pi}{6}$  rad; b)  $\frac{4\pi}{3}$  rad; c)  $\frac{5\pi}{3}$  rad;  
 d)  $\frac{3\pi}{4}$  rad 25a)  $\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 b)  $\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 c)  $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 26a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; d)  $-\frac{1}{2}$ ;  
 e)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; d)  $-\frac{1}{2}$ ; g)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; h)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 i)  $-\frac{1}{2}$ ; j) 0  
 27)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  28a)  $-3 \leq m \leq 0$   
 b)  $-1 \leq m \leq 9$   
 29a)  $-\frac{1}{2}$ ; b)  $-1$ ; c) 0; d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 f)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; g)  $\frac{1}{2}$ ; h)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; i)  $\frac{1}{2}$ ; j)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 l) 0; m) 1  
 30a) positivo; b) negativo; c) negativo;  
 d) negativo; e) negativo; f) positivo  
 31a)  $\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ ; b)  $\frac{5}{8}$  32) b  
 33) c 34)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  35)  $\frac{-3}{4}$  36)  $\frac{3}{4}$   
 37)  $m = 2$  ou  $m = -1$  38) c 39) a  
 40a) 1; b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $-\sqrt{3}$ ; d)  $-1$ ; e)  $\frac{\pi}{4}$

- f) 1; g)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; h)  $-\sqrt{3}$ ; i)  $\frac{\pi}{4}$   
 41a)  $m \neq \frac{5\pi}{6}$  e  $m \neq \frac{11\pi}{6}$ ; b)  $m \neq \pm \frac{\pi}{4}$   
 42)  $\frac{1}{2}$  43) c 44a)  $-1$ ; b) 2; c)  
 $-1$ ; d)  $-1$ ; e) 2; f)  $-2$   
 45) 1 46) 84 47) e 48a)  $\operatorname{tg} \alpha$ ; b)  $\operatorname{cotg} \alpha$   
 49)  $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 & \text{ou} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{4}{5} \end{cases}$  50)  $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{cases}$  e  
 51) a 52) e 53a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 b)  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$   
 c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 d)  $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$   
 e)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 f)  $S = \{0, \pi, 2\pi\}$   
 g)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 h)  $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$   
 54)  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$   
 55a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 b)  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$



$$\text{c) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{d) } S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$\text{e) } S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{f) } S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$56) \text{ d} \quad 57) \text{ e} \quad 58) 0$$

$$59) a) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{b) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{c) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{d) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{e) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$60) S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$61) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$62) a) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leq 2\pi \right\}$$

$$\text{b) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$\text{c) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \right\}$$

$$\text{d) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \right\}$$

574

$$\text{e) } S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi \}$$

$$\text{f) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \right\}$$

$$\text{g) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \right\}$$

$$63) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \right\}$$

$$64) D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi \}$$

$$65) D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \right\}$$

$$66) \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$67) \sec 105^\circ = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

$$\operatorname{cosec} 105^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$68) a) \frac{7\sqrt{2}}{10}; b) \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}; c) -7$$

$$69) 2 + \sqrt{2} \quad 70) d \quad 71) a$$

$$72) \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \cos 2\alpha = \frac{7}{9},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$73) -\frac{169}{119} \quad 74) \frac{4}{3}$$

$$75) \sec 2\alpha = \frac{25}{7} \text{ e } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$$

$$76) a \quad 77) a$$

$$78) \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{33}}{6},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$79) \sec \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ e } \operatorname{cosec} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$80) \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sec \frac{x}{2} = -2,$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$82) d \quad 83a) \cos 4m + \cos m =$$

$$= 2 \cos \frac{5m}{2} \cos \frac{3m}{2}$$

$$b) \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} = 2 \sin \frac{5\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14}$$

$$c) \sin \frac{5\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{9}$$

$$d) \sin 7k + \sin 2k = 2 \sin \frac{9k}{2} \cos \frac{5k}{2}$$

$$e) \cos 5x - \cos 2x = -2 \sin \frac{7x}{2} \sin \frac{3x}{2}$$

$$84a) \frac{\cos 70^\circ - \cos 100^\circ}{2}$$

$$b) \frac{\cos 170^\circ + \cos 100^\circ}{2}$$

$$c) \frac{\sin 80^\circ + \sin 50^\circ}{2}$$

$$85a) S = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\}$$

$$b) S = \left\{ 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\}$$

$$c) S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$86) a \quad 87a) 2\pi; b) 2\pi; c) \frac{2\pi}{5}; d) \frac{\pi}{2};$$

$$e) 4\pi; f) 6\pi; g) 2\pi$$

$$88) d \quad 89) 3 \quad 90) d \quad 91) c$$

$$92) 35m \quad 93) a \quad 94) d \quad 95) c$$

$$96) d \quad 97) 13 \quad 98) b \quad 99) 1$$

$$100) b \quad 101) b \quad 102) b \quad 103) a$$

$$104) c \quad 105) c \quad 106) 32 \quad 107) b$$

$$108) a \quad 109) d \quad 110) d \quad 111) 9$$

$$112) c \quad 113) d \quad 114) d \quad 115) a$$

$$116) \frac{4}{7} \quad 117) b \quad 118) d \quad 119) b \quad 120) c$$

## CAPÍTULO IX

$$1a) (3, 8, 13, 18, 23, \dots)$$

$$b) \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \right)$$

$$c) (-1, -2, -4, -8, \dots)$$

$$d) (-1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$e) (2, -2, -2, 2, 2, -2, -2, \dots)$$

$$2a) r = 4 \text{ crescente}$$

$$b) r = -5 \text{ decrescente}$$

$$c) r = \frac{1}{3} \text{ crescente}$$

$$d) r = 0 \text{ constante}$$

$$e) r = -\sqrt{3} \text{ decrescente}$$

$$f) r = 0 \text{ constante}$$

$$3) m = 6 \quad 4) \left( -2, -\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{7}{5} \right)$$

$$5) (-1, 3, 7) \quad 6) (6, 4, 2) \quad 7) e$$

$$8) d \quad 9a) 10; b) 193; c) 73$$

$$10) r = 10 \quad 11) 63 \quad 12) 17$$

$$13) (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47)$$

$$14) 4 \quad 15) 128 \quad 16) 112 \quad 17) 35$$

$$18) b \quad 19) e \quad 20) 114$$

$$21) S_{25} = -1\,025 \quad 22) S_{20} = 175$$

$$23) 16 \quad 24) 24 \quad 25) \frac{16}{9} \quad 26) 35 \quad 27) e$$

$$28) c \quad 29) 17 \quad 30) (3, 6, 9, 12, \dots)$$

$$31) 1\,986 \quad 32) c$$

$$33a) -3; b) \frac{1}{5}; c) \sqrt{7}; d) 4$$

- 34)  $P = \frac{1}{16}$  35)  $(-1, -6, -36)$   
 36)  $(-4, -2, -1)$  37)  $(9, 3, 1)$  38) a  
 39) 18 40) b 41)  $\frac{1}{243}$  42) 1024  
 43)  $\pm \frac{1}{3}$  44)  $\sqrt{2}$  45)  $343\sqrt{7}$  46) 2  
 47)  $\left(1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10.000}, \frac{1}{100.000}\right)$   
 48)  $(1, 6, 36, 216, 1296, 7776)$   
 49) d 50) 16 51)  $\frac{1023}{512}$  52)  $-1092$   
 53)  $-781$  54)  $2047$  55)  $\frac{364}{3}$  56)  $a_1 = 1$   
 57) 6 58) d 59) 7 60) b  
 61a)  $\frac{5}{3}$ ; b)  $\frac{1}{3}$ ; c) 4  
 62) 10 63)  $-\frac{1}{2}$  64) b 65) b  
 66) b 67) 61 68) c 69) 91  
 70) c 71) c 72) a 73) b  
 74) 16 filas 75) 36 76) c  
 77) e 78) a 79) b 80) d  
 81) b 82) b 83)  $31/3$

## CAPÍTULO X

- 1)  $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix}$  2)  $C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$   
 3) 34 4)  $x = 3$  e  $y = 1$   
 5)  $x = -6$ ;  $y = 2$  e  $z = 11$   
 6a)  $\begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{13}{10} \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} \frac{19}{6} & \frac{7}{10} \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$   
 7) 60 8) d

- 9)  $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 12 & -6 & -5 \\ 20 & 1 & -15 \end{bmatrix}$   
 10)  $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$   $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   
 11) b 12a)  $n = p$ ; b)  $q = m$ ; c)  $n = r$ ;  
 d)  $s = p$  13) 25  
 14)  $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$  15) 32 16) c  
 17)  $a = 1$  e  $b = 0$  18) 80 19) 89  
 20) a 23a) 5; b) 14; c)  $\sqrt{2}$   
 24a)  $x = -3$ ; b)  $x = 7$ ; c)  $x = -1$   
 25) a 26a) 15; b)  $-85$  27) d  
 28) d 29a) 8; b)  $-3$ ; c) 2; d) 1; e) 6;  
 f)  $-4$ ; g)  $-12$ ; h) 13; i)  $-3$   
 30a)  $-2$ ; b)  $-2$ ; c)  $-1$  31) 0  
 32) b 33) 100 34a) 6, b) 2  
 35) e 36) a 37)  $-25$  38) b  
 39) 0, pois tem uma coluna nula 40) e

## CAPÍTULO XI

- 1) b, d, e 2)  $k = 3$   
 3a) é linear; b) não é linear; c) é linear;  
 d) não é linear  
 4) a, c 5)  $(1, 0, 1)$  é solução, mas  
 $(0, -3, 1)$  não é solução 6)  $k = -5$   
 7a)  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$   
 b)  $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$   
 8a)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 3y = 3 \\ 2x = 4 \end{cases}$

- 9)  $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$  10) b 11) 56 12) c  
 13) d 14) (1, 2) 15) c 16) (1, 3, 3)  
 17) 6 18) 1 19) 3 20) 2  
 21) c 22)  $a = -2$  e  $b = 2$  23) a  
 24) d 25) a 26) b 27)  $k = 5$   
 28)  $k = 42$  29) d  
 30)  $m = 1$  31)  $S = \{(6, 4)\}$   
 32) b 33) d 34) e 35) d  
 36) b 37) d 38) 10

## CAPÍTULO XII

- 1) ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc  
 2) 2 e 6; 3 e 5; 4 e 4; 5 e 3; 6 e 2. Temos 5 possibilidades  
 3) 8 maneiras ( $s_1$  e  $b_1$ ;  $s_1$  e  $b_2$ ;  $s_2$  e  $b_1$ ;  $s_2$  e  $b_2$ ;  $s_3$  e  $b_1$ ;  $s_3$  e  $b_2$ ;  $s_4$  e  $b_1$ ;  $s_4$  e  $b_2$ )  
 4) 12 resultados possíveis  $\{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c), (5, c), (6, c), (1, k), (2, k), (3, k), (4, k), (5, k), (6, k)\}$   
 5) 6 quinas, a saber: 12, 26, 40, 45, 62; 12, 26, 40, 45, 80; 12, 26, 40, 62, 80; 12, 26, 45, 62, 80; 12, 40, 45, 62, 80; 26, 40, 45, 62, 80  
 6) 18  
 7) 6 duplas possíveis: Vinícius e Daniel; Vinícius e Thiago; Vinícius e Gabriel; Daniel e Thiago; Daniel e Gabriel; Thiago e Gabriel  
 8) 24 anagramas: ROMA, ROAM, RMOA, RMAO, RAMO, RAOM, ORMA, ORAM, OMRA, OMAR, OAMR, OARM, MROA, MRAO, MORA, MOAR, MAOR, MARO, AROM, ARMO, AOMR, AORM, AMRO, AMOR

9) 15

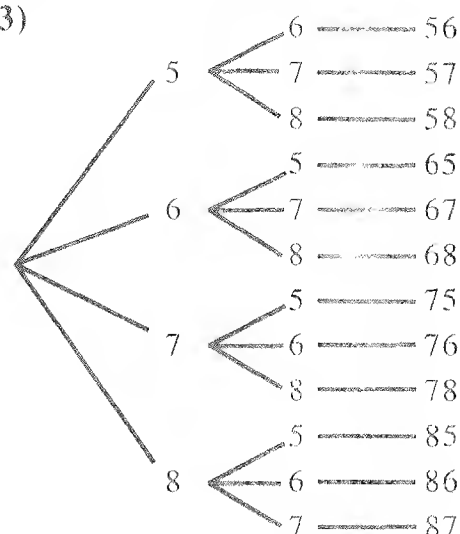
10) 16 possibilidades:

a, a, a, a	v, v, v, v
a, a, a, v	v, v, v, a
a, a, v, a	v, v, a, a
a, v, a, a	v, a, v, v
a, a, v, v	v, v, a, a
a, v, a, v	v, a, v, a
a, v, v, a	v, a, a, v
a, v, v, v	v, a, a, a

11) 12

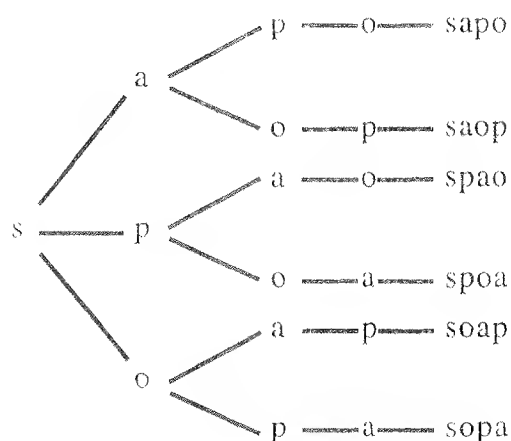
12) São 3 duplas, a saber: Vanessa e Andressa; Vanessa e Gabriela; Andressa e Gabriela

13)



São 12 números

14)



- 15) 14 16) 60 números 17) 40 opções  
 18) 144 maneiras 19) 36 maneiras  
 20)  $10^4 = 10\,000$  21) 720 anagramas  
 22a) 81 números; b) 90 números  
 23) com repetição: 135 200; sem repetição: 117 000  
 24)  $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$  maneiras distintas  
 25) 2 652 26) 12 27) 12  
 28a) 42; b) 420; c) 209  
 29a)  $\frac{1}{n-5}$ ; b)  $x-1$ ; c)  $n^3 - 3n^2 + 2n$ ;  
 d)  $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n - 1}{n}$   
 30a)  $n = 3$ ; b)  $n = 6$ ; c)  $n = 5$ ; d)  $n = 8$   
 31a)  $S = \{4\}$ ; b)  $S = \{7\}$ ; c)  $S = \{2\}$ ;  
 d)  $S = \{8\}$  32a) 720; b) 6  
 33)  $S = \{6\}$  34) c 35) 72 36) a  
 37) 1 446 38a) 720; b) 2 160  
 39) 48 40a) 6; b) 1; c) 1 41) 232  
 42)  $S = \{10\}$  43) 8 pessoas  
 44) 5 040 45a) 10; b) 125  
 46a) 19; b) 35 47) 4 512  
 48a) 151 200; b) 1 260 49) 30  
 50) 20 51) 6! 52a) 84; b) 35; c) 1;  
 d) 1; e) 15; f) 10 e 10  
 53a)  $S = \{1\}$ ; b)  $S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right\}$ ; c)  $S = \left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$   
 54)  $\binom{11}{4}$  55) 9 56) 16  
 57a)  $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$   
 b)  $16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$   
 c)  $1 + 9a + \frac{135}{4}a^2 + \frac{135}{2}a^3 + \frac{1215}{16}a^4 + \frac{729}{16}a^5$   
 58)  $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$  59) c  
 60)  $T_+ = 20$  61) c 62) b  
 63) c 64) e 65)  $(01 + 04 + 08) = 13$

## CAPÍTULO XIII

- 1a)  $U = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c), (5, c), (6, c), (1, k), (2, k), (3, k), (4, k), (5, k), (6, k)\}$ . Tem 12 elementos  
 b)  $U = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$ . Tem 8 elementos  
 2a)  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
 b)  $E_1 = \{1, 3, 5, 7\}$   
 c)  $E_2 = \emptyset$  Evento Impossível  
 d)  $E_3 = \{2\}$  Evento Elementar  
 e)  $E_4 = \{1, 2, 3, 5, 7\}$  Evento União  
 f)  $E_5 = \{6\}$  Evento Intersecção  
 g)  $E_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = U$  Evento Certo  
 3)  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  4a)  $\frac{1}{13}$ ; b)  $\frac{1}{52}$ ; c)  $\frac{1}{4}$   
 5a)  $\frac{1}{6}$ ; b) 0, pois o Evento é impossível;  
 c)  $\frac{1}{3}$ ; d) 1, pois temos o Evento Certo  
 6a)  $\frac{1}{6}$ ; b)  $\frac{1}{6}$ ; c)  $\frac{5}{6}$   
 7a) Sérgio:  $\frac{1}{5}$ ; b) Morgana:  $\frac{1}{4}$   
 8a)  $\frac{3}{10}$ ; b)  $\frac{1}{10}$  9)  $\frac{4}{13}$  10)  $\frac{2}{3}$   
 11)  $\frac{2}{13}$  12)  $P(\bar{E}) = \frac{1}{9}$  e  $p(E) = \frac{8}{9}$   
 13)  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  14a)  $\frac{24}{91}$ ; b)  $\frac{45}{91}$ ; c)  $\frac{67}{91}$   
 15)  $\frac{1}{6^4}$  16a) 20%; b)  $\frac{3}{14}$  17)  $\frac{1}{16}$   
 18a)  $\frac{16}{81}$ ; b)  $\frac{25}{81}$  19)  $\frac{1}{52}$   
 20a)  $\frac{3}{5}$ ; b)  $\frac{2}{5}$  21)  $\frac{3}{10} = 30\%$   
 22)  $\frac{2}{5}$  23a)  $\frac{8}{27}$ ; b)  $\frac{16}{27}$  24)  $\frac{4547}{8192}$

25a) 0,36015; b) 0,1323; c) 0,83193

26)  $\frac{1}{12}$  27)  $\frac{7}{36}$  28) 45% 29) d

30)  $\frac{2}{9}$  31) d 32a) 1; b)  $\frac{1}{30}$  33) c

34a)  $M_a = 5,1$ ;  $M_d = 5$  e a  $M_o = 5$

b)  $M_a = 42$ ;  $M_d = 35$  e a  $M_o$ : não existe

c)  $M_a = 4, 1$ ;  $M_d = 4$  e a  $M_o = 3$  e 6

d)  $M_a = 4, 17$ ;  $M_d = 4, 5$  e a  $M_o = 6$

35a) R\$ 17,00 e R\$ 153,00 (como são dois, podemos dizer que é bimodal); b) R\$ 85,00; c) R\$ 87,12

36) Soma das alternativas: 63 (todas corretas)

## CAPÍTULO XIV

1) área =  $120 \text{ cm}^2$  2) d 3) a

4) área =  $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$  5) d

6) área =  $25 \text{ cm}^2$  7) d =  $2\sqrt{13} \text{ cm}$

8) área =  $10\sqrt{6} \text{ cm}^2$  9) c

10) 5 m e 10 m 11) área =  $96 \text{ cm}^2$

12) perímetro = 66 m 13) d

14) área =  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  15) área =  $49,76 \text{ m}^2$

16) x = 16 cm 17) área =  $216\sqrt{3} \text{ m}^2$

18) área =  $\frac{3a^2}{8}$  19) área =  $65,94 \text{ cm}^2$

20) a 21) área =  $50 \text{ cm}^2$

22a) V; b) V; c) F; d) V; e) F; f) V;

g) F; h) V 23) d 24) a

25a) V; b) V; c) F; d) V; e) F

26a) (EFGH); b) (ABEF); c) (ADEH); d) (ABCD)

27) c 28) b 29) c 30) e

31) d 32) d 33) a

34) 21 (01 + 04 + 16)

35) c

36a) Conforme o número de lados dos polígonos das bases

b) prisma pentagonal

c) As arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, logo elas são congruentes entre si

d.1) Arestas da base

d.2) Arestas laterais

d.3) Altura

e) No prisma oblíquo as arestas são oblíquas aos planos das bases e um prisma regular é quando ele for reto e tiver por base um polígono regular

37a) Triangular/triângulo; b) A'B'C';

c)  $\overline{AC}$ ,  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{B'C'}$  e  $\overline{A'C'}$ ; d)  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$ ;

e)  $\overline{BC}$ ,  $\overline{B'C'}$  e  $\overline{AC}$ ,  $\overline{A'C'}$

38a) V; b) V; c) F; d) V; e) F; f) F;

g) V; h) V; i) F; j) V

39a) ABCD e A'B'C'D'

$\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ ,

b)  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{C'D'}$  e  $\overline{D'A'}$

c)  $\overline{ABA'B'}$ ,  $\overline{BCB'C'}$ ,  $\overline{DCD'C'}$  e  $\overline{ADA'D'}$

d) Prisma quadrangular/quadriláteros

e) Um prisma oblíquo

40)  $A_b = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ;  $A_t = 216 \text{ cm}^2$ ;

$A_t = 36(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$  e  $V = 324 \text{ cm}^3$

41) b 42) 84 43) 54 44) 16

45) c 46) a 47) d

48a) D = 19 cm; b)  $A_t = 600 \text{ cm}^2$ ;

c)  $V = 900 \text{ cm}^3$

49a) D = 15 cm; b)  $A_t = 450 \text{ cm}^2$ ;

c)  $V = 375\sqrt{3} \text{ cm}^3$

50) 8 cm e 4 cm 51) a 52) e

53) e 54) b 55) e 56) b

57) d 58) A aresta deve ser aumentada em 2m 59) e

60a)  $16 \text{ cm}^2 = A_p$ ; b)  $16\sqrt{26} \text{ cm}^2 = A_p$ ;

c)  $A_l = 16(1 + \sqrt{26}) \text{ cm}^2$

61) 48 62) a 63)  $A_l = 225 \text{ cm}^2$

64) b 65) e 66) 64 67) d

68) b 69) d 70) a

71)  $V = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$  72) b

73a)  $h = 2 \text{ cm}$ ; b)  $A_l = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ;

c)  $V = \sqrt{3} \text{ cm}^3$

74) d 75) c 76) c 77) b

78) c 79) d 80) b

81)  $V = 250\pi \text{ cm}^3$  82) e

83) c 84)  $A_{sm} = 48 \text{ cm}^2$

85)  $h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$  86) c

87)  $r = 3 \text{ cm}$ ;  $h = 4 \text{ cm}$  e  $g = 5 \text{ cm}$

88)  $V = 18\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$  89) d

90)  $V = \frac{32\sqrt{5}\pi}{3} \text{ cm}^3$  91) a

92) c 93) c 94) e 95) b

96) 99 97) b 98)  $2\sqrt{2} \text{ dm}$

99)  $\frac{\sqrt{6}\pi}{2\pi}$  100)  $F = 7$  101) e

102) a 103)  $S = 3240^\circ$  104) c

105) d 106a)  $720^\circ$ ; b)  $2160^\circ$ ;

c)  $1440^\circ$ ; d)  $6480^\circ$ ; e)  $3600^\circ$

107) c 108) c 109) b 110) b

## CAPÍTULO XV

1) b 2) b 3) d 4) 92 5) 2,7 cm 6) c

7a)  $x = 90$  e  $y = 75$ ; b)  $a = 24$  e  $b = 18$

8) b 9) 48 cm 10) b 11) 10 m

12) e 13) 26 14) 8% 15) 50 homens

16) Cz\$ 84,00 17) a 18) 20%

19) R\$ 208 000,00

20a) 20%; b) 16,66%

21) R\$ 37 500,00 22) 23%

23) R\$ 27,00 24) b

25) Cr\$ 1 267 500,00 26) 400 dólares

27) c 28) b 29) d 30) b

31) e 32) d 33) d 34)  $x = 5\%$

35) O preço foi alterado, tendo uma diminuição de 4% 36) a

37a) Em 15/3, o preço era de R\$ 20,00.

Em 15/4, o preço era de R\$ 31,20

b) Maior índice de reajuste: julho (+ 41,8%)

c) O percentual de redução do preço foi de  $i = 5\%$

38) 12% ao mês 39) a

40) 540 dias ou 18 meses ou 1 ano e meio 41) 2% ao mês 42) 20 meses

43) b 44) 5 anos 45) R\$ 4 502,19

46) 12 700,00 47) R\$ 2 400,00

48) 8% ao mês 49) R\$ 3 045,00

50a) 171,6, onde  $i = 71,6\%$

b) 111,6, onde  $i = 11,6\%$

51) Deverá escolher o plano à vista, pois com a inflação de 20%, o plano à prazo, vai aumentando. Seja R\$ 100,00 o preço de uma mercadoria, então:

à vista	a prazo	diferença
70,00	100,00	(30,00)
84,00	120,00	(36,00)
100,80	144,00	(43,20)

· · ·  
· · ·  
· · ·

52) A 2ª opção é a mais vantajosa, pois supondo que um produto custe R\$ 90,00. Então:

a) Se comprar à vista, tem 15% de desconto. Então:  $90 \cdot 0,85 = 76,50$  (preço à vista) e lhe sobra:  $90,00 - 76,50 = 13,50$  (para deixar aplicado a render 30% ao mês).

no 1º mês = 17,55

no 2º mês = 22,81

b) Se parcelar em 3 vezes:

a 1ª: 30,00 (90,00 - 30,00 = 60,00 → vai aplicar)

1º mês: 78,00 (paga a 2ª parcela: 78,00 - 30,00 = 48,00 vai aplicar)

2º mês 62,40 (paga a 3ª parcela (última) e fica com 62,40 - 30,00 = 32,40)

53) 20%

## CAPÍTULO XVI

1a)  $S = \{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

b)  $S = \{-2 + 2i; -2, -2i\}$

c)  $S = \{2 + i; 2 - i\}$

d)  $S = \{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

e)  $S = \{\sqrt{10}i, -\sqrt{10}i, \sqrt{10}, -\sqrt{10}\}$

2a) -49; b) -9; c) -2i; d)  $-\frac{77}{9} + 4i$

3a)  $\frac{7}{2} + 0i$ ; b)  $0 - 2i$ ; c)  $-10 + 0i$ ;

d)  $0 + 6i$ ; e)  $0 - i$ ; f)  $0 + 10i$ ;  $0 - 10i$ ;

g)  $0 + 2i$ ;  $0 - 2i$ ; h)  $-\sqrt{3} + 0i$

4a)  $\text{Re}(z) = 5$  e  $\text{Im}(z) = -3$

b)  $\text{Re}(z) = 0$  e  $\text{Im}(z) = 1$

c)  $\text{Re}(z) = 5$  e  $\text{Im}(z) = 2$

d)  $\text{Re}(z) = \sqrt{3}$  e  $\text{Im}(z) = 3$

e)  $\text{Re}(z) = -\sqrt{2}$  e  $\text{Im}(z) = 1$

f)  $\text{Re}(z) = -\sqrt{7}$  e  $\text{Im}(z) = -1$

g)  $\text{Re}(z) = 5$  e  $\text{Im}(z) = 0$

h)  $\text{Re}(z) = \frac{3}{7}$  e  $\text{Im}(z) = 0$

5a) imaginário; b) imaginário puro;

c) imaginário; d) imaginário; e) imaginário; f) imaginário; g) real; h) real

6a)  $x = -7$ ; b)  $x = 3$  7)  $y = 5$

8) 1 9) c

10a) -i; b) i; c) 1; d) -1

11)  $1 - i$  12) b 13) b

14)  $a = -\frac{2}{5}$  e  $b = 3$

15a)  $a = -\frac{2}{11}$  e  $b = \frac{7}{11}$

b)  $a = -2$  e  $b = -4$

c)  $a = \frac{90}{11}$  e  $b = -\frac{18}{11}$

16)  $a = 1$  e  $b = \pm 4$

17a)  $-1 + 2i$ ; b)  $5 - 8i$ ; c)  $-5 + 8i$ ;

d)  $9 + 19i$ ; e)  $-5 - 12i$ ; f)  $-16 - 30i$

18a)  $1 + 2i$ ; b)  $15 - 10i$ ; c)  $-4 - 6i$ ;

d)  $4 - 7i$  19) a 20) c 21) b

22a) -i; b)  $1 + 2i$ ; c)  $3 - i$ ; d)  $-2 - 4i$

23)  $1 - 3i$ ;  $-1 + 3i$  24) d

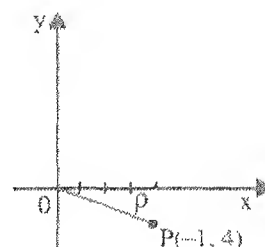
25a)  $\frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$ ; b)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ ; c)  $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

26) -i 27a)  $S = \{3i - 1\}$ ;

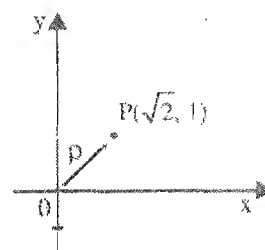
b)  $S = \{2 + 2i\}$ ; c)  $S = \{2i; -i\}$

28) c 29) 7 30) d 31) e

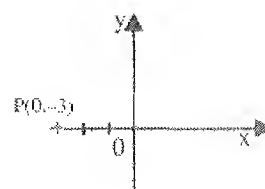
32a)  $\rho = \sqrt{17}$



b)  $\rho = \sqrt{3}$

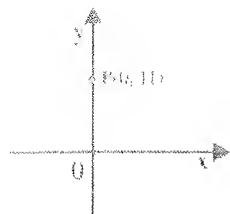


c)  $\rho = 3$

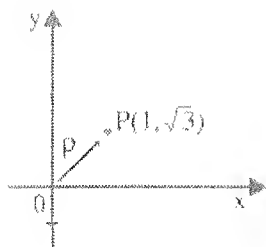




d)  $p = 11$



e)  $p = 2$



33) 72    34) b    35) 4    36) d

37) 25    38) 33    39) 10    40) 26

41)  $(1 + 2 + 4 + 16 + 32) = 55$

42)  $(1 + 4 + 8 + 32) = 45$

43a)  $|z| = p = 4$  e  $\theta = 180^\circ$  ou  $\theta = \pi$

b)  $|z| = p = 3$  e  $\theta = 270^\circ$  ou  $\theta = \frac{3\pi}{2}$

c)  $|z| = p = 2$  e  $\theta = 60^\circ$  ou  $\theta = \frac{\pi}{3}$

44a)  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

b)  $z = 8 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

c)  $z = 5 (\cos \pi + i \sin \pi)$

45a)  $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ; b)  $z = -2i$ ;

c)  $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$     46) c

## CAPÍTULO XVII

1a) Termos:  $x^4$ ,  $-3x^3$ ,  $\frac{1}{5}x^2$ ,  $x$ ,  $-3$

Coefficientes:  $1$ ,  $-3$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $1$ ,  $-3$

b) Termos:  $\frac{1}{8}x^2$ ,  $-5x$ ,  $\sqrt{2}$

Coefficientes:  $\frac{1}{8}$ ,  $-5$ ,  $\sqrt{2}$

c) Termos:  $-x^2$ ,  $x$ ,  $1$

Coefficientes:  $-1$ ,  $1$ ,  $1$

2) a, c, d

3a)  $\text{gr}(P) = 4$  (polinômio do 4º grau)

b)  $\text{gr}(Q) = 1$  (polinômio do 1º grau)

c)  $\text{gr}(R) = 0$  (polinômio de grau zero – polinômio constante)

d)  $\text{gr}(S) = 2$  (polinômio do 2º grau)

e)  $\text{gr}(T) = 8$  (polinômio do 8º grau)

f)  $\text{gr}(U) = 1$  (polinômio do 1º grau)

g)  $\text{gr}(V) = 5$  (polinômio do 5º grau)

h)  $\text{gr}(Z) = 2$ , se  $a \neq 0$

$\text{gr}(Z) = 1$ , se  $a = 0$  e  $b \neq 0$

$\text{gr}(Z) = 0$ , se  $a = b = 0$

i) O grau de  $W(x)$  não é definido, pois  $W(x) = 0$  é um polinômio nulo

4a)  $P(x) = -6x^7 + 0x^6 + 2x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$ ;

b)  $Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + 0x + 0$ ; c)  $R(x) = 2$

5) Sendo  $P(x) = 0$ , podemos escrever:

$P(x) = 0x + 0$

$P(x) = 0x^2 + 0x + 0$

.....

$P(x) = \dots 0x^7 + 0x^6 + \dots + 0$

Logo, não se pode definir o grau de  $P(x) = 0$

6) c    7)  $m = 4$     8a)  $m = 0$ ; b)  $m \neq 0$

9) b    10)  $a = 2$  e  $b = 1$

11)  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = -\frac{3}{2}$  e  $p = -2$

12)  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{2}{5}$  e  $l = \frac{3}{2}$

13) 66    14)  $a = -1$  e  $b = 1 + i$

15) a    16)  $m = 1$ ,  $n = 2$  e  $p = -3$

17)  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = -2$  e  $d = 2$

18) d    19) e    20) 20    21) b

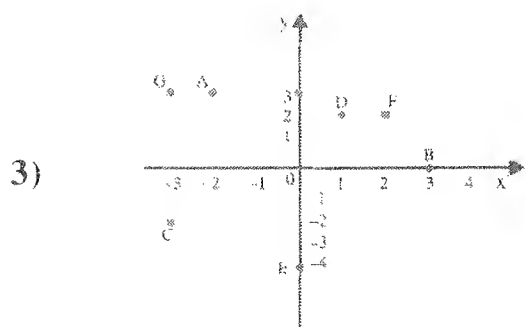
22) a    23) b    24) d    25) d

26) zero    27) c    28) a    29) 33

- 30) 11 31)  $R(x) = 23$  32) e  
 33) b 34) d 35) a 36) d  
 37) e 38)  $A = 75$  39) b  
 40)  $a = 1$  e  $b = 0$   
 41)  $m = -19$  e  $n = -23$  42) b  
 43a)  $Q(x) = 5x^2 - 3x + 2$  e  $R(x) = 2$   
 b)  $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{8}$  e  $R(x) = \frac{25}{8}$   
 44) c 45) b 46)  $m \cdot n = -66$   
 47a)  $a = 4$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  e  $d = 3$   
 b)  $a = 1$ ,  $b = 5$ ,  $c = -4$  e  $d = 4$   
 48a)  $P(x) = 5(x - 3) \cdot (x - 1)$   
 b)  $P(x) = 2(x - 2)(x - 1)(x + 1)$   
 49)  $S = \{1, -i, i\}$  50) c  
 51) b 52) 8 53) c  
 54a)  $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$   
 b)  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$   
 55) 19 56) c 57) a 58) d  
 59) -24 60) zero 61) zero

## CAPÍTULO XVIII

- 1a) 8; b) 3; c) 5; d) 8; e) 5  
 2a) 6; b) 5; c) 1; d) 1



- 4)  $A(3, 4)$ ;  $B(-3, 0)$ ;  $C(0, 2)$ ;  $D(5, 0)$ ;  $E(0, -5)$ ;  $F(-2, -3)$   
 5a) 4º quadrante; b) 2º quadrante;  
 c) 1º quadrante; d) 3º quadrante;  
 e) Não se define o quadrante; f) Não se define o quadrante; g) 2º quadrante; h) Não se define o quadrante  
 6a)  $m$ , ou seja,  $A(m, m)$

- b)  $-b$ , ou seja,  $B(-b, b)$   
 c)  $-c$ , ou seja,  $C(-c, -c)$   
 d)  $-n$ , ou seja,  $D(n, -n)$   
 e) 0, ou seja,  $E(e, 0)$   
 f) 0, ou seja,  $F(0, -f)$   
 7a)  $d(A, B) = 2\sqrt{2}$ ;  
 b)  $d(C, D) = \sqrt{113}$ ; c)  $d(E, F) = \sqrt{5}$   
 8) 10 9) b 10) c 11) d  
 12)  $x = 8$  13) e 14)  $k = 4$   
 15) d 16) a 17)  $M(4, 2)$   
 18a)  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ; b)  $\left(\frac{21}{4}, -7\right)$ ; c)  $(10, 12)$   
 19)  $M_{AB}\left(\frac{7}{2}, 3\right)$ ,  $M_{AC}\left(2, \frac{9}{2}\right)$  e  $M_{BC}\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$   
 20)  $B(4, 5)$   
 21) O segmento AB ficou dividido em  $P\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ ,  $M(-2, 2)$  e  $N\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

- 22) c 23)  $M_{BC}\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{2}\right)$  24) b

- 25) a 26)  $A(9, -2)$ ,  $B(-5, -4)$  e  $C(1, 6)$   
 27a) alinhados; b) não alinhados;  
 c) alinhados  
 28) a 29) c 30) 29 31) 24  
 32) 12 33) 0 - 0) - Verdadeira; 1 - 1) - Falsa; 2 - 2) - Verdadeira; 3 - 3) - Falsa; 4 - 4) - Falsa

- 34)  $\frac{21}{2}$  35)  $m = \sqrt{3}$  36a)  $m = 6$ ;

- b) O coeficiente angular  $m$  não é definido; c)  $m = 0$

- 37a)  $m = 1$ ,  $\text{tg } \alpha = 1$   $\alpha = 45^\circ$

- b) O coeficiente angular  $m$  não é definido, logo, não existe  $\text{tg } \alpha$  e  $\alpha = 90^\circ$

- c)  $m = 0$ ,  $\text{tg } \alpha = 0$  e  $\alpha = 0^\circ$

- 38) c 39) e 40) d

- 41)  $x - 3y + 7 = 0$  42) c

- 43)  $2x + y + 2 = 0$       44) d  
 45a)  $x = 5$ ; b)  $x = -3$       46)  $y = 5$   
 47a)  $y = 3x + 12$ ; b)  $y = -\frac{x}{4} - \frac{13}{2}$   
 48a)  $y = -2x + 6$ ;  $m = 2$  e  $b = 6$   
 b)  $y = 4x - 5$ ;  $m = 4$  e  $b = -5$   
 c)  $y = 4$ ;  $m = 0$  e  $b = 4$  (reta horizontal)

49a)  $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ ; b)  $y = \frac{3x}{7} + \frac{5}{7}$ ;

c)  $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{10}$

50a) Coeficiente angular:  $\frac{5}{2}$

Coeficiente linear:  $\frac{3}{2}$

b) Coeficiente angular:  $\frac{1}{4}$

Coeficiente linear:  $\frac{9}{4}$

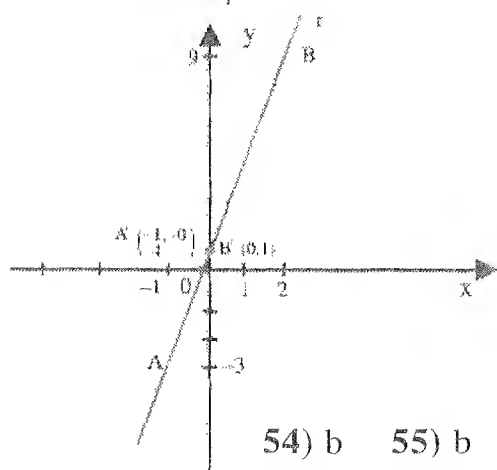
c) Coeficiente angular:  $-7$

Coeficiente linear:  $5$

51a)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ ; b)  $-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ;

c)  $-\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1$ ; d)  $\frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 1$

52) a      53)  $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = \frac{1}{4}$



54) b      55) b

56) Coeficiente angular:  $m = -\frac{1}{2}$

Coeficiente linear:  $\frac{3}{2}$

57) Equação da reta suporte do lado AB:  $-x + 3y - 2 = 0$

Equação da reta suporte do lado AC:  $-2x + y + 1 = 0$

Equação da reta suporte do lado BC:  $-x - 2y + 13 = 0$

58) 55      59) a      60) a

61a)  $r_1 \parallel r_2$ ; b)  $r_1 \times r_2$ ; c)  $r_1 \parallel r_2$

62a)  $u \neq 4$  e  $v \in \mathbb{R}$ ; b)  $u = 4$  e  $v \neq 14$ ;

c)  $u = 4$  e  $v = 4$

63) d      64) c      65)  $a = 3b - 5$

66) d      67)  $m \neq -4$       68) c

69) b      70) c      71) a

72)  $3x + y - 19 = 0$       73) b

74)  $P' \left( -\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$       75) d

76)  $(02 + 08 + 16 + 32 = 58)$

77)  $p = 18$       78) d      79)  $d(Q, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

80) a      81) 2      82)  $2\sqrt{5}$

83a)  $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$

b)  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$

c)  $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 9$

d)  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

e)  $x^2 + y^2 = 64$

f)  $x^2 + (y + 5)^2 = 8$

g)  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$

84a)  $O(3, -5)$  e  $r = 3$ ; b)  $O(-7, -1)$  e  $r = 2$

c)  $O(3, 0)$  e  $r = 4$ ; d)  $O(0, 1)$  e  $r = 10$

e)  $O(0, 0)$  e  $r = \sqrt{6}$ ; f)  $O(-4, 0)$  e  $r = 9$

85)  $P(-4, 1) \notin (\alpha)$  e  $(\alpha)$  passa pela origem

86) e      87)  $b = -1$  ou  $b = 7$       88) b

89)  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$       90) e

91a)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 10x - 24 = 0$

- c)  $x^2 + y^2 + 16x + 60 = 0$   
 d)  $x^2 + y^2 - 12y + 33 = 0$   
 e)  $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 64 = 0$   
 f)  $x^2 + y^2 = 25$

- 92a) O (5, -3) e  $r = 3$ ;  
 b) O (-1, 4) e  $r = \sqrt{17}$ ; c) O (4, 0) e  $r = 4$   
 d) O (0, 1) e  $r = 1$ ; e) O (2, 0) e  $r = 4$

93a) Não representa uma circunferência. O gráfico da equação é um ponto

b) O gráfico da equação representa uma circunferência

c) Não representa uma circunferência. O gráfico da equação é um ponto

d) Não representa uma circunferência. O gráfico não contém ponto algum

94) b 95) b

96a) Pertence à circunferência

b) É externo à circunferência

c) É interno à circunferência

d) É externo à circunferência

e) É interno à circunferência

97a)  $m < -11$ ; b)  $m > -11$ ; c)  $m = -11$

98) São secantes. Pontos comuns: (0, 0) e (1, -1)

99)  $k = 12$  100) b 101) a

102) 94 103) b

## CAPÍTULO XIX

- 1a) 2,37475; b) -0,30403;  
 c) 1,96848; d) 2,96142; e) 1,72428;  
 f) -0,04576; g) 2,62221

2a)  $\frac{\pi}{3}$  rad; b)  $\frac{3\pi}{4}$  rad; c)  $\frac{\pi}{3}$  rad;

d)  $\frac{\pi}{4}$  rad; e)  $\frac{\pi}{6}$  rad; f)  $\frac{\pi}{4}$  rad

3a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c) 1; d) 1; e)  $\frac{1}{2}$ ; f)  $-\sqrt{3}$

4)  $\sqrt{3}$  5) c 6) b 7) b 8) b

9a)  $z^1 \cdot z^2 = 16i$ ; b)  $\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{3} + 2i$

10a)  $z^1 \cdot z^2 \cdot z^3 = 24 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

b)  $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1} = 6 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

11) a 12) e

13)  $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$  14) c

15a)  $p \wedge q$ : "Álgebra é interessante e não tenho uma caneta azul"

b)  $p \vee q$ : "Álgebra é interessante ou não tenho uma caneta azul"

c)  $q \vee r$ : "Não tenho uma caneta azul ou  $x + y = 5$ "

d)  $\sim p$ : "Não é verdade que Álgebra é interessante"

e)  $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ : "Não é verdade que Álgebra é interessante e tenho uma caneta azul"

f)  $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$ : "É falso que Álgebra é interessante ou tenho uma caneta azul"

g)  $p \rightarrow q$ : "Se Álgebra é interessante, então não tenho uma caneta azul"

h)  $q \leftrightarrow r$ : "Não tenho uma caneta azul se, e somente se,  $x + y = 5$ "

i)  $\sim (\sim q) = q$ : "Tenho uma caneta azul"

j)  $(p \wedge \sim r)$ : "Álgebra é interessante e é falso que  $x + y = 5$ "

l)  $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r)$ : "Álgebra é interessante e tenho uma caneta azul ou é falso que Álgebra é interessante e  $x + y = 5$ "

16a)

p	q	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b)

p	q	$\sim (\sim p \leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

c)

p	q	$p \rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

d)

p	$q(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V
V	F
F	V
F	V

e)

p	q	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

17a) O argumento é válido

b) O argumento não é válido. É um sofisma

c) O argumento é válido

18)  $x^2 + 20y = 0$  19) e 20) d

21)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  ou  $16x^2 + 25y^2 = 400$

22) a 23) c

24)  $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$  ou  $8y^2 - x^2 = 8$